

519.2  
с94

**Г. В. СУХОДОЛЬСКИЙ**

**ОСНОВЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
СТАТИСТИКИ  
ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ**



Г.В.СУХОДОЛЬСКИЙ

ОСНОВЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
СТАТИСТИКИ  
ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ

Издание второе,  
переработанное и дополненное

*Рекомендовано Министерством общего и  
профессионального образования Российской  
Федерации в качестве учебника для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по  
направлению и специальности «Психология»*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1998

УДК 159.9.07+159.9.07:51-7

ББК 88

С91

Рецензенты: межузовская кафедра практической психологии и инженерного творчества (зав. кафедрой д-р психол. наук М. К. Тутушкина), д-р психол. наук А. А. Крылов (С.-Петербургский государственный университет)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
С.-Петербургского государственного университета*

**Суходольский Г. В.**

С 91 Основы математической статистики для психологов:  
Учебник. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998. 464 с.  
ISBN 5-288-01489-2

В учебнике систематизирован обширный арсенал теоретико-вероятностных и статистических методов для описания психологических явлений, проверки гипотез и обработки результатов экспериментальных исследований. Изложение сущности методов иллюстрируется примерами из разных областей и не требует для понимания специальной математической подготовки.

Учебник предназначен для студентов и аспирантов факультетов психологии, специалистов психологов, социологов и обществоведов.

Тем. план 1996 г., № 79

Тем. план 1998 г., № 30

**ББК 88**

## **Предисловие ко второму изданию**

Прошло более 20 лет со времени первого издания книги. К ней все чаще обращаются психологи при научных исследованиях. На нее ссылаются в публикациях. Студенты и аспиранты, слушатели спецфакультетов по психологии, молодые ученые и практики используют ее как учебное и справочное пособие. Все это потребовало переиздания книги, которая первоначально вышла сравнительно небольшим тиражом.

За прошедшие годы некоторые положения книги, на мой взгляд, оказались излишними для психологической практики либо устаревшими. В новом издании они переработаны. Значительно переработаны первая глава — расширены сведения о преобразованиях и последовательностях событий, а также отдельные параграфы второй, третьей и четвертой глав, в которых изложение и расчеты распределений вероятностей теперь выполнены на мультимножествах и матрицах, а скалярные соотношения теории вероятностей заменены матричными уравнениями распределений. Во второй главе, помимо небольших купюр и редакционных поправок, устаревший метод нормализации распределений по составу заменен методом нормализации функции распределения. В третью главу добавлен материал о совокупных характеристиках положения, рассеивания и связи случайных величин и о расчетах этих характеристик. В пятой главе предложены новые подходы к разработке моделей сложных совокупностей и проектированию экономичных по объему репрезентативных выборок на основе этих моделей. В шестой главе к рассмотрению методов дисперсионного анализа добавлен параграф по основам математического планирования эксперимента. Полностью переделано Приложение 1 — читателю предлагаются новые полезные сведения о матрицах и действиях с ними. Сокращен и обновлен список рекомендуемой литературы. Кроме того, исправлено большое количество опечаток, обнаруженных студентами, за что я им весьма признателен. В целом концепция, структура и основное содержание книги сохранены.

В последнее время стало принято отсылать читателя к пакетам прикладных программ для обработки эмпирических данных на ЭВМ. При значительных массивах данных это, конечно, целесообразно. Однако опыт показывает, что для правильной интерпретации результатов компьютерной обработки и прежде всего для того чтобы верно спланировать эксперимент и получить необходимые данные, исследователю надо понимать существо математико-статистических методов, а это невозможно, если они не освоены путем расчетов вручную на несложных примерах. На такое освоение и нацелен настоящий учебник.

*Светлой памяти  
Бориса Герасимовича Ананьева  
посвящаю*

## Предисловие к первому изданию



Математическая статистика — это наука о случайных явлениях. Под явлением понимается любой подлежащий изучению объект независимо от его конкретного содержания. По степени количественной определенности явления рассматриваются как отдельные события, величины, функции и как системы событий, величины, функций. Если изучаемые объекты можно трактовать как следствия многочисленных разнообразных по действию причин, то интересующие исследователя свойства этих объектов определяются неоднозначно и могут быть предсказаны лишь в результате массовых наблюдений не полностью, а с большей или меньшей вероятностью. Такие объекты и характеризуются как случайные явления (случайные события, величины, функции или их системы).

Математическая статистика занимается математическим описанием случайных явлений, т.е. построением вероятностных моделей, а также проверкой их пригодности. Поэтому выделяют два раздела: описательную статистику и статистику «проверяющую» (статистическую проверку гипотез); соответственно разделяется и методический аппарат. Понятия и методы описательной статистики создаются в теории вероятностей, а понятия и методы статистической проверки гипотез создаются в специальных теориях (например, в теории статистических решений) либо в приложениях теории вероятностей к конкретным наукам.

Современное развитие обширного комплекса наук о человеке\* предлагает широкое использование методов математической статистики уже

---

\*Афанасьев Б.Г. Человек как предмет познания. Л., 1968.

потому, что именно в этих науках объекты исследования в наибольшей мере удовлетворяют понятию случайных явлений. Благодаря огромной структурной и функциональной сложности психические, социальные, педагогические и т. п. явления издавна служили развитию самой математической статистики (здесь достаточно упомянуть Ф. Гальтона, развившего первоначальные идеи корреляции и регрессии, Ч. Спирмена, создавшего ранговую корреляцию и одnofакторный анализ, Л. Терстоуна, разработавшего мультифакторный анализ). Однако к настоящему времени собственный понятийный и методический аппарат математической статистики значительно развился и усложнился, что, естественно, вызывает трудности его использования в «не математизированных» еще науках.

Примеры зарубежных руководств по предмету, собственный опыт автора и его коллег убедительно свидетельствуют о необходимости специальной интерпретации основных идей, понятий и методов математической статистики для специалистов психологических и смежных с ними дисциплин. В этой связи, очевидно, изложение основ математической статистики не может и не должно быть отягощено необходимыми для математика, но излишними для психолога математическими подробностями. Учитывая сказанное, автор ставил перед собой следующие задачи: 1) дать минимум языка (основные понятия и символы), необходимый и достаточный для подготовки экспериментального исследования, первичной и последующей специальной обработки полученных данных, углубленного изучения специальной литературы; 2) ознакомить (в общем виде и на примерах из области психологии, педагогики, социологии и т. д.) с системой идей и вероятностных методов, которые целесообразно использовать в комплексе психологических дисциплин; 3) показать на конкретных примерах из разных областей психологии пути и способы применения тех методов теоретико-вероятностного описания и проверки статистических гипотез, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. В этой связи книга имеет ряд особенностей.

В изложении автор основывался на системном подходе, естественном для познания психических, социальных, педагогических и т. п. явлений, в котором существенное значение имеют уровни квантификации изучаемых объектов, а также последовательный переход от номинативной квантификации свойств (события) к их упорядочиванию и ранжированию, и затем к уравниванию интервалов и отношений (величины, функции). Изложение приближено к задачам психологической теории и практики и везде поясняется примерами, большинство которых взято из конкретных исследований автора и его коллег. Для работы над книгой читателю достаточно математической подготовки в объеме средней школы. Изложение ведется без доказательств, а вся необходимая терминология и символика из высшей математики вводится по мере надобности. Необходимые сведения о матрицах и действиях с ними даны в Приложении 1 (к нему следует обра-

таться при первой же встрече с понятием матрицы). Существенное внимание уделено специальным понятиям и терминам из теории вероятности и других разделов математической статистики. Автор глубоко убежден, что робость перед математическими методами и трудности в их усвоении и использовании обусловлены «языковыми» трудностями. Поэтому, подчеркивая термины, рекомендуемые к употреблению, автор стремился приводить также синонимы, встречающиеся в специальной литературе. Библиография использованных математических источников приведена в конце книги, ссылки в тексте сделаны на работы нематематического характера. Автор старался представить широкий арсенал возможностей и методических средств математической статистики в психологических и смежных дисциплинах, особое внимание обращая на методы, важные для этих наук, но мало освещенные в литературе, доступной широкому кругу исследователей. Тем не менее отбор материала в книгу, видимо, не лишен определенного субъективизма.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность профессору Б. Ф. Ломову, который предложил ему разработать и читать на факультете психологии курс лекций по математической статистике, профессору Б. Г. Ананьеву, который способствовал развитию изысканий автора на этом пути и благодаря поддержке которого была создана эта книга, а также всем преподавателям и сотрудникам факультета психологии, помогавшим ему советами и материалами.

## ГЛАВА I. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

### 1.1. СОБЫТИЕ И МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ПОЯВЛЕНИЯ

#### 1.1.1. Понятие о событии

*Событием* называют всякий реальный или воображаемый факт, который интересует исследователя. О событии говорят, что оно появляется, наступает, происходит, имеет место и т. п. Наблюдение или эксперимент, в котором могут появляться какие-либо события, называется *опытом*. Существующие объективно или специально вызываемые события, известные экспериментатору и влияющие на ход опыта, называются *условиями* (опыта). Так как условия могут быть очень многочисленными, то обычно из их числа выделяют небольшую группу *основных условий*, влияние которых на ход опыта наиболее существенно. В отдельных случаях в качестве основных принимают условия, которые по каким-то соображениям наиболее желательны для целей исследования. События, которые объективно влияют на ход опыта, но о которых экспериментатору ничего не известно, в число условий опыта не включаются. События, которые при данных условиях могут произойти в опыте, называются *исходами* (опыта). Условия опыта вместе с совокупностью возможных исходов называются *испытанием*.

**Пример 1.1.** Опыт состоит в наблюдении за учеником, решающим задачу. Условиями опыта являются: возраст и уровень образования ученика, место и время наблюдения, характер задачи (по виду учебной дисциплины) и тип задачи (по виду решающего правила), время, отпущенное на решение, и т. п. В зависимости от целей наблюдения за основные условия может быть принята любая часть или все перечисленные условия. Как правило, многие из событий, способных влиять на исходы опыта, не могут быть включены в круг условий. Например, наличие у ученика определенных побуждений неучебного характера, безусловно, влияет на то, как он решает задачу. Но, будучи скрытыми от наблюдателя, эти побуждения вне специального эксперимента не могут учитываться в качестве условий опыта.

При решении конкретной задачи можно выделить два или три исхода. Два исхода: первый — ученик решает задачу правильно, второй — ученик не решает задачу. Второй исход, в свою очередь, может быть подразделен на два новых исхода: ученик решает задачу неправильно, и ученик не доводит решение до конца и отказывается от дальнейших попыток, потому что не знает, что делать. Таким образом, в случае трех исходов выделяются: первый — ученик находит правильное решение и решает задачу до конца, второй — ученик неправильно решает задачу до конца и третий — ученик не решает задачу до конца. Попытки решить одну задачу при перечисленных условиях, приводящие к одному из указанных исходов, образуют одно испытание, попытки решить вторую задачу — второе испытание и т. д.

### 1.1.1. Случайные и неслучайные события

Случайным называется событие, которое при определенном комплексе условий опыта в каждом конкретном испытании может происходить, а может и не происходить. Так, в примере 1.1 ученик может решить предложенную задачу правильно, а может и не решить. Поэтому факт правильного решения задачи учеником можно рассматривать как случайное событие. Аналогично и противоположный факт — неправильное решение задачи — тоже случайное событие. Достоверным называется событие, которое всегда имеет место при определенном комплексе условий. Например, нормально развивающийся ребенок всегда начинает говорить на языке тех людей, с которыми общается в период освоения устной речи. Невозможным называется событие, которое никогда не происходит при определенном комплексе условий. Например, животное, лишенное человеческого мозга и артикуляторных органов, не может пользоваться человеческой речью. Достоверные и невозможные события объединяются понятием *неслучайных* событий.

Большинство фактов психической жизни человека и животных можно рассматривать как случайные события. Трудно назвать какое-либо психическое явление, которое наступало бы во всех случаях, когда имеются соответствующие условия. Всегда есть исключения: рождаются дети с одной рукой или двумя головами; наряду с нормальными появляются дебилы, имбецилы и идиоты, с одной стороны, талантливые и гениальные — с другой; как бы внимательно ни следил наблюдатель за интересующим его объектом, внимание может быть отвлечено каким-либо посторонним раздражителем. Примеры можно легко умножить, но здесь мы ограничимся сказанным.

Важно отметить, что под категорию случайных теоретически подпадают все события, которые хотя бы однажды не появляются тогда, когда они должны были появиться, несмотря на то, что прежде они появлялись всегда. Но практически такие события принимают за достоверные. Аналогичное утверждение можно сделать и в отношении невозможных событий. Поэтому нет, в сущности, четких границ между достоверными и случайными событиями, а также между случайными и невозможными событиями. После того как мы рассмотрим понятие о вероятности, еще раз обратимся к разделению достоверных, случайных и невозможных событий.

### 1.1.1. Частота, частость и вероятность



Каждый знает по личному опыту, что одни случайные события происходят сравнительно часто, а другие — редко. Например, в Санкт-Петербурге часто идет дождь, а вот жара в 30° бывает редко. Гриппом мы бодем часто, а психическими заболеваниями сравнительно редко. Слова «часто», «редко» наряду с другими отображают в языке ожидаемую степень возможности появления случайных событий в окружающей нас действительности. Но возникает вопрос об объективной мере возможности появления случайных событий. В качестве такой меры могут использоваться частота, частость и вероятность события.

*Частотой* события называется количество случаев появления события. Пусть в примере 1.1 ученик правильно решил восемь задач. Это и есть частота правильного решения задачи учеником. Легко видеть, что частота зависит от количества испытаний. Тот же ученик из пяти задач мог решить, например, четыре, а из 20—16. Ясно, что при большом количестве наблюдений одно и то же случайное событие будет встречаться чаще. Частота может служить в качестве сравнительной оценки возможности появления случайных событий лишь при условии одинакового числа испытаний. Если же это условие не выполняется, то нужна другая мера. Такой мерой возможности появления случайных событий служит частость.

*Частость* — это относительная частота, т. е. частота, деленная на количество испытаний. Обозначая частоту  $f$ , количество испытаний  $n$ , а частость  $p$ , можем записать

$$p = \frac{f}{n}. \quad (1.1)$$

Частость в гораздо меньшей степени зависит от количества испытаний, чем частота. Так, если ученик из пяти задач правильно решил четыре, из десяти — восемь, а из 20 только 16, то частость во всех трех случаях будет одинакова: 4/5. Тем не менее и частость

не является наилучшей мерой возможности появления случайного события. Покажем это на примере.

**Пример 1.2.** В ряде случаев важно знать, какова возможность спонтанного воспроизведения памятью человека хорошо известных ему образов. Например, как часто среди произвольно называемых или записываемых арабских цифр появляется определенная цифра? Был организован несложный эксперимент, в котором испытуемому предлагалось записывать цифры от «0» до «9» в любом порядке, кроме прямого и обратного, и таким путем заполнить цифрами стандартный лист писчей бумаги. Рассмотрим в данном примере частоту записи цифры «7» одним из испытуемых.

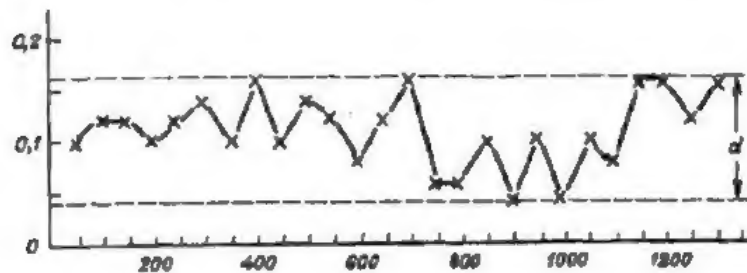


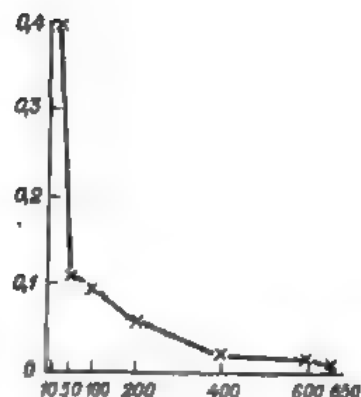
Рис. 1.1. Рассеивание значений частоты цифры «7» по группам из пятидесяти исходов.

По оси ординат — частоты, по оси абсцисс — количество исходов;  $d$  характеризует величину рассеивания.

Всего испытуемый записал более 1300 цифр, относительно которых частота записи цифры «7» составляет 0,108. Вычислим значения этой частоты для каждой пятидесяти цифр, записанных испытуемым: для первых пятидесяти, для вторых пятидесяти, для третьих пятидесяти и т. д. Результаты приведены на рис. 1.1, откуда видно, что значения частоты изменяются случайным образом в пределах от 0,04 до 0,16. Пределы изменения частоты, обозначенные на рис. 1.1 буквой  $d$ , характеризуют рассеивание значений частоты, определяемых по группам из пятидесяти испытаний. Поступая аналогичным образом, мы определили частоты цифры «7» за каждые 10, 50, 200, 400, 600 и 850 цифр, записанных испытуемым, и нашли величины  $d$ . На рис. 1.2 можно видеть, что рассеивание значений частоты цифры «7» не остается постоянным, а быстро уменьшается при увеличении количества исходов, на основе которого вычислялись частоты.

Таким образом, частота события тоже зависит от количества испытаний. Но чем больше испытаний проведено, тем больше мы

Рис. 1.2. Уменьшение величины рассеивания значений частоты цифры «7» в зависимости от количества исходов. По оси ординат — величина рассеивания, по оси абсцисс — количество исходов.



можем быть уверены в том, что значение частоты отображает объективную возможность появления интересующего нас события, а не обусловлено количеством испытаний. Полностью, однако, избавиться от влияния числа испытаний, пользуясь частотой, нельзя. Необходима другая мера. Такой мерой объективной возможности появления события является *вероятность*.

### 1.1.4. Статистическое определение вероятности

Существует немало определений того, что такое вероятность. Здесь мы рассмотрим одно из наиболее распространенных. Оно предложено Р. Мизесом и обычно называется «статистическим» определением вероятности. Как видно из примера 1.2, при увеличении количества испытаний значения частоты изменяются все меньше и меньше, приближаясь к некоторому постоянному значению. Обозначив это значение  $P$ , можем записать

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{n}. \quad (1.2)$$

Постоянное значение, к которому как к своему пределу стремится частота при неограниченном увеличении количества испытаний, и называют вероятностью.

На практике, очевидно, невозможно увеличивать количество испытаний до бесконечности. Поэтому непосредственно из опыта определить значение вероятности событий нельзя. В отдельных случаях, при определенных условиях, можно априори найти значение вероятности. Это так называемое классическое определение вероятности. Примерами такого определения являются вероятности выпадения «орла» или «решки» при бросании монеты правильной формы, равные  $1/2$  каждая, или вероятности выпадения

любой из сторон игральной кости (кубика), имеющей правильную форму, соответственно равные  $1/6$  (по числу сторон). В большинстве практических приложений все же приходится пользоваться частотами как оценками вероятностей, определяемыми в длинных сериях испытаний\*.

Как следует из уравнений (1.1) и (1.2), и частоты, и вероятность численно могут принимать любое значение между нулем и единицей. Действительно, если  $f = n$ , то  $P = 1$ , и событие, о котором идет речь, является достоверным. Если же  $f = 0$ , то  $P = 0$ , и событие является невозможным. Теоретически частоты и вероятность сколь угодно мало могут отличаться от нуля или единицы, но практически результаты округляются. Например,  $P = 0,999$  округляется до  $P = 1$ , а  $P = 0,001$  — до  $P = 0$ . Поэтому, как указывалось выше, «граница» между случайными и неслучайными событиями весьма условна. Очень частые случайные события на практике могут быть приняты за достоверные, а очень редкие — за невозможные события. Таким образом, вероятность как мера возможности появления события характеризует количественно и случайные, и неслучайные события. Согласно терминологии, рекомендованной к использованию в научной литературе Комитетом научно-технической терминологии, вероятность — это «положительное число, не превышающее единицу, представляющее собой количественную меру возможности появления случайного события в повторяющихся от опыта к опыту основных условиях... Она определяет среднюю частоту, с которой можно ожидать появления случайного события в длинных сериях независимых испытаний\*\*».

### 1.1.3. Геометрическое определение вероятности

Каждому числу может быть однозначно сопоставлен отрезок прямой линии, часть плоскости или некоторый объем — рис. 1.3 (вместо квадратиков можно было бы взять любые другие фигуры, а вместо кубов — другие тела, лишь бы площади (или объемы) соотносились пропорционально числам). Пусть теперь имеется некоторая вероятность  $P$ , выражаемая через среднюю частоту:  $P = \frac{f}{n}$ , где  $f$  и  $n$  — какие-то числа, например  $f=1$ ,  $n=2$ . Тогда, согласно рис. 1.3, сопоставляя этим числам какие-либо геометрические фигуры, мы можем выразить нашу вероятность как отношение двух площадей плоских фигур ( $S_1$  и  $S_2$ ), либо как отношение двух длин отрезков ( $L_1$  и  $L_2$ ), либо как отношение двух объемов

\*Вопрос о точности таких оценок рассматривается в главе 6.

\*\*Надежность технических систем и изделий. Основные понятия. Терминология. Вып. 67а. М., 1965. С. 22.



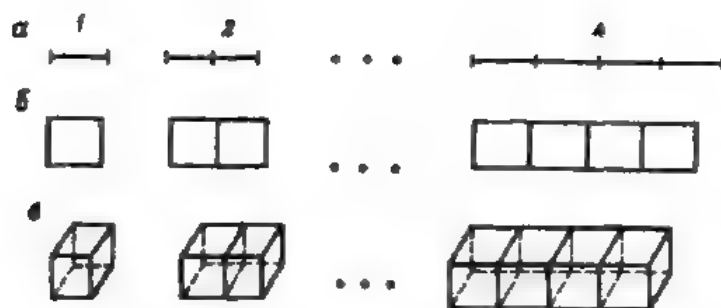


Рис. 1.3. Сопоставление числам геометрических фигур: отрезков (а), плоскостей (б), объемов (в).

некоторых тел ( $V_1$  и  $V_2$ ), т. е. как отношение, имеющее заданную величину  $1/2$ . Если отношение имеет другую величину, то мы соответствующим образом выбираем длины, площади, объемы. Итак, геометрически вероятность представляет собой отношение длин, площадей и объемов (в общем случае — гиперобъемов)\*. Геометрическая интерпретация вероятности позволяет наглядно изображать вероятностные соотношения между событиями (чем всегда пользуются) и облегчает решение некоторых практических задач.

**Пример 1.3.** Одной из важных задач человека-оператора является контроль за показаниями приборов, предполагающий опознавание цифр и условных знаков на лицевых частях приборов. Пусть произошло отклонение одного из контролируемых параметров, что выразилось в изменении показаний соответствующего прибора, расположенного на приборной панели перед оператором. Допустим, что человек в 100% случаев правильно опознает изменение показаний прибора, если он смотрит на этот прибор. Тогда возникает вопрос, какова вероятность события А, состоящего в том, что человек-оператор посмотрит на прибор, расположенный среди других на приборной панели?

Эту вероятность можно определить геометрически как отношение площади, занимаемой прибором, к общей площади панели. Однако приборы разных типов имеют разную площадь лицевой части. Кроме того, известно, что человек правильно опознает объекты, попадающие в определенную область поля зрения, площадь которой больше площади лицевой части обычного стрелочного прибора. Поэтому определим искомую вероятность как от-

\*Абергауз Г.Г., Троць А.П., Коженни Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчетам. М., 1970. С. 28.

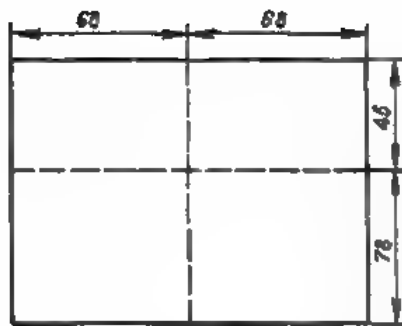


Рис. 1.4. Оптимальные угловые размеры приборной панели, град. (по: Пахомов, Измайльцев, 1963).

ношение площади области поля зрения, соответствующей 100%-му опознанию, к площади приборной панели.

Экспериментально установлено, что область поля зрения человека, соответствующая 100%-му опознанию объектов, находящихся в этой области, простирается в любом направлении от центра фиксации глаз на 10 град\*, т. е. эту область можно по форме считать плоским кругом с площадью  $S_1 = \pi R^2$ , где  $\pi = 3,14$  и  $R \approx 10$  град. Следовательно,  $S_1 \approx 314$  град. Далее экспериментально показано, что существуют оптимальные (с точки зрения контроля) размеры приборной панели (рис. 1.4)\*\* . Обозначим площадь панели  $S$ , тогда (по рис. 1.4) эта площадь составляет:  $S_2 = 2 \cdot 68 (78 + 45) = 16728$  град\*\*\*. Полагая, что зрение оператора одинаково часто фиксирует любую часть площади приборной панели, вычислим интересующую нас вероятность события А (состоящего в том, что человек-оператор посмотрит на прибор, расположенный на панели) как отношение площади области 100%-го опознания к площади приборной панели:

$$P(A) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{314}{16728} \approx 0,019.$$

\*Гипсирейтер Ю.Б. Опыт экспериментального исследования работы зрительной системы наблюдателя // Инженерная психология/ Под ред. А. Н. Леонтьева. М., 1964. С. 223.

\*\*Пахомов А.Ф., Измайльцев А.М. Экспериментальные исследования по рациональному размещению индикаторных устройств в поле зрения оператора // Проблемы общей и промышленной психологии/Под ред. В.Г. Апаньева и В.Ф. Ломова. Л., 1963. — Перевод линейных размеров, приведенных этими авторами, в угловые осуществлялся нами по формуле  $\alpha = \frac{d}{0,0033 \cdot d^2}$ , где  $d$  — линейные размеры сторон панели, мм;  $d$  — дистанция наблюдения, мм;  $\alpha$  — угловые размеры, град. Результаты нами округлены (с недостатком) до целых.

\*\*\*Размеры площадей  $S_1$  и  $S_2$  при определенной дистанции наблюдения можно вычислить по формуле  $S_1^2 = S_2 \cdot 0,00039d^2$ , где  $d$  — дистанция наблюдения; при этом наименование «градус в квадрате» опускается.

## 1.2. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

### 1.2.1. Понятие о системе событий

Системой событий будем называть совокупность событий, рассматриваемых вместе. События в системе приобретают свойства, которых они, если их рассматривать по отдельности, не имеют. Так, события в системе могут происходить совместно или не совместно. Они могут зависеть друг от друга. Одно событие может быть представлено в виде определенной группы других событий. События в системе могут быть по-разному упорядочены в некотором пространстве. Все эти свойства имеют важное значение для практики.

### 1.2.2. Совместное появление событий

Все события в некоторой системе событий можно разделить на две группы в зависимости от того, могут они или не могут появляться вместе в одном испытании. Одну группу составляют события, которые никогда не могут появиться вместе в одном и том же испытании. Если появляется одно из них, то все другие уже исключены. Такие события называются *несовместными* (несовместимыми). Другую группу образуют события, которые могут появиться вместе в одном и том же испытании, но могут и не появиться вместе. Такие события будем называть *совместными* (совместимыми). Совместные события, рассматриваемые по отдельности, целесообразно называть *изолированными* (отделенными), а рассматриваемые вместе — *совмещенными*.

**Пример 1.4.** Опыт состоит в проверке восприятия испытуемым знаков, предъявляемых тахистоскопически. Условия опыта подразделяются на три группы: условия, характеризующие испытуемого; условия, характеризующие аппаратуру и процедуру опыта; условия, характеризующие предъявляемые знаки. Например, условия, характеризующие знаки, — это количество знаков в алфавите, угловые размеры, вид и степень контраста контура знака с фоном, наличие характерных деталей, степень соответствия абриса знака изображаемому объекту и т. д. В качестве основных условий в конкретном исследовании выбираются любые комбинации возможных условий. Испытанием является предъявление одного знака и возможные ответы испытуемого, которые образуют исходы опыта.

В данном примере можно выделить следующие исходы: первый — испытуемый правильно называет (или записывает) предъявляемый знак, второй — испытуемый неправильно называет его,

третий — испытуемый по каким-либо причинам не дает ответа. При необходимости можно детализировать второй исход. В частности, испытуемый может: а) неправильно принять предъявляемый знак за другой знак из того же алфавита, например, предъявляется цифра «7», а испытуемый называет цифру «1»; б) неправильно принять предъявляемый знак за другой знак из иного алфавита, например, предъявлялась цифра «5», а испытуемый в ответ назвал букву «Б». Возможна и дальнейшая детализация каждого из новых исходов второго исхода. Неправильно называемые знаки обычно имеют сходство с предъявляемыми. Если можно точно условиться о том, в чем это сходство состоит, то все неправильно называемые знаки можно разделить на группы по степени сходства с предъявляемым знаком, например на две — сходных и несходных. Таким образом, второй исход детализируется по крайней мере на четыре новых исхода. Перечисленные исходы изображены на рис. 1.5 в виде дерева (или графа) событий.

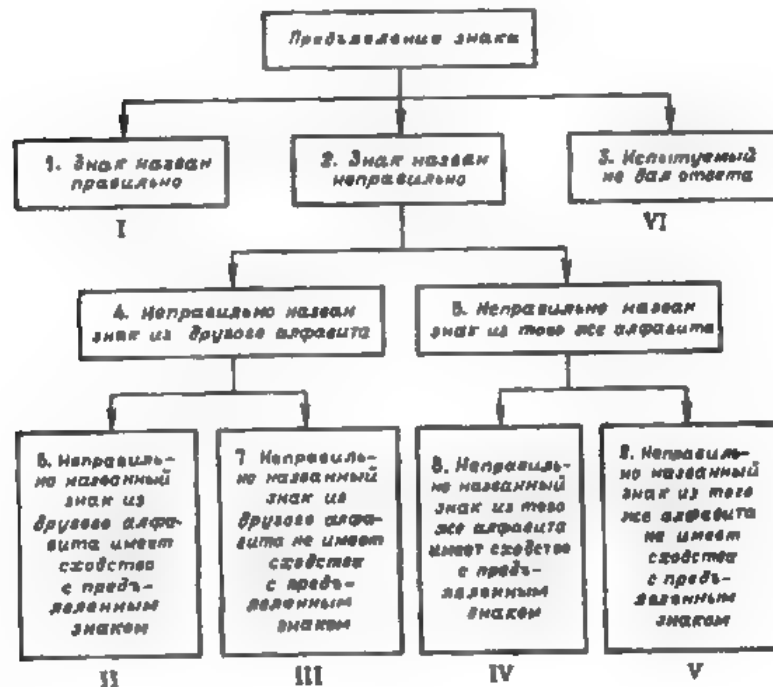


Рис. 1.5. Дерево событий (арабские цифры) и исходов (римские цифры) к примеру 1.4.

Все исходы опыта в примере 1.4 — это события несовместные. Действительно, если знак назван правильно (исход 1), то остальные исходы невозможны уже в данном испытании. А вот события 2, 4, 6 — это совместные события. Потому что если назван знак из другого алфавита, то он назван неправильно. При этом ничто не мешает неправильно названному знаку иметь большое сходство с предъявленным. Мало того, именно большое сходство со знаком из другого алфавита может явиться одной из причин неправильного называния предъявленного знака. Точно так же совместны следующие тройки событий: 2, 4, 7, 2, 5, 8 и 2, 5, 9.

Система несовместных событий, представляющих собой исходы опыта, называется *полной группой событий*. Поскольку количество исходов, выделяемых в опыте, зависит от обстоятельств, понятие полной группы событий условно. В общем случае число исходов может быть бесконечно велико, как мы покажем в следующей главе. Только в немногих частных случаях имеется небольшое количество заранее известных исходов, образующих полную группу событий. Например, при бросании монеты — два, при бросании игральной кости — шесть, при назывании первой пришедшей на ум арабской цифры — десять, а при назывании русской буквы — тридцать три. Несмотря на условность, понятие полной группы событий очень важно для правильного вычисления вероятностей, поэтому рекомендуется по возможности заранее перечислить все несовместимые события, образующие полную группу

### 1.1.1. Зависимость между событиями

Появление одних событий в системе может оказывать влияние на возможность появления других событий в той же или в другой системе. События называются *зависимыми*, если появление одного из них влияет на возможность появления другого. Если появление одного события не влияет на возможность появления другого события, то эти события называют *независимыми*. Зависимость между событиями в системах может быть обоюдная или односторонняя, парная или множественная. Чаще всего в теории вероятностей рассматривается обоюдная зависимость между событиями, при этом считается, что если событие А зависит от события В, то и событие В зависит от А. В этом смысле, например, несовместные события — всегда зависимые события, так как, по определению, появление одного из них делает невозможным появление всех других. Но существует и односторонняя зависимость, например между «видовыми» и «родовыми» событиями: если идет дождь (событие В), то на небе обязательно есть облака (событие А) — событие В зависит от события А; но не наоборот.

так как если на небе облака, то дождь может и не идти. Облака и дождь — события совместные и зависимые. Но совместные события могут быть как зависимыми, так и независимыми. Например, движения двух автомашин по улицам города — чаще всего события независимые, но машины могут столкнуться на перекрестке, а одновременные появления двух машин в одном месте перекрестка — события совместные.

Зависимость между совместными событиями может быть не непосредственной, а опосредствованной некоторым явлением, выступающим в качестве их общей причины. Анализ таких причин, как и вообще содержательный анализ явлений, находится вне компетенции статистики. Статистика формализует причинно-следственные отношения между природными явлениями, лишь констатируя факты влияния одних событий на возможность появления других, а содержательная интерпретация этих фактов — задача специальных научных дисциплин

### 1.1.4. Преобразования событий

С помощью преобразований событий (систем событий), т. е. замены одних другими по определенным правилам, выявляются и фиксируются *отношения* между событиями, события *усложняются* либо *упрощаются*. Важнейшие отношения между событиями — это отрицание, импликация, тождество, различие или сходство, простота или сложность событий

*Отрицание* (дополнение) события  $A$  — это все другие события, совокупность которых обозначается  $\bar{A}$  и читается «не  $A$ » (рис. 1.6, а). Например, если  $A$  — событие, состоящее в том, что испытуемыми должны быть трудоспособные мужчины, то его отрицание  $\bar{A}$  — это любые другие возможные испытуемые. События  $A$  и  $\bar{A}$  противоположны по смыслу отображаемых реалий и поэтому называются *противоположными* событиями; они образуют *элементарную полную группу* событий как несовместные и зависимые: по закону исключенного третьего классической логики появление одного из них в ходе опыта должно однозначно обуславливать появление другого («либо  $A$ , либо не  $A$ »). На практике многие свойства изучаемых явлений и сущностей континуальны, поэтому от исследователя требуется осторожность, четкость в содержательной интерпретации противоположных событий.

*Импликация* двух событий ( $A$ ,  $B$ ) может означать причинно-следственное отношение, логическое либо временное следование, отношение целого и части. Эти отношения обозначаются четырьмя равносильными способами:  $A \rightarrow B$ ,  $B \leftarrow A$ ,  $A \supset B$ ,  $B \subset A$  и

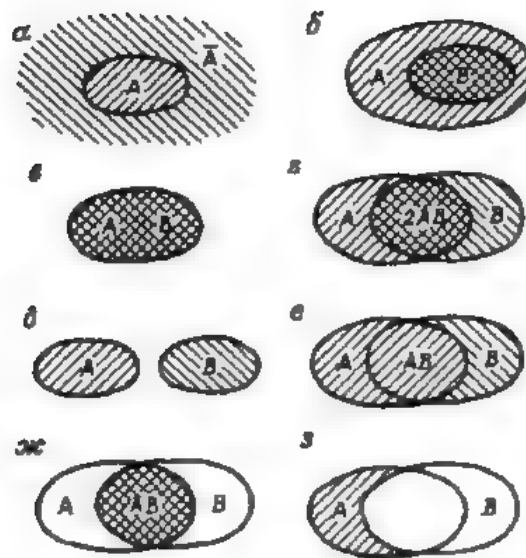


Рис. 1.6. Преобразования событий (графическая интерпретация на диаграммах Венна).

а — утверждение и его отрицание, б — импликация, в — тождество, г — обобщение, д — прямая сумма, е — объединение, ж — пересечение, з — логическая разность

читаются «из  $A$  следует  $B$ », « $B$  после  $A$ », « $A$  включает в себя  $B$ » и т. п. (рис. 1.6, б). Например, привлечение мужчин в качестве испытуемых (событие  $A$ ) влечет за собой привлечение трудоспособных мужчин (событие  $B \subset A$ ) наряду с мальчиками и стариками (событие  $\bar{B} \subset A$ ).

**Тождество** событий  $A, B$  определяется как их взаимовключенность: если  $A \supset B$  и одновременно  $B \supset A$ , то события **тождественны** (равны, равносильны, эквивалентны); это обозначается пятью способами:  $A \equiv B$ ,  $A = B$ ,  $A \rightleftharpoons B$ ,  $A \sim B$ ,  $A \Leftrightarrow B$  и читается соответственно: « $A$  тождественно  $B$ », « $A$  равно (равносильно)  $B$ », « $A$  эквивалентно  $B$ » ( $\rightleftharpoons$ ,  $\sim$  и  $\Leftrightarrow$  — символы эквивалентности) — рис. 1.6, в. При содержательной интерпретации тождеству событий соответствуют синонимии и тавтологии. Например, эквивалентны события, интерпретируемые применительно к конкретной личности как тревожность, нейротизм, высокая вероятность ложных тревог.

**Различие или сходство** событий определяется степенью их отличия от тождества; при малом отличии говорят о сходстве, а при

большом — о различии. Так как объективных критериев отличия малого от большого для континуально интерпретируемых событий не существует, то применяют соглашения типа «на пятипроцентном уровне значимости сходство неслучайно». Для дискретных множеств событий, очевидно, неопределенность отсутствует, потому что мерой различия-сходства может служить относительное число одинаковых признаков у сравниваемых событий. Например, если как события интерпретируются предъявляемые на короткое время тахистоскопически буквы В, И, Н, состоящие из одинакового числа элементов, то у И и Н одинаковы 2/3 элементов, а у Н и В, И и В — всего лишь 1/3 элементов, т. е. в первом случае больше сходства, а во втором — различия. Поэтому испытуемые в экспериментах чаще путают И и Н между собой, чем с В.

*Простота или сложность* событий определяется количеством символов, обозначающих события, а не особенностями их содержательной интерпретации, которая сама по себе может быть простой либо сложной. В примерах 1.1 и 1.4 мы видели, что одно событие может быть детализировано на два и более событий. События, которые с помощью определенных операций могут быть представлены в виде комбинации других событий, называются *сложными* событиями. Те события, из комбинации которых образовано сложное событие, называются *простыми* событиями. Простые события, выбранные в качестве исходных элементов для построения систем сложных событий, называются *элементарными* событиями. Простота и сложность соотносительны: чаще всего простые события можно детализировать на еще более простые, а сложные — использовать для конструирования более сложных событий. Где остановиться в этом упрощении и усложнении событий, зависит от цели исследования, от желаемой полноты описания изучаемых объектов, от количества испытаний, в которых можно наблюдать события, и от многих других обстоятельств.

Формальные операции, посредством которых усложняются, упрощаются и эквивалентно записываются события (системы событий), разнообразны. Необходимый для психологической практики набор операций составляют: совмещение, обусловливание, обобщение, суммирование (простое, прямое, логическое) и развертывание — как операции усложнения, синтеза событий; свертывание, логическое умножение и вычитание — как операции упрощения, анализа событий, наконец, перестраивание и в том числе перестановка рядов и транспонирование — как операции эквивалентной записи, изменяющие пространственную структуру, но сохраняющие состав сложных событий и систем событий.

*Совмещение* применяется к изолированным совместным собы-



тиям, системам событий для синтеза из них совмещенных событий и систем. Если  $A, B$  — изолированные совместимые события, то их совмещение  $A \times B = AB$  — *совмещенное событие*\*. Например, если  $A$  означает мужчину,  $B$  — высокий рост, то  $AB$  — мужчины высокого роста. Если  $(\bar{A}, A), (\bar{B}, B)$  — изолированные, но совместимые системы (полные группы) событий, то их совмещение  $(\bar{A}, A) \times (\bar{B}, B) = (\bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}, AB)$  — это новая полная группа совмещенных событий, совмещенная система событий. Например, если  $\bar{A}$  — интроверсия,  $A$  — экстраверсия,  $\bar{B}$  — низкий,  $B$  — высокий нейротизм по Г. Айзенку, то  $\bar{A}\bar{B}$  следует интерпретировать как малотревожных интровертов,  $\bar{A}B$  — как интровертов-нейротиков,  $A\bar{B}$  — как малотревожных экстравертов и  $AB$  — как экстравертов-нейротиков.

Обусловливание применяется для синтеза условных событий, систем событий из безусловных событий и систем. События, системы можно изучать без выделения или с выделением особых условий. При этом говорят о безусловных либо условных событиях, системах. Выделение определенного условия — тоже событие, причем совместимое с обуславливаемым событием. Поэтому в любой паре совместимых событий  $A, B$  можно предполагать взаимное обуславливание и определять два условных события:  $A \propto B = A/B$  и  $B \propto A = B/A$ , которые читаются: « $A$  при условии  $B$ » и « $B$  при условии  $A$ »\*\*. Интерпретация условных событий при определенном навыке не затруднительна: если  $A$  — мужской пол,  $B$  — высокий рост, то  $A/B$  означает лиц мужского пола из числа высокорослых, а  $B/A$  — высокорослых из числа лиц мужского пола, причем для зависимых событий эти числа разные. Пусть  $(\bar{A}, A), (\bar{B}, B)$  — две системы событий, интерпретируемые по Г. Айзенку. Из этих безусловных систем можно взаимным обуславливанием получить четыре условные системы (системы условных событий).  $(\bar{A}, A) \propto (\bar{B}, B) = [(\bar{A}, A)/\bar{B}, (\bar{A}, A)/B] = [(\bar{A}/\bar{B}, A/\bar{B}), (\bar{A}/B, A/B)]$ , а также  $(\bar{B}, B) \propto (\bar{A}, A) = [(\bar{B}, B)/\bar{A}, (\bar{B}, B)/A] = [(\bar{B}/\bar{A}, B/\bar{A}), (\bar{B}/A, B/A)]$ . Интерпретировать первые две из них следует как возможную обусловленность интро—экстравертированности людей низким либо высоким нейротизмом. Интерпретировать две остальные системы предлагается читателю. Надо отметить, что при обуславливании нескольких совместимых событий количество воз-

\*Операция основана на декартовом умножении множеств (см. Приложение 1), поэтому результат совмещения  $AB$  — это декартово произведение элементов  $A, B$ .

\*\*Обусловливание основывается на декартовом делении — операции, обратной декартову умножению (см. Приложение 1).

можных условных событий быстро увеличивается. Например, для трех событий (A, B, C) обусловливанием можно получить не только шесть простых условных событий — по два для каждой пары совместных событий: A/B, B/A, A/C, C/A, B/C, C/B, но и шесть сложных: A/BC, B/AC, C/AB, AB/C, AC/B, BC/A. Учитывая многомерность психологических объектов, читателю полезно самостоятельно рассмотреть возможные результаты совмещений и обусловливаний для четырех и более событий — A, B, C, D, A, B, C, D, E и т. д.

Обобщение\* позволяет определять частоты тождественных событий и эмпирические распределения частот в системах событий, наблюдаемых от опыта к опыту. Например, если при первом и втором наблюдениях произошло событие A, т. е. получены (A), (A), то, обобщая их, имеем

$$(A)0(A) = (A) + (A) = (A, A) = (2A). \quad (1.3)$$

Для конечного числа n таких наблюдений можем записать

$$\bigcup_{i=1}^n (A)_i = \underbrace{A0A0 \dots 0A}_n = (nA),$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  — номера наблюдений,  $(nA)$  — элементарное мультимножество\*\* в свернутом виде, n — кратность, интерпретируемая как частота события A (рис. 1.6, 2). Конкретный пример. Четырем студентам предложено решить задачи A, B, C. Первый студент смог решить задачи A и C, второй — A и B, третий — лишь задачу A, четвертый — B. Здесь имеется четыре множества решенных задач: (A, C), (A, B), (A), (B), обобщая которые, получаем мультимножество, интерпретируемое как распределение частот решенных задач.

$$(A, C)0(A, B)0(A)0(B) = (3A, 2B, C).$$

Заметим, что частота, равная единице, в данном случае не пишется, но она пишется при обычной группировке событий (табл. 1.1). Еще пример. Обследованы три группы людей: первая — трое мужчин, две женщины трудоспособного возраста и один ребенок;

\*Эта операция, предложенная нами, впервые представлена в книге: Методология исследований по психологии труда и инженерной психологии/ Под ред. А. А. Крылова. Ч. I. Л., 1974. С. 60

\*\*Мультимножество — это множество, которое в явном виде содержит тождественные элементы. Обычное множество лее тождественных элементов — частный случай мультимножества. Мультимножества приводятся в книге: Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Дев Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика/ Пер. с англ. М., 1980. С. 72. — Заметим, что синтезировать мультимножество из обычных множеств можно только операцией «обобщение»

вторая — три женщины, три ребенка и один старик; третья — трое мужчин и два старика. Записывая и обобщая соответствующие мультимножества, получаем общее распределение частот обследованных людей:  $(3м, 2ж, р) \cup (3ж, 3р, с) \cup (3м, 2с) = (6м, 5ж, 4р, 3с)$ . Частными случаями обобщения, связанными с определенными ограничениями, являются простое, прямое и логическое суммирование.

*Простое суммирование* применяется лишь к тождественным по элементам множествам событий; при этом суммируются частоты, кратности тождественных событий. Элементарный пример продемонстрировала формула (1.3). Другой пример. В психологическую консультацию в первый день обратились трое мужчин и две женщины, а во второй — двое мужчин и пять женщин. Записывая в обозначениях и суммируя мультимножества, получаем общее распределение мужчин и женщин, обратившихся за помощью к психологу:  $(3м, 2ж) + (2м, 5ж) = (5м, 7ж)$ .

*Прямое суммирование* применяется к множествам и мультимножествам, не имеющим тождественных элементов (рис. 1.6, д). Например, если сначала психологом обследовались трое мужчин и две женщины трудоспособного возраста, а потом — еще четыре школьника и пять пенсионеров, то всего обследовано  $(3м, 2ж) \oplus (4ш, 5п) = (3м, 2ж, 4ш, 5п)$ , т. е. 14 человек.

*Логическое суммирование* (объединение, дизъюнкция) применяется только к обычным, не имеющим тождественных элементов, множествам, сумму здесь образуют лишь различные события из имеющихся в слагаемых (рис. 1.6, е). Вместо формулы (1.3) применяется формула

$$(A) \cup (A) = (A).$$

и из мультимножеств предыдущих примеров получаются обычные множества, так как частота событий не отражается:  $(3м, 2ж) \cup (2м, 5ж) = (м, ж)$ ;  $(3м, 2ж) \cup (4ш, 5п) = (м, ж, ш, п)$ . По этой причине объединение в приложениях теории вероятностей фактически используется лишь для выявления номенклатуры, т. е. полного (применительно к определенной цели) перечня событий. Например, объединяя результаты решения задач четырьмя студентами из табл. 1.1, получаем номенклатуру предъявленных задач:  $(A, C) \cup (A, B) \cup (A) \cup (B) = (A, B, C)$ .

*Развертывание* применяется для детализации, уточнения знаний, конкретизации понятий, их признаков и связанных с ними событий. При этом исходные события заменяются полными группами более конкретных событий. Пусть, например,  $\Pi$  — множество признаков пола людей. Привычно выделять в нем два противоположных пола — мужской и женский, т. е.  $\Pi \rightarrow (м, ж) = (м, \bar{м}) = (ж, ж)$ . Однако биологически существуют гермафродиты.

Таблица 1.1

Обычная группировка событий с подсчетом частот

Задачи					Частота решений
предложены	решены студентами				
	I	II	III	IV	
A	1	1	1		3
B		1		1	2
C	1				1

диты, а в психологии изучается континуум «мужественность — женственность», квантуя который определенным образом, можно получить конечное множество градаций, в частности, высокая, низкая мужественность, низкая, высокая женственность. Обозначив эти градации аббревиатурами из первых букв, можно последовательно развернуть:  $\Pi = (м, ж) \rightarrow (вм, нм, нж, вж)$ . Очевидно, развертывание здесь можно было бы продолжить. Покажем это на рассмотренном выше примере 1.4, где выделялись исходы опыта с восприятием знаков

Первоначально среди исходов опыта выделяются два:  $\Pi \rightarrow (o, \bar{o})$  — испытуемый не отвечает либо отвечает; это первая развертка, т. е. результат развертывания. Отвечая, испытуемый может давать верный ответ либо неверный ответ; соответственно этому выполняется второе развертывание:  $o \rightarrow (во, \bar{во})$ ; подставляя вторую развертку в первую, получаем:  $\Pi \rightarrow (\bar{o}, во, \bar{во})$ . Далее, как было показано на рис. 1.5, исходами неверного ответа могут быть знаки того же алфавита, что предъявлялся, либо не того, другого алфавита. Поэтому выполняется третье развертывание:  $\bar{во} \rightarrow (\bar{во}т, \bar{во}\bar{т})$ ; подставляя этот результат в предыдущий, получаем:  $\Pi \rightarrow (\bar{o}, o) \rightarrow (\bar{o}, во, \bar{во}) \rightarrow (\bar{o}, во, \bar{во}т, \bar{во}\bar{т})$ . Но неверный ответ может быть обусловлен определенным *сходством* или *несходством* неверно воспринятого знака с предъявленным. Следовательно, необходимо четвертое развертывание:  $(\bar{во}т, \bar{во}\bar{т}) \rightarrow [\bar{во}т \rightarrow (\bar{во}тс, \bar{во}т\bar{с})] \cup [\bar{во}\bar{т} \rightarrow (\bar{во}\bar{т}с, \bar{во}\bar{т}\bar{с})] = (\bar{во}тс, \bar{во}т\bar{с}, \bar{во}\bar{т}с, \bar{во}\bar{т}\bar{с})$ , в результате которого каждый исходный элемент развернут на два более конкретных. Подставляя четвертую развертку в предыдущую, окончательно получаем шесть выделенных в примере 1.4 исходов:  $\Pi \rightarrow (\bar{o}, o) \rightarrow (\bar{o}, во, \bar{во}) \rightarrow (\bar{o}, во, \bar{во}т, \bar{во}\bar{т}) \rightarrow (\bar{o}, во, \bar{во}тс, \bar{во}т\bar{с}, \bar{во}\bar{т}с, \bar{во}\bar{т}\bar{с})$ .

*Свертывание* применяется для сокращения описаний; его ре-

зультат — свертка — имеет смысл имени, кратко обозначающего первоначально развернутое описание. Так, например, говоря о мужественности или женственности, о женщинах либо мужчинах, мы имеем в виду *половой диморфизм*, или, еще короче, пол человека. Очевидно, что свертывание противоположно развертыванию, но в общем они не являются взаимно обратимыми операциями: развертывание моделирует элементы процесса углубляющегося и расширяющегося познания, а свертывание — процессы экономизации описаний путем называния, ведь имя представляет собой краткое и обычно абстрактное обозначение предмета из определенного класса предметов. Но если однозначно зафиксировать каждую пару сверток и разверток в качестве равносильных событий, систем событий, то свертывание и развертывание становятся взаимно обратимыми операциями. Так, из предыдущего можно развернуть исходные понятия: «пусть исходами опыта будут *ответ* либо *неответ* испытуемого», т.е.  $I \rightarrow (o, \bar{o})$ ; но можно, наоборот, свернуть: «обозначим *ответ* либо *отсутствие ответа* как исходы опыта», т.е.  $(o, \bar{o}) \rightarrow I$ . Если теперь объединить попарно тождественные элементы развертки и свертки:  $\{(I \cup I), (\rightarrow \cup \leftarrow), [(o, \bar{o}) \cup (o, \bar{o})]\} = I \rightleftharpoons (o, \bar{o})$ , то окончательно получим эквивалентность обозначения  $I$  и обозначаемого  $(o, \bar{o})$ , причем стрелками указаны направления развертывания и свертывания. Заменяя стрелки на знак равенства, маскируем когнитивную противоположность развертывания и свертывания, но получаем два общеизвестных взаимно перестановочных способа записи:  $I = (o, \bar{o})$  и  $(o, \bar{o}) = I$ .

*Логическое умножение* (конъюнкция, пересечение) применяется для выделения общей части событий из конечного числа обычных множеств событий (рис. 1.6, ж). Например, общей задачей, решенной первым и вторым студентами (табл. 1.1), является  $(A, C) \cap (A, B) = A$ . Если в сомножителях нет общих элементов, то пересечением будет пустое множество:  $(A) \cap (B) = \emptyset$ , оно и означает отсутствие общих элементов. Заметим, что, применяя конъюнкцию к мультимножествам, мы теряем кратности и получаем обычное множество — общую часть номенклатур сомножителей (если она есть):  $(3м, 2ж) \cap (2м, 5ж) = (м, ж)$ , как и при объединении; но  $(3м, 2ж) \cap (4ш, 5п) = \emptyset$ .

*Вычитание* применяется для выделения определенной части из множества событий и может рассматриваться как операция, обратная обобщению, простому, прямому и логическому суммированию. Например, вычитая из обобщенного распределения решенных студентами задач подмножество задач, решенных первым студентом (табл. 1.1), получаем распределение задач, решенных только остальными студентами:  $(3A, 2B, C) - (A, C) = (2A, 2B)$ .

Аналогично, вычитая из простой суммы проконсультированных за два дня лиц, консультировавшихся во второй день, получаем распределение проконсультированных в первый день:  $(5м, 7ж) - (2м, 5ж) = (3м, 2ж)$ . Подобно и с прямой суммой, в частности:  $(3м, 2ж, 4ш, 5п) - (4ш, 5п) = (3м, 2ж)$ . Так же, в сущности, вычитаются и обычные множества, причем *логическая разность*  $A - B$  интерпретируется как запрет: « $B$  запрещает  $A$ » (рис. 1.6, э)

*Перестраивания* используются для удобства сопоставления и сравнения, синтеза и анализа сложных событий, систем событий. Среди перестраиваний наиболее известны *перестановка рядов* и *транспонирование*. Перестановкой рядов единообразно упорядочиваются номенклатуры простых событий в сложных событиях, сложных событий в системах событий. Например, перечень испытуемых перестановкой рядов можно упорядочить по алфавиту:  $(C, E, A, D, B) \Leftrightarrow (A, B, C, D, E)$  или сгруппировать компактно женщин отдельно от мужчин:  $(м, ж, м, ж, м) = (ж, ж; м, м, м)$ . Аналогично можно элементы мультимножества упорядочить по убыванию либо возрастанию кратностей (см. 1.3 2, рис. 1.8). С помощью транспонирования строки записываются как столбцы, а столбцы — как строки; например, если  $A = (B, C)$ , то *транспонированное*  $A^T = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ , причем  $(A^T)^T = A$ . Заметим, что строчная запись системы событий экономит место, поэтому преобразования событий стараются по возможности записывать в строку:  $A \times B = (\bar{A}, A) \times (\bar{B}, B) = (\bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}, AB)$ . Но при большом числе событий или систем-сомножителей совмещаемые события трудно удержать в памяти, не пропустив и не перепутав. Поэтому используется запись в виде матрицы, строки и столбцы которой помечены обозначениями совмещаемых событий

$$A^T \times B = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{B} & B \end{pmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & \bar{B} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{A} \\ A \end{matrix} & \begin{pmatrix} \bar{A}\bar{B} & \bar{A}B \\ A\bar{B} & AB \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (1.4)$$

причем пометки строк соответствуют событиям первого, а пометки столбцов — второго сомножителя. Хотя совмещение перестановочно, будем придерживаться последовательностей пометок в (1.4), так как с увеличением *мерности* совмещенных систем количество эквивалентных вариантов их матричной записи быстро увеличивается. Уже из трех групп противоположных событий различными перестраиваниями можно получить 120 эквивалентных

матриц совмещенных событий. Вот две из них:

$$\begin{aligned}
 ABC &= \begin{matrix} & \bar{B} & B & & \bar{B} & B \\ \bar{A} & \left( \begin{array}{cc|cc} \bar{A}\bar{B}\bar{C} & \bar{A}\bar{B}C & \bar{A}\bar{B}\bar{C} & \bar{A}\bar{B}C \end{array} \right) \\ A & \left( \begin{array}{cc|cc} \bar{A}B\bar{C} & \bar{A}BC & \bar{A}B\bar{C} & \bar{A}BC \end{array} \right) \end{matrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{matrix} & \bar{C} & C & \\ \bar{B} & \left( \begin{array}{cc|cc} \bar{B}\bar{C}\bar{A} & \bar{B}\bar{C}A & \bar{B}\bar{C}\bar{A} & \bar{B}\bar{C}A \end{array} \right) \\ B & \left( \begin{array}{cc|cc} \bar{B}C\bar{A} & \bar{B}CA & \bar{B}C\bar{A} & \bar{B}CA \end{array} \right) \end{matrix} = BAC. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Это трехмерные матрицы: кроме строк и столбцов в них имеются *блоки* столбцов, для удобства восприятия и понимания разделенные пунктиром. Эти блоки обозначены в (1.5) событиями из группы  $C = (\bar{C}, C)$ . В случае четырехмерной матрицы понадобились бы еще блоки строк, пятимерной — блоки столбцов либо строк и т. д.

Заканчивая, нужно отметить, что рассмотренные преобразования в совокупности не исчерпывают способов анализа и синтеза событий, но позволяют, смотря по обстоятельствам, облегчить подготовку исследования, сбор, обработку и анализ статистических данных, упростить вычисление вероятностей сложных событий, получение и применение эмпирических распределений вероятностей событий и величин.

### 1.1. Уровни количественного определения событий

Под количественным определением (квантификацией) события будем понимать его замену числами. Целью такой замены является возможность оперировать числами вместо того, чтобы действовать с реальными вещами. Но операции с числами должны адекватно отображать действия с вещами и обосновываться известными нам свойствами самих вещей, иначе получатся фиктивные результаты.

Упрощенно подходя к задаче количественного определения некоторого реального явления, выделяют два традиционных уровня: уровень «словесного» качественного описания (события), уровень измерения (величины и функции). Но величины и функции тоже могут быть представлены как события. Поэтому здесь мы дадим

\*Вопрос о количественном определении событий — специальный вопрос, выходящий за пределы нашей темы. Однако возможность применения конкретных статистических мер и методов зависит от уровня количественного определения изучаемых объектов. Поэтому мы коснемся этого вопроса.



несколько иную интерпретацию уровней количественного определения применительно к событиям.

Первый уровень количественного определения события — это его словесное описание, в котором указаны общие и специфические свойства, характеризующие данное событие, но ничего не говорится (потому что обычно ничего не известно) о степени выраженности этих свойств. События, определенные на таком уровне, будем называть *классифицированными событиями*. Типичный пример классифицированных событий — классический перечень темпераментов: сангвинический, холерический, флегматический и меланхолический. Или перечень свойств нервной системы. Или алфавитный перечень букв и цифр. И так далее. Большинство психических явлений находится сейчас в психологии на этом уровне определения. Может показаться странным, что мы называем этот уровень уровнем количественного определения. Но это вполне правомерно. Мы можем перенумеровать классифицированные события числами и затем пользоваться этими числами как «именами» событий, что короче, чем длинные словесные описания. Правда, никаких привычных (в смысле обычной алгебры) операций с этими числами производить нельзя. Мы, далее, можем охарактеризовать классифицированные события вероятностными мерами и упорядочить их в соответствии с вероятностями появления. Мы можем, наконец, определять степень зависимости между классифицированными событиями.

Следующий, более высокий уровень количественного определения — это словесное описание события, в котором, кроме выделения общих и особых свойств, характеризующих событие, указана *степень* проявления этих свойств, но не указана (обычно не известна) мера проявления. Так, например, сравнивая визуально длины двух отрезков, мы можем указать, равны ли они, или одна *больше* или *меньше* другой. Но без привлечения общепринятых известных нам мер длины (метров, сантиметров и т. п.) мы не можем сказать, *насколько больше* или *насколько меньше*. Несколько отрезков мы можем *упорядочить по возрастанию* длины: «больше», «еще больше», «гораздо больше» и т. д.; или *по убыванию* длины: «меньше», «еще меньше», «гораздо меньше». Степень выраженности других свойств без указания меры передается словами: «лучше — хуже», «дальше — ближе» и тому подобными прилагательными в сравнительной степени. События, количественно определенные на данном уровне, будем называть *упорядоченными событиями*. Поскольку упорядочение касается одного свойства, система упорядоченных событий образует *ряд* событий. В этом ряду события могут быть перенумерованы числами, величинами которых должны отображать отношения «больше — меньше»,



т. е. ряду событий, упорядоченных по возрастанию, должны сопоставляться числа, также упорядоченные по возрастанию, или наоборот. Эти числа можно суммировать и умножать, но обычно считается, что их нельзя вычитать и делить\*.

Последний из выделяемых нами уровней количественного определения событий — уровень *измерения*\*\* . На этом уровне к словесному описанию предыдущего уровня добавляется указание, насколько больше или насколько меньше выражено конкретное свойство событий. Это указание может быть дано лишь посредством некоторой меры, что предполагает установление единицы измерения данного свойства. События, количественно определенные на данном уровне, будем называть *измеренными событиями*. Этим событиями сопоставляются числа, определяемые в метрических системах измерения, т. е. системе событий сопоставляется система чисел, полученных в результате измерения. Такая система чисел обычно называется *величиной*. Рассуждая в обратном порядке, получаем возможность рассматривать величину как систему событий, каждое из которых — число. Для измеренных событий все операции с числами эквивалентны действиям с самими вещами, которые отображены в событиях.

Все рассмотренное в предыдущих пунктах нашего изложения одинаково применимо к событиям, количественно определенным на любом из указанных уровней. Дальнейшее изложение поведем с учетом различий в этих уровнях.

---

\* Дело в том, что операции вычитания и деления лежат в основе определения метрических мер, а, согласно определению, на уровне упорядоченных событий меры не используются. Однако числа (баллы, ранги), которыми пронумерованы и в которые отображены события (см. рис. 1.13), определены в метрическом пространстве, они суть целочисленные значения точек евклидова пространства, которые можно и вычитать, и делить.

\*\* Термин «измерение» употребляется в широком и в узком смысле. В широком смысле под измерением понимается приписывание чисел вещам в соответствии с установленными правилами (Стивенс С.С. Математика, измерения и психофизика // Экспериментальная психология: В 2 т. Т. 1. М., 1963). В таком смысле классифицирование и упорядочивание событий — разновидности измерения. В узком смысле измерение понимается в метрологии. Здесь под измерением имеют в виду отношение измеряемой величины к величине того же рода, принятой за единицу измерения. Результатом измерения является число, показывающее, во сколько раз измеряемая величина больше (меньше) единицы измерения (Маликов С.Ф., Тюрин Н.И. Введение в метрологию. М., 1965). Мы пользуемся здесь и ниже понятием измерения в узком смысле.

## 1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ КЛАССИФИЦИРОВАННЫХ СОБЫТИЙ

### 1.1. Распределение вероятностей событий

Для безошибочного расчета частот, частостей или вероятностей случайные события необходимо рассматривать в полной группе. Если даже нас интересует случайное событие  $A$ , то обязателен учет его дополнения  $\bar{A}$ , т. е. любых других случайных событий, которые, может быть, нас и не интересуют, но появляются в опыте. Поэтому, интересуясь возможностью появления (непоявления) события  $A$ , изучают как минимум систему противоположных событий  $\mathcal{A} = (\bar{A}, A)$ , которую при надобности разворачивают в более сложную систему, тоже являющуюся полной группой событий.

Пусть имеется система случайных событий, образующая полную группу:

$$\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k) = (A_i),$$

где  $i = 1, 2, \dots, k$  — индекс, определяющий положение события в записи системы. Распределением вероятностей системы  $\mathcal{A}$  будем называть отображение событий этой системы во множество чисел

$$\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_k) = (P_i), \quad (1.6)$$

элементы которого принимают значения из интервала  $(0 \div 1)$  и в сумме равны единице

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad \text{и} \quad P_1 + P_2 + \dots + P_k = \sum_{i=1}^k P_i = 1. \quad (1.7)$$

Назовем множество (1.6) *множеством вероятностей* и обозначим отображение  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{P}$  как  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ . Тогда в общем виде распределение вероятностей записывается перечнем вероятностей, помеченных событиями, к которым вероятности относятся; например,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{A}) &= [P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_k)] = [P(A_i)] = \\ &\quad \begin{matrix} A_1, & A_2, & \dots, & A_k & & A_i \end{matrix} \\ &= (P_1, \quad P_2, \quad \dots, \quad P_k) = (P_i), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $i = 1, 2, \dots, k$  — по-прежнему индексы событий и их вероятностей. Отметим, что в числовом виде распределения частот и частостей удобно записывать как мультимножества, например  $\mathcal{F}(\mathcal{A}) = (20\bar{A}, 80A) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}) = (20\bar{A} \cdot 100, 80A \cdot 100) = (0,2\bar{A}, 0,8A)$ .

Соотношения (1.7) определяют числовые множества как множества вероятностей либо частостей и называются *условиями нормировки распределений*. Эти условия должны проверяться и выполняться на практике с ошибкой не более 1%. Так, например,

распределение вероятностей противоположных событий, по определению:  $\mathcal{P}(A) = (P_{\bar{A}}, P_A)$  и  $P_{\bar{A}} + P_A = 1$ , откуда

$$P_A = 1 - P_{\bar{A}} \quad \text{и} \quad P_{\bar{A}} = 1 - P_A,$$

т.е. вероятность одного из противоположных событий выражается по условию нормировки (1.7) через вероятность другого из этих событий. Пусть в результате наблюдения из десяти случаев трижды появилось событие  $A$ . Тогда его частота — здесь она служит грубой эмпирической оценкой вероятности — составляет  $p_A = 0,3$ , а частота противоположного события составляет  $p_{\bar{A}} = 1 - 0,3 = 0,7$ ; таким образом, получилось распределение частот

$$\mathcal{P}(A) = (\bar{A}, A) = (0,7\bar{A}, 0,3A). \quad (1.9)$$

В соответствии с рассмотренными видами событий различаются безусловные либо условные, изолированные либо совмещенные, общие либо частные распределения, а также распределения характеризующиеся сочетанием перечисленных признаков.

Распределения (1.8) и (1.9) называются безусловными, так как никаких условий не оговаривалось. Но пусть учитывается условие  $B$ , при котором не появляются либо появляются события  $\bar{A}, A$ , так что вместо безусловной системы  $A$  наблюдается условная система  $A/B = (\bar{A}/B, A/B)$ , где  $\bar{A}/B, A/B$  — противоположные, но теперь условные события. Тогда распределение

$$\mathcal{P}(A/B) = (P_{\bar{A}/B}, P_{A/B}) \quad (1.10)$$

называется условным распределением системы  $A$  при условии  $B$ . Но условию  $B$  противоположно его дополнение  $\bar{B}$ , поэтому всегда имеет место система условий  $B = (\bar{B}, B)$ , при которых рассматриваются какие-то системы событий. Так что наряду с (1.10) изучается и условное распределение

$$\mathcal{P}(A/\bar{B}) = (P_{\bar{A}/\bar{B}}, P_{A/\bar{B}}),$$

которое вместе с (1.10) записывается в матрицу условных распределений системы  $A$  при условиях  $B$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A/B) &= [\mathcal{P}(A/\bar{B}); \mathcal{P}(A/B)] = \\ &= (P_{\bar{A}/\bar{B}}, P_{A/\bar{B}}; P_{\bar{A}/B}, P_{A/B}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В записи (1.11) точка с запятой отделяет условные распределения, а запятые отделяют условные вероятности (вероятности условных событий) в составе каждого распределения. Матрицу (1.11) часто удобно записывать, транспонируя условные распределения, разделяя их пунктиром и помечая строки и столбцы обозначениями

событий и условий

$$\mathcal{P}(A/B) = [\mathcal{P}^*(A/B); \mathcal{P}^*(A/B)] = \begin{matrix} & \bar{B} & B \\ \begin{matrix} \bar{A} \\ A \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{\bar{A}/\bar{B}} & P_{\bar{A}/B} \\ P_{A/\bar{B}} & P_{A/B} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (1.12)$$

Совмещенные распределения в отличие от предыдущих характеризуют системы совмещаемых, рассматриваемых вместе, событий. Например, для двух систем противоположных событий получается *двумерное* совместное распределение

$$\mathcal{P}(AB) = \begin{matrix} & \bar{B} & B \\ \bar{A} & \begin{pmatrix} P_{\bar{A}\bar{B}} & P_{\bar{A}B} \\ P_{A\bar{B}} & P_{AB} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (1.13)$$

элементы которого  $P_{ij}$  (где  $i = \bar{A}, A \in \mathcal{A}$  и  $j = \bar{B}, B \in \mathcal{B}$ ) — это *совместные* вероятности (вероятности совмещенных событий), причем выполняется условие *двумерной* нормировки

$$\sum_i \sum_j P_{ij} = \sum_j \sum_i P_{ij} = 1; \quad (1.14)$$

перестановка индексов в (1.14) означает изменение порядка суммирования

Распределение (1.13) называется *общим*, так как, суммируя в нем столбцы (т. е. суммируя «по  $B$ »), получаем *частное безусловное* распределение вероятностей событий в  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = \sum_B \mathcal{P}(AB) = \begin{matrix} \bar{A} \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} P_{\bar{A}\bar{B}} + P_{\bar{A}B} \\ P_{A\bar{B}} + P_{AB} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \bar{A} \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} P_{\bar{A}} \\ P_A \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

а суммируя строки (т. е. суммируя «по  $A$ »), получаем частное безусловное распределение для системы  $B$ :

$$\mathcal{P}(B) = \sum_A \mathcal{P}(AB) = \begin{pmatrix} + P_{\bar{A}\bar{B}} & + P_{\bar{A}B} \\ + P_{A\bar{B}} & + P_{AB} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \bar{B} & B \\ P_{\bar{B}} & P_B \end{matrix}; \quad (1.16)$$

*ориентация* этих распределений зависит от *компоновки* совместного распределения (1.13).

Каждую из одномерных подсистем двумерной системы событий можно интерпретировать в качестве обуславливающей другую подсистему. Поэтому кроме матрицы условных распределений (1.12) здесь существует матрица условных распределений

$$\mathcal{P}(B/A) = \begin{matrix} & \bar{B} & B \\ \begin{matrix} \bar{A} \\ A \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{\bar{B}/\bar{A}} & P_{B/\bar{A}} \\ P_{\bar{B}/A} & P_{B/A} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (1.17)$$

в которой условные распределения тоже разделены пунктиром и, кроме индексов условных вероятностей, отличаются от (1.12) тем, что расположены в виде строк соответственно обозначениям условий.

Из элементарной теории вероятностей известно, что вероятность совместного появления пары зависимых событий определяется произведением безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P_{AB} = P_A P_{B/A} = P_B P_{A/B}, \quad (1.18)$$

а также, что путем суммирования совместных вероятностей события, совмещаемого с событиями, которые образуют полную группу событий, вычисляется безусловная вероятность этого события, — это так называемая *формула полной вероятности*:

$$P_A = \sum_i P_{AB_i} = \sum_i P_{B_i} P_{A/B_i}. \quad (1.19)$$

На основании формул (1.18) и (1.19) определяется *апостериорная вероятность* условия  $B_i$ , т. е. условная вероятность конкретного условия из полной группы условий, которая оценивается в результате того, что изучаемое событие  $A$  произошло.

$$P_{B_i/A} = P_{AB_i} : P_A = P_{B_i} P_{A/B_i} : P_A = P_{B_i} P_{A/B_i} : \sum_i P_{B_i} P_{A/B_i}. \quad (1.20)$$

Это так называемая *формула Байеса*, применяемая при статистической проверке гипотез.

Скалярные равенства (1.18) — (1.20) можно заменить обобщающими их матричными уравнениями распределений вероятностей для двумерной системы случайных событий:

$$P(A) = \sum_B P(AB), P(B) = \sum_A P(AB); \quad (1.21)$$

$$P(AB) = P(A) \circ P(B/A) = P(B) \circ P(A/B); \quad (1.22)$$

$$P(A/B) = P(AB) \oslash P(B), P(B/A) = P(AB) \oslash P(A), \quad (1.23)$$

в которых знаками « $\circ$ » и « $\oslash$ » обозначены смешанное умножение и деление матриц (см. Приложение 1). Эти уравнения использованы в равенствах (1.12) и (1.15)–(1.17).

**Пример 1.5.** Из двух учебных групп по жребию отобрано по 15 студентов, решивших на экзамене не меньше одной из трех предложенных всем задач  $A, B, C$ . Эта ситуация моделируется в виде двумерной системы случайных событий, совмещаемой из одномерных подсистем: «Группа» —  $\mathcal{S} = (I, II)$ , «Задачи» —  $\mathcal{Z} = (A, B, C)$ ,

аналогично (1.4):

$$\mathcal{I} \times \mathcal{J} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \times (I, II) = \begin{matrix} & I & II \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} AI & AI \\ BI & BI \\ CI & CI \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

В этой системе совмещенные события  $AI, AI, \dots, CI$  интерпретируются как решения  $i$ -й задачи  $j$ -м студентом (точнее — студентом из  $j$ -й группы);  $i = A, B, C, j = I, II$ . Группируя эти события, как это было сделано в табл. 1.1, можно подсчитать совместные частоты решений и записать их в *матрицу совместного распределения частот*, например, так:

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}\mathcal{J}) = \begin{matrix} & I & II \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

или в виде табл. 1.2, в центральной части которой размещена та же матрица. Суммируя столбцы и отдельно строки, получаем безусловные частоты задач и групп — последний столбец и нижняя строка табл. 1.2, суммы в которых определяют общее число решенных студентами задач

Таблица 1.2

Распределение частот событий к примеру 1.5

Задачи	Группы		Всего
	I	II	
A	15	15	30
B	3	9	12
C	2	6	8
Всего	20	30	50

Дальнейшие расчеты можно выполнять в частотах или частостях, вычисляя одни распределения через другие, записывая распределения в виде векторов-строк, как в (1.11), или в виде помеченных матриц, как в (1.12). В этом примере выполним расчеты по совмещенному распределению в частостях, приведенных в центре табл. 1.3, применяя помеченные матрицы.

Совместные частоты получены делением совместных частот из табл. 1.2 на общее число решений:  $P_{AI} = P_{AI} = 15 : 50 = 0,30$ ;  $P_{BI} = 3 : 50 = 0,06$  и т. д. Затем, сообразуясь с формулами (1.15) и (1.16) и суммируя столбцы, а потом строки совмещенного распределения,

Распределения частот событий к примеру 1.5

Задачи	Группы		Всего
	I	II	
A	0,30	0,30	0,60
B	0,06	0,18	0,24
C	0,04	0,12	0,16
Всего	0,40	0,60	1,00

находим частные безусловные распределения решенных задач и решавших задачи групп

$$P(\mathcal{J}) = \sum_{\mathcal{J}} P(\mathcal{J}\mathcal{J}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 & + & 0,30 \\ 0,06 & + & 0,18 \\ 0,04 & + & 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,24 \\ 0,16 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

$$P(\mathcal{J}) = \sum_{\mathcal{J}} P(\mathcal{J}\mathcal{J}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 & + & 0,30 \\ 0,06 & + & 0,18 \\ 0,04 & + & 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \\ (0,40 & 0,60) \end{matrix}$$

Далее, пользуясь формулами (1.23), вычисляем матрицы условных распределений частотей:

— решавших задачи групп, при условии, что группами решалась конкретная задача,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{J}/\mathcal{J}) &= P(\mathcal{J}\mathcal{J})P(\mathcal{J}) = \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 & 0,30 \\ 0,06 & 0,18 \\ 0,04 & 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} \otimes \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,24 \\ 0,16 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} (0,30 & 0,30) : 0,60 \\ (0,06 & 0,18) : 0,24 \\ (0,04 & 0,12) : 0,16 \end{pmatrix} \end{matrix} = \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 : 0,60 & 0,30 : 0,60 \\ 0,06 : 0,24 & 0,18 : 0,24 \\ 0,04 : 0,16 & 0,12 : 0,16 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \end{matrix}; \end{aligned}$$

— решенных задач, при условии, что задачи решала определен-

ная группа,

$$\begin{aligned}
 P(J/\mathcal{F}) &= P(J/\mathcal{F}) \circ P(\mathcal{F}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 & 0,30 \\ 0,06 & 0,18 \\ 0,04 & 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} \circ \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \\
 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \left[ \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,06 \\ 0,04 \end{pmatrix} : 0,4 \quad \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,18 \\ 0,12 \end{pmatrix} : 0,6 \right] \end{matrix} = \\
 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 : 0,4 & 0,30 : 0,6 \\ 0,06 : 0,4 & 0,18 : 0,6 \\ 0,04 : 0,4 & 0,12 : 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,75 & 0,50 \\ 0,15 & 0,30 \\ 0,10 & 0,20 \end{pmatrix} \end{matrix}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что частные условные распределения в полученных матрицах разделены пунктиром и что для каждого из них выполняется условие нормировки (1.7).

Следует обратить внимание на то, что, определив сначала общее совместное распределение частот событий, из него потом расчетным путем получили все остальные, возможные в данной системе, частные распределения. Следовательно, двумерное совместное распределение полностью определяет двумерную систему совместимых событий и в этом смысле является полным. Обобщая это на более сложные случаи, запомним, что многомерную систему случайных явлений полностью характеризует лишь многомерное совместное вероятностное распределение той же мерности. Отсюда практическое требование планировать исследование так, чтобы в результате получать возможно более полное распределение вероятностей, иначе информация необратимо теряется. Но если по каким-то причинам полное распределение в целом сразу не получить, то его необходимо восстановить, вычисляя через одно из возможных смешанных произведений частных безусловных и условных матриц распределений.

Согласно уравнениям (1.22), можно восстановить полное распределение двумя разными способами — через произведение  $P(A) \circ P(B/A)$  или через произведение  $P(B) \circ P(A/B)$ . Например, пусть установлено, что студенты I группы решили всего 20 задач, в том числе 15A, 3B и 2C, а такое же количество студентов из II группы решили 30 задач, в том числе 15A, 9B, 6C. Перенормировав эти



данные:  $(15 : 20)A$ ,  $(3 : 20)B$  и т. д., получим матрицу условных распределений задач, решенных той и другой группами:

$$P(\mathcal{J}/\mathcal{F}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,75 & 0,50 \\ 0,15 & 0,30 \\ 0,10 & 0,20 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Затем, нормируя количество решений по группам общим числом решений, вычисляем безусловное распределение решений в группах —  $20 : (20+30) = 0,4$ ;  $30 : (20+30) = 0,6$ ; так что  $P(\mathcal{F}) = (0,4; 0,6)$ . Перемножая полученные матрицы, восстанавливаем полное распределение:

$$P(\mathcal{J}\mathcal{F}) = P(\mathcal{J}/\mathcal{F}) \circ P(\mathcal{F}) =$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,75 \cdot 0,4 & 0,5 \cdot 0,6 \\ 0,15 \cdot 0,4 & 0,3 \cdot 0,6 \\ 0,10 \cdot 0,4 & 0,2 \cdot 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,30 & 0,30 \\ 0,06 & 0,18 \\ 0,04 & 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Проверяя, убеждаемся, что сумма совместных вероятностей равна единице, следовательно, вычисления безошибочны. Далее по полному распределению вычисляются остальные матрицы распределений, как это было сделано выше.

Матричные уравнения распределений (1.21) — (1.23) можно обобщить на многомерные системы случайных явлений. Но количество вариантов быстро увеличивается, так как появляются частные распределения компонентов системы. В частности, наряду с полным трехмерным распределением вероятностей в случае совмещения трех групп случайных событий нужно рассматривать и вычислять не только одномерные, но и двумерные совмещенные распределения, а также двумерные и трехмерные матрицы условных распределений — для одной группы событий при условии совмещения двух других групп и, наоборот, для совмещенных двух групп при условии событий третьей группы. Комбинируя варианты, можно записать и использовать разные матричные уравнения распределений, например:

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= \sum_b \sum_c P(ABC), \quad P(AB) = \sum_c P(ABC), \\ P(ABC) &= P(A) \circ P(CB/A) = P(AB) \circ P(C/AB) \end{aligned} \right\}. \quad (1.24)$$

Аналогичные уравнения можно записать и для частотных распределений.

Психологи нередко затрудняются в правильной организации наблюдений и не реализуют возможность количественно охарактеризовать систему эмпирических данных с необходимой и достаточной полнотой. Чтобы не потерять такую возможность, необходимо четко выделять исследуемые свойства, которые могут быть совместимыми у изучаемых объектов, обследуемых людей или ситуаций; затем надо выбрать надежно различимые градации (признаки) этих свойств и принять эти градации за несовместные события, образующие полную группу каждого свойства. Следует подходящим образом обозначить группы свойств и их градаций. Только после этого можно обратиться к планированию эксперимента и наблюдений, в которых получалось бы полное совмещение событий из выделенных групп свойств.

С формальной стороны такое планирование можно представить следующим образом. Пусть  $I=(1, 2)$ ,  $II=(1, 2)$ ,  $III=(1, 2)$  — полные группы альтернативных событий, так что  $I \times II = (11, 12, 21, 22)$  и  $I \times II \times III = (111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222)$  — дву- и трехмерные системы, полученные совмещением событий. В результате  $n$  наблюдений  $n_1, n_2$  раз появлялись события  $I$  группы, так что  $n = n_1 + n_2$ . В то же время из  $n_1$  либо  $n_2$  события  $I$  группы оказались совмещены с событиями  $II$  группы в количествах  $n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}$ , причем  $n_1 = n_{11} + n_{12}$ ,  $n_2 = n_{21} + n_{22}$ . Точно так же с парными сочетаниями событий были совмещены события  $III$  группы — с частотами  $n_{111}, n_{112}, n_{121}, n_{122}, n_{211}, n_{212}, n_{221}, n_{222}$ , при этом  $n_{11} = n_{111} + n_{112}$ ,  $n_{12} = n_{121} + n_{122}$ ,  $n_{21} = n_{211} + n_{212}$ ,  $n_{22} = n_{221} + n_{222}$ . Такова общая модель эмпирического изучения трехмерной системы противоположных событий (рис. 1.7, а). Конкретизируем эту модель.

**Пример 1.6.** Для оценки личностного потенциала социальных общностей необходимы данные о статистических распределениях личностных свойств людей, образующих общность, с учетом разных демографических, социальных и других характеристик. Пусть в результате предварительного обследования по методике Г. Айзенка отобрано 100 человек, мужчин и женщин, с отклонениями по фактору «экстраверсия—интроверсия», сочетавшимися либо нет с выраженным нейротизмом. При этом оказалось, что на 40 мужчин пришлось 8 экстравертов, в том числе 1 с высоким нейротизмом, и 32 интроверта, из которых 22 — без нейротизма; в то же время из женщин лишь 6 оказались экстравертированными, в том числе 5 — без нейротизма, а остальные 54 были интровертированными, из них 22 с высоким уровнем нейротизма (рис. 1.7, б). Заметим, что на графе в виде уровней представлены частотные распределения обследованных людей: по полу —  $\mathcal{F}(\mathcal{K}) = (40м, 60ж)$ , по полу и экстра—интроверсии —

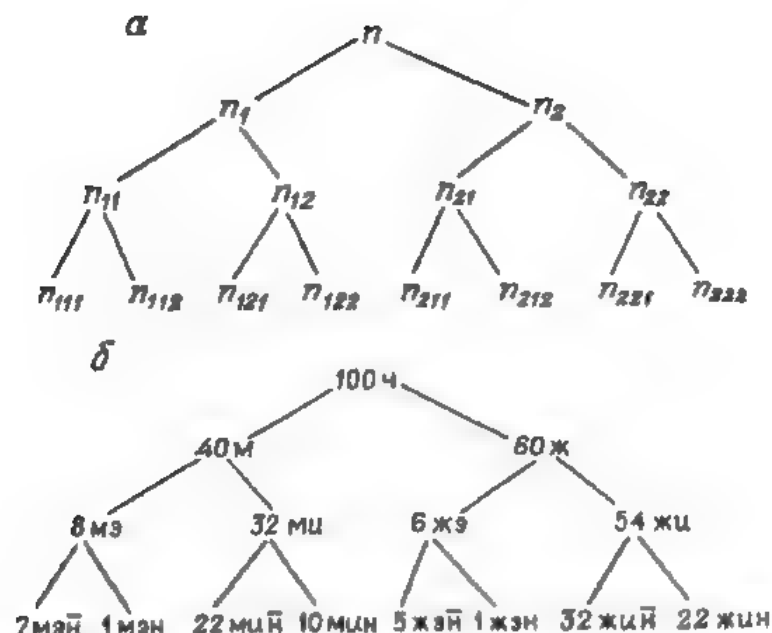


Рис. 1.7. Графы совмещаемых событий из трехмерной системы альтернативных событий

**а** — общий случай ( $n$  — общее число наблюдений,  $n_1, n_2$  — распределение частот событий первой подсистемы;  $n_{11}, \dots, n_{22}$  — распределение совместных частот событий первой и второй подсистем;  $n_{111}, \dots, n_{222}$  — распределение совместных частот событий первой, второй и третьей подсистем), **б** — пример 1.6.

$\mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{BU}) = (8\text{мэ}, 32\text{ми}, 6\text{жэ}, 54\text{жи})$ , по полу, экстра—интроверсии и отсутствию—наличию нейротизма —  $\mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{BU} \cdot \mathcal{K}) = (7\text{мэИ}, 1\text{мэн}, 22\text{миИ}, 10\text{мин}, 5\text{жэИ}, 1\text{жэн}, 32\text{жиИ}, 22\text{жин})$ . Последнее, трехмерное, распределение является полным, что позволяет вычислить другие возможные здесь распределения.

Действительно, хотя распределение частот по полу имеется в явном виде, его можно вычислить, суммируя совместные частоты по исключаемым свойствам, как в уравнениях (1.24):

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \sum_{\mathcal{BU}} \sum_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{BU} \cdot \mathcal{K}) = \left[ (7\text{мэИ}, 1\text{мэн}, 22\text{миИ}, 10\text{мин}), \right. \\ \left. (5\text{жэИ} + 1\text{жэн} + 32\text{жиИ} + 22\text{жин}) \right] = (40\text{м}, 60\text{ж}).$$

Аналогичным путем, суммируя по исключаемым свойствам, по-

лучаем одномерные распределения обследованных по экстра—интроверсии

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}\mathcal{U}) = \sum_{\mathcal{K}} \sum_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \left[ (7\text{мэН} + 1\text{мэН} + 5\text{жэН} + 1\text{жэН}), \right. \\ \left. (22\text{миН} + 10\text{мин} + 32\text{жиН} + 22\text{жин}) \right] = (14\text{в}, 86\text{и})$$

и по нейротизму

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \sum_{\mathcal{K}} \sum_{\mathcal{B}\mathcal{U}} \mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \left[ (7\text{мэН} + 22\text{миН} + 5\text{жэН} + \right. \\ \left. + 32\text{жиН}), (1\text{мэН} + 10\text{мин} + 1\text{жэН} + 22\text{жин}) \right] = (66\text{Н}, 34\text{и}),$$

которые в явном виде отсутствовали.

Так же обстоит дело с двумерными распределениями. В явном виде получено совместное распределение людей по полу и экстра—интроверсии, но его можно вычислить из полного распределения:

$$\mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U}) = \sum_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \left[ (7\text{мэН} + 1\text{мэН}), (22\text{миН} + 10\text{мин}), \right. \\ \left. (5\text{жэН} + 1\text{жэН}), (32\text{жиН} + 22\text{жин}) \right] = (8\text{мэ}, 32\text{ми}, 6\text{жэ}, 54\text{жи}).$$

Аналогично вычисляются отсутствовавшие в явном виде распределения частот людей по полу и нейротизму

$$\mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{K}) = \sum_{\mathcal{B}\mathcal{U}} \mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \left[ (7\text{мэН} + 22\text{миН}), (1\text{мэН} + 10\text{мин}), \right. \\ \left. (5\text{жэН} + 32\text{жиН}), (1\text{жэН} + 22\text{жин}) \right] = (29\text{мН}, 11\text{ми}, 37\text{жН}, 23\text{жин})$$

и по экстра—интроверсии и нейротизму

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \sum_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \left[ (7\text{мэН} + 5\text{жэН}), (1\text{мэН} + 1\text{жэН}), \right. \\ \left. (22\text{миН} + 32\text{жиН}), (10\text{мин} + 22\text{жин}) \right] = (12\text{эН}, 2\text{эи}, 54\text{иН}, 32\text{ин}).$$

Таким образом, все безусловные, одно- и двумерные, частотные распределения свойств обследованных людей получены из полного частотного распределения. Все эти распределения преобразуются в распределения частостей, если их разделить на общее количество наблюдений; например,  $\mathcal{P}(\mathcal{K}) = \mathcal{F}(\mathcal{K}) : 100 = (0,4\text{м}, 0,6\text{ж})$ .

Далее необходимо вычислить все условные распределения. По двумерным распределениям, учитывая формулы (1.23), вычисляются шесть матриц условных распределений:

— матрица частот экстра—интроверсии при условии мужского, женского пола

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}U/\mathcal{K}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{E}U)gF(\mathcal{K}) = \\ &= [(8мэ, 32ми) : 40м; (6жэ, 54жи) : 60ж] = (8мэ : 40м, 32ми : 40м, \\ &\quad 6жэ : 60ж, 54жи : 60ж) = (0,2э/м, 0,8и/м; 0,1э/ж, 0,9и/ж); \end{aligned}$$

— матрица частот мужского, женского пола при условии экстра—интроверсии

$$\begin{aligned} P(\mathcal{K}/\mathcal{E}U) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{E}U)gF(\mathcal{E}U) = [(8мэ, 6жэ) : 14э; \\ &\quad (32ми, 54жи) : 86и] \cong (0,57м/э, 0,43ж/э; 0,37м/и, 0,63ж/и); \end{aligned}$$

— матрица частот экстра—интроверсии при условии нейротизма

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}U/\mathcal{N}) &= F(\mathcal{E}U \cdot \mathcal{N})gF(\mathcal{N}) = [(12эн, 54ин) : 66н; \\ &\quad (2эи, 32ии) : 34и] \cong (0,18э/н, 0,82и/н; 0,06э/и, 0,94и/и); \end{aligned}$$

— матрица частот нейротизма при условии экстра—интроверсии

$$\begin{aligned} P(\mathcal{N}/\mathcal{E}U) &= F(\mathcal{E}U \cdot \mathcal{N})gF(\mathcal{E}U) = [(12эн, 2эи) : 14э; \\ &\quad (54ин, 32ии) : 86и] \cong (0,86н/э, 0,14и/э; 0,63н/и, 0,37и/и); \end{aligned}$$

— матрица частот нейротизма при условии мужского, женского пола

$$\begin{aligned} P(\mathcal{N}/\mathcal{K}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{N})gF(\mathcal{K}) = [(29мн, 11ми) : 40м; \\ &\quad (37жн, 23жи) : 60ж] \cong (0,725н/м, 0,275и/м, 0,62н/ж, 0,38и/ж). \end{aligned}$$

— наконец, матрица частот мужского, женского пола при условии нейротизма

$$\begin{aligned} P(\mathcal{K}/\mathcal{N}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{N})gF(\mathcal{N}) = [(29мн, 37жн) : 66н; \\ &\quad (11ми, 23жи) : 34и] \cong (0,44м/н, 0,56ж/н; 0,32м/и, 0,68ж/и) \end{aligned}$$

(напомним, что в линейной записи матриц условные распределения отделяются друг от друга точками с запятой, а условные частоты — запятыми).

Теперь осталось вычислить по полному распределению еще шесть матриц условных распределений — три условно-совместных

и три совместно-условных. *Условно-совместными* будем называть распределения частот (вероятностей) отдельных событий при условии совместного появления других событий. Эти матрицы вычисляются смешанным делением матрицы трехмерного распределения на матрицы двумерных распределений частот условий

— матрица условно-совместных распределений частот мужского, женского пола при условии экстра—интроверсии и нейротизма

$$\begin{aligned} P(\mathcal{K}/\mathcal{M} \cdot \mathcal{J}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{J}) \oslash F(\mathcal{M} \cdot \mathcal{J}) = \\ &= \left[ (7\text{мэН}, 5\text{жэН}) : 12\text{эН}, (1\text{мэн}, 1\text{жэн}) : 2\text{эн}; (22\text{миН}, 32\text{жиН}) : 54\text{иН}, \right. \\ &\quad \left. (10\text{мин}, 22\text{жин}) : 32\text{ин} \right] \cong (0,58\text{м}/\text{эН}, 0,42\text{ж}/\text{эН}; 0,5\text{м}/\text{ви}, 0,5\text{ж}/\text{ен}, \\ &\quad 0,41\text{м}/\text{иН}, 0,59\text{ж}/\text{иН}; 0,31\text{м}/\text{ин}, 0,69\text{ж}/\text{ин}); \end{aligned}$$

— матрица условно-совместных распределений частот экстра—интроверсии при условии мужского, женского пола и нейротизма

$$\begin{aligned} P(\mathcal{M}/\mathcal{K} \cdot \mathcal{J}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{J}) \oslash F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{J}) = \\ &= \left[ (7\text{мэН}, 22\text{миН}) : 29\text{мН}; (1\text{мэн}, 10\text{мин}) : 11\text{мн}; (5\text{жэН}, 32\text{жиН}) : 37\text{жН}; \right. \\ &\quad \left. (1\text{жэн}, 22\text{жин}) : 23\text{жн} \right] \cong (0,24\text{э}/\text{мН}, 0,76\text{и}/\text{мН}; \\ &\quad 0,09\text{э}/\text{мн}, 0,91\text{и}/\text{мн}; 0,135\text{э}/\text{жН}, 0,865\text{и}/\text{жН}; 0,04\text{э}/\text{жн}, 0,96\text{и}/\text{жн}); \end{aligned}$$

— матрица условно-совместных распределений нейротизма при условии мужского, женского пола и экстра—интроверсии

$$\begin{aligned} P(\mathcal{J}/\mathcal{K} \cdot \mathcal{M}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{J}) \oslash F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{M}) = \\ &= \left[ (7\text{мэН}, 1\text{мэн}) : 8\text{мэ}; (22\text{миН}, 10\text{мин}) : 32\text{ми}; (5\text{жэН}, 1\text{жэн}) : 6\text{жэ}; \right. \\ &\quad \left. (32\text{жиН}, 22\text{жин}) : 54\text{жи} \right] \cong (0,875\text{н}/\text{мэ}, 0,125\text{н}/\text{мэ}; \\ &\quad 0,69\text{н}/\text{ми}, 0,31\text{н}/\text{ми}; 0,83\text{н}/\text{жэ}, 0,17\text{н}/\text{жэ}; 0,59\text{н}/\text{жи}, 0,41\text{н}/\text{жи}). \end{aligned}$$

*Совместно-условными* будем называть распределения частот (вероятностей) совмещенных событий при условии изолированного появления других событий системы. Вычислим такие матрицы:

— для распределений частот экстра—интроверсии и нейротизма при условии мужского, женского пола

$$\begin{aligned} P(\mathcal{M} \cdot \mathcal{J}/\mathcal{K}) &= F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{J}) \oslash F(\mathcal{K}) = \\ &= \left[ (7\text{мэН}, 1\text{мэн}, 22\text{миН}, 10\text{мин}) : 40\text{м}; (5\text{жэН}, 1\text{жэн}, 32\text{жиН}, \right. \end{aligned}$$

$$22\text{жнн}) : 60\text{ж}] \cong (0,175\text{эн/м}, 0,025\text{эн/м}, 0,55\text{ин/м}, \\ 0,25\text{ин/м}; 0,083\text{эн/ж}, 0,017\text{эн/ж}, 0,53\text{ин/ж}, 0,37\text{ин/ж});$$

— для распределений мужского, женского пола и нейротизма при условии экстра—интроверсии

$$P(\mathcal{K} \cdot \mathcal{K}/\mathcal{K}) = F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{K})\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \\ = [(7\text{мэН}, 1\text{мэН}, 5\text{жэН}, 1\text{жэН}) : 14\text{э}; (22\text{миН}, 10\text{мин}, 32\text{жиН}, \\ 22\text{жин}) : 86\text{и}] \cong (0,5\text{мН/в}, 0,07\text{мн/в}, 0,36\text{жН/в}, 0,07\text{жин/в}; \\ 0,26\text{ми/и}, 0,12\text{мин/и}, 0,37\text{жи/и}, 0,26\text{жин/и});$$

— для распределений мужского, женского пола и экстра—интроверсии при условии нейротизма

$$P(\mathcal{K} \cdot \mathcal{K}/\mathcal{K}) = F(\mathcal{K} \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{K})\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \\ = [(7\text{мэН}, 22\text{миН}, 5\text{жэН}, 32\text{жиН}) : 66\text{Н}, (1\text{мэН}, 10\text{мин}, \\ 1\text{жэН}, 22\text{жин}) : 34\text{н}] \cong (0,11\text{мэ/Н}, 0,33\text{ми/Н}, 0,08\text{жэ/Н}, \\ 0,48\text{жи/Н}, 0,03\text{мэ/н}, 0,29\text{ми/н}, 0,03\text{жэ/н}, 0,66\text{жи/н})$$

До сих пор рассматривались уравнения распределений вероятностей либо частот и частостей общего вида — для зависимых событий, для которых, по определению, появление одних событий изменяет вероятность появления других событий. Это означает, что условные вероятности событий отличаются от безусловных вероятностей тех же событий, и, следовательно, условные распределения отличаются от соответствующих безусловных распределений. Так как величина этих отличий может быть и пренебрежимо малой и значительной, то строго формулировать можно лишь условия независимости событий и систем событий. Так, например, два совместимых события независимы, если

$$P_A = P_{A/v} \quad \text{и} \quad P_B = P_{B/\Lambda}. \quad (1.25)$$

Аналогично этому две системы совместимых случайных событий  $A, B$  определяются как независимые, если безусловные распределения вероятностей равны условным распределениям:

$$P(A) = P(A/B_j) \quad \text{и} \quad P(B) = P(B/A_i), \quad (1.26)$$

где  $B_j \in B$ ,  $A_i \in A$ . Эти условия легко обобщаются на конечно-мерный случай:

$$P(X) = P(X/A_i) = P(X/A_i B_j) = \dots = P(X/A_i B_j \dots Z_w), \quad (1.27)$$

где  $A_i \in A, B_j \in B, \dots, Z_w \in Z$ , причем  $A, B, \dots, Z, AB, AZ, \dots, AB, \dots Z \in X$ , так что, например, для любых трех событий  $A, B, C$ , опустив индексы, можно записать

$$P_A = P_{A/B} = P_{A/C} = P_{A/BC},$$

$$P_B = P_{B/A} = P_{B/C} = P_{B/AC},$$

$$P_C = P_{C/A} = P_{C/B} = P_{C/AB},$$

$$P_{AB} = P_{AB/C},$$

$$P_{AC} = P_{AC/B},$$

$$P_{BC} = P_{BC/A}.$$

Из условий независимости следует, что в отличие от (1.18) и (1.19) совмещение событий, если они независимы, определяется произведением их безусловных вероятностей, а совмещенная система независимых событий определяется кронекеровым (тензорным) произведением безусловных распределений вероятностей компонентов системы:

$$P(AB \dots Z) = P(A) \otimes P(B) \otimes \dots \otimes P(Z), \quad (1.28)$$

где любая полная совместная вероятность  $P_{AB \dots Z} = P_A P_B \dots P_Z$ .

Сравнивая формулы (1.18), (1.19), (1.23), (1.24) и (1.25) — (1.28), можно видеть, что независимость случайных явлений значительно упрощает вероятностные описания и расчеты. Но в реальности независимость случайных событий и других явлений не всегда очевидна, даже если она существует. Рассмотрим три случая независимости событий.

1. Системы совместимых событий с равномерными распределениями вероятностей независимы. Пусть  $P(AB) = (0,25\bar{A}\bar{B}, 0,25\bar{A}B, 0,25A\bar{B}, 0,25AB)$ . Тогда  $P(A) = \sum_B P(AB) = \sum_A P(AB) = P(B) = (0,5\bar{B}, 0,5B)$  и  $P(A/B) = [P(A/\bar{B}); P(A/B)] = (0,25\bar{A}\bar{B} : 0,5\bar{B}, 0,25A\bar{B} : 0,5B) = (0,5\bar{A}/\bar{B}, 0,5A/\bar{B}; 0,5\bar{A}/B, 0,5A/B) = [P(B/A); P(B/\bar{A})] = P(B/A)$  — все условные распределения равны «своим» безусловным распределениям.

2. Системы совместимых событий, в которых хотя бы одно из частных распределений вероятностей равномерное, являются независимыми. Пусть  $P(A) = (0,5\bar{A}, 0,5A), P(B) = (0,1\bar{B}, 0,9B)$ . По (1.28) в случае независимости  $P(A) \otimes P(B) = (0,5\bar{A}, 0,5A) \otimes (0,1\bar{B}, 0,9B) = (0,05\bar{A}\bar{B}, 0,45\bar{A}B, 0,05A\bar{B}, 0,45AB) = P(AB)$ . Вычисляем:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= P(AB) \otimes P(B) = \\ &= [(0,05\bar{A}\bar{B}, 0,05A\bar{B}) : 0,1\bar{B}; (0,45\bar{A}B, 0,45AB) : 0,9B] = \\ &= (0,5\bar{A}/\bar{B}, 0,5A/\bar{B}; 0,5\bar{A}/B, 0,5A/B), \end{aligned}$$



т. е., как и в (1.26),  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A/B)$ . Аналогичное равенство имеет место и для группы событий  $B$ , в чем читатель может убедиться самостоятельно.

3. Системы совместных событий с неравномерными распределениями вероятностей компонентов, для которых выполняется формула (1.28), независимы по определению. Пусть, например,  $\mathcal{P}(A) = (0,1\bar{A}, 0,9A)$ ,  $\mathcal{P}(B) = (0,8\bar{B}, 0,2B)$  и  $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \otimes \mathcal{P}(B)$ . Вычислим это тензорное произведение и матрицы условных распределений:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(AB) &= (0,1\bar{A}, 0,9A) \otimes (0,8\bar{B}, 0,2B) = \\ &= (0,08\bar{A}\bar{B}, 0,02\bar{A}B, 0,72A\bar{B}, 0,18AB); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A/B) &= \mathcal{P}(AB) \mathcal{P}(B) = \\ &= [(0,08\bar{A}\bar{B}, 0,72A\bar{B}) : 0,8\bar{B}; (0,02\bar{A}B, 0,18AB) : 0,2B] = \\ &= (0,1\bar{A}/\bar{B}, 0,9A/\bar{B}, 0,1\bar{A}/B, 0,9A/B) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(B/A) &= \mathcal{P}(AB) \mathcal{P}(A) = \\ &= [(0,08\bar{A}\bar{B}, 0,02\bar{A}B) : 0,1\bar{A}; (0,72A\bar{B}, 0,18AB) : 0,9A] = \\ &= (0,8\bar{B}/\bar{A}, 0,2B/\bar{A}; 0,8\bar{B}/A, 0,2B/A). \end{aligned}$$

Сравнивая безусловные и условные распределения, убеждаемся в выполнении условий независимости (1.26).

Из рассмотренных случаев можно сделать два практических вывода. Во-первых, если в изучаемых системах событий среди распределений вероятностей имеется хотя бы одно, точно или приблизительно равномерное, что оценивается визуально по эмпирическим данным, то события и системы событий независимы, поэтому специальной статистической проверки гипотезы о независимости здесь не требуется. Во-вторых, если распределения совместимых событий неравномерны, то события и их системы независимы, когда тензорное произведение безусловных распределений, которые вычислены из совместного распределения частот, приблизительно равно этому совместному распределению. Приближение допустимо, если ошибка в отношении к максимальной разности вычисленных и наблюдавшихся совместных частот не превосходит 10 ÷ 15% от наблюдавшейся частоты. Если ошибка больше, требуется статистическая проверка гипотезы о независимости событий, которая будет рассмотрена в дальнейшем.

### 111 Ранжирование событий в системе по вероятностям

Если события в системе не равновероятны, то вероятность можно рассматривать как характеристику значимости события, — конечно, только в смысле возможности появления и только в данной системе событий, образующих полную группу. В этом смысле и говорят о вероятностном «весе» события (или о «весе» по вероятности)\*. События с большой вероятностью имеют большой «вес», а события с малой вероятностью — малый. При геометрическом изображении вероятностей событий аналогия с весом в его обычном понимании достаточно полная. Эта аналогия основывается на привычке оценивать физический вес предмета по его зрительно воспринимаемой величине. Поэтому-то геометрически большая площадь и ассоциируется в нашем представлении с большим весом фигуры. «Вес» события является одной из важнейших его характеристик в системе событий, поскольку по «весу» события в системе можно сравнивать и упорядочивать. Обычно из большого числа событий представляют интерес не все, а лишь достаточно частые события.

Наиболее вероятное событие (или класс событий) в системе называется *модальным* событием (классом) или просто *модой*. Исключив из рассмотрения моду, среди остальных событий можно найти новое модальное событие, затем среди оставшихся — новую моду и т. д. Таким путем все события в системе можно упорядочить (ранжировать) по убыванию их вероятности. *Ранжирование* можно выполнить и по возрастанию «веса» событий. После ранжирования событиям присваиваются порядковые номера\*\* (или ранги), которые приблизительно характеризуют (в числах натурального ряда) возможности появления событий в системе. Ранжированные по вероятности события удобно представлять графически в виде столбиковых и круговых диаграмм распределения вероятностей.

**Пример 1.7.** В табл. 1.4 представлено распределение диагнозов психически больных людей, обследованных при изучении расстройств мышления\*\*\*. Можно видеть, что среди девяти заболеваний равновероятными являются только три; остальные су-

\*В смежных науках, используемых в психологической практике, понятие «вес» многозначно: «вес» в смысле субъективной или объективной ценности (теория игр), в смысле стабильности результатов измерения от опыта к опыту (теория вероятностей, метрология), в смысле количества информации.

\*\*Если два или более событий равновероятны, то им присваивается одно и то же среднее значение из порядковых номеров, которые они получили бы, будучи неравновероятными.

\*\*\*Зейгарник Б. В. Патология мышления. М., 1962. С. 70.

шестивенно не равновероятны. Модальный диагноз — травмы головного мозга, на втором месте (по убыванию вероятности) — шизофрения, на третьем — сосудистые заболевания головного мозга. Эти три диагноза имеют место с вероятностью (суммарно) более  $2/3$ , тогда как остальные шесть диагнозов — только  $1/3$ . Ранжировав все диагнозы по убыванию вероятностей, получаем табл. 1.5, из которой хорошо видны сравнительные «веса» каждого из девяти диагнозов. Отметим, что равновероятные энцефалиты, прогрессивный паралич и психопатии получили ранг, равный среднему из рангов (6, 7 и 8), которые они занимали бы, будучи неравновероятными.

Таблица 1.4  
Исходное распределение больных по диагнозу

Диагноз (заболевание)	Оценка вероятности
Шизофрения	0,25
Эпилепсия	0,07
Сосудистые заболевания головного мозга	0,22
Травмы головного мозга	0,26
Олигофрения	0,06
Энцефалиты	0,04
Прогрессивный паралич	0,04
Маниакально-депрессивный психоз	0,02
Психопатии	0,04

Таблица 1.5  
Ранжированное распределение больных по диагнозу

Диагноз (заболевание)	Оценка вероятности	Ранг по вероятности
Травмы головного мозга	0,26	1
Шизофрения	0,25	2
Сосудистые заболевания головного мозга	0,22	3
Эпилепсия	0,07	4
Олигофрения	0,06	5
Энцефалиты	0,04	7
Прогрессивный паралич	0,04	7
Психопатии	0,04	7
Маниакально-депрессивный психоз	0,02	9

Пример 1.8. В табл. 1.6 представлены ранжированные по вероятности суждения взрослых людей (восемь лет тому назад окончивших школу), характеризующие внешний облик школьных учителей\*. Изобразим эти же данные в виде диаграмм распределения вероятностей. На рис. 1.8, а представлена столбиковая диа-

\*Бодаев А. А. Восприятие человека человеком. Л., 1965. С. 75.

грамма. Площади столбиков, соответствующих событиям, пропорциональны оценкам вероятности из табл. 1.6. Расстояния между столбиками могут быть произвольными, но лучше столбики расположить на одной линии, а слева или справа\* поместить вертикальную ось, градуированную в долях для удобства чтения диаграммы. Круговая (или секторная) диаграмма изображена на рис. 1.8, б. Ее преимуществом является компактность, но при большом количестве событий в системе (практически больше пяти) это преимущество становится недостатком. Для того чтобы наглядно представить изменение вероятностного «веса» изучаемых событий под влиянием какого-либо контролируемого условия, столбиковые диаграммы лучше располагать друг под другом.

Таблица 1.6

Распределение суждений к примеру 1.3

Суждения, характеризующие	Оценка вероятности	Ранг по вероятности
Физический облик	0,483	1
Мимику, жесты и пластику	0,281	2
Внешность в целом	0,183	3
Оформление внешности	0,053	4

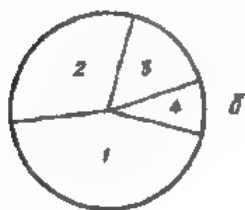
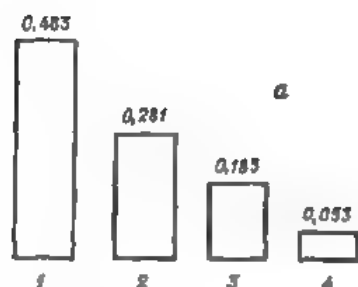


Рис. 1.8. Столбиковая (а) и круговая (б) диаграммы распределения вероятностей классифицированных событий.

\*Если столбиков много, шкалу значений вероятности помещают и слева и справа. Часто вместо шкалы значения вероятностей указывают сверху над столбиками.

**Пример 1.9.** Как стало известно, младшие школьники предпочитают сложные задания более легким\*. Степень предпочтения меняется от первого класса к четвертому — табл. 1.7. Изменения степени предпочтения в выборе трудной задачи школьниками первого — четвертого классов можно представить в виде последовательности столбиковых диаграмм — рис. 1.9.

Таблица 1.7

Вероятности выбора трудной  
и легкой задачи младшими школьниками

Выбор	Классы			
	I	II	III	IV
Трудной задачи	0,77	0,80	0,68	0,93
Легкой задачи	0,23	0,20	0,32	0,07

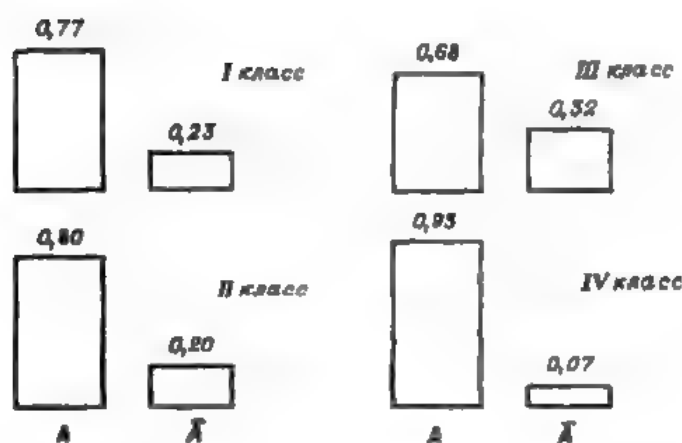


Рис. 1.9. Последовательность столбиковых диаграмм к примеру 1.9.

A — выбор трудной задачи,  $\bar{A}$  — выбор легкой задачи.

\*См.: Вожович Л. И. Личность и ее формирование в детском возрасте. М., 1968. С. 251.

**Зависимость (связь)\*** между случайными событиями, как указывалось, состоит в том, что появление одного из событий изменяет вероятность появления другого события. Иначе говоря, факт связи между случайными событиями состоит в совместном изменении меры возможности их появления — частоты, частости или вероятности. По наличию или отсутствию такого изменения и судят о наличии или отсутствии зависимости между событиями.

Связь по вероятностям не является однозначной. Поэтому, в отличие от детерминированных связей, связи между случайными явлениями вообще называются *вероятностными* (стохастическими) *связями*. *Стохастическую связь* между классифицированными событиями часто называют *сопряженностью*.

**Сопряженность\*\*** имеет три свойства: тесноту (степень, силу), направление и направленность. *Теснота* сопряженности — это основное свойство. Она тем больше, чем более неравновероятно совместное появление всех зависимых в совокупности событий. Если все события (или по крайней мере одна пара событий) в системе равновероятны, то, как показано выше, сопряженность отсутствует («нулевая» теснота). Если вероятности некоторых событий в системе равны нулю, а других не равны нулю, то теснота максимальна, и связь вероятностная превращается в детерминированную (рис. 1.10, а). Между этими крайними случаями располагается множество случаев, когда теснота сопряженности непрерывно изменяется от нуля до некоторой максимальной величины. *Направление* сопряженности определяется характером распределения вероятностей совместного появления событий. Если вероятности совместного появления событий  $AB$  и  $\overline{A}\overline{B}$  больше, чем вероятности совместного появления событий  $\overline{A}B$  и  $A\overline{B}$ , то направление сопряженности называется *положительным* (рис. 1.10, а и б). Если, наоборот, вероятности совместного появления событий  $\overline{A}B$  и  $A\overline{B}$  больше, чем вероятности совместного появления событий  $AB$  и  $\overline{A}\overline{B}$ , то направление сопряженности считают *отрицательным* (рис. 1.10, в)\*\*\*. *Направленность* сопряженности характеризует логическое следование событий

\*В литературе по теории вероятностей чаще используется термин «зависимость», а в литературе по статистике и ее приложениям — термин «связь». Здесь и далее мы употребляем оба термина как синонимы.

\*\*Используя лаконичный термин «сопряженность», мы везде будем иметь в виду более точное, но длинное выражение: «стохастическая связь между классифицированными событиями».

\*\*\*Такое определение направлений обусловлено, как показано ниже, знаком количественных мер сопряженности.

<b>а</b>			
События и их вероятности	A	$\bar{A}$	P(B)
B	0,4	0,0	0,4
$\bar{B}$	0,0	0,6	0,6
P(A)	0,4	0,6	1,0

<b>б</b>			
События и их вероятности	A	$\bar{A}$	P(B)
B	0,3	0,1	0,4
$\bar{B}$	0,1	0,5	0,6
P(A)	0,4	0,6	1,0

<b>в</b>			
События и их вероятности	A	$\bar{A}$	P(B)
B	0,1	0,3	0,4
$\bar{B}$	0,5	0,1	0,6
P(A)	0,6	0,4	1,0

Рис. 1.10. Сопряженность классифицированных событий.

а — максимально тесная положительная, б — положительная, в — отрицательная.

В качестве мер, количественно характеризующих тесноту сопряженности, используются четыре коэффициента. Два из них применимы только к альтернативному (четырёхклеточному) распределению, назовем их коэффициентами четырёхклеточной сопряженности. Два других применимы к любой  $m \times n$ -клеточной системе событий, назовем их коэффициентами  $m \times n$ -клеточной сопряженности.

Коэффициенты четырёхклеточной сопряженности вычисляются по следующим формулам:

$$Q = \frac{ad - cb}{ad + cb}; \quad (1.29)$$

$$\Phi = \frac{ad - cb}{\sqrt{(a+b)(c+d)(b+d)(a+c)}}, \quad (1.30)$$

где значения  $a, b, c, d$  и их сумм понятны из табл. 1.8. Коэффициент  $\Phi$  известен под названием коэффициента ассоциации (связи). Он оценивает сопряженность только в одном направлении, и вернее было бы назвать его коэффициентом односторонней сопряженности. Коэффициент  $Q$  известен под названием коэффициента сопряженности (контингенции). Он оценивает взаимную сопряженность, поэтому лучше называть его коэффициентом взаимной сопряженности. Оба коэффициента изменяются в пределах от  $-1$  до  $1$ .



**Пример 1.10.** По данным рис. 1.10, а и табл. 1.8 определим тесноту и направление сопряженности для  $a = 0,1, b = 0,3, c = 0,5, d = 0,1$  по формулам (1.29) и (1.30):

$$Q = \frac{0,1 \cdot 0,1 - 0,5 \cdot 0,3}{0,1 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,3} = \frac{0,01 - 0,15}{0,01 + 0,15} = -\frac{0,14}{0,16} = -0,875;$$

$$\Phi = \frac{0,1 \cdot 0,1 - 0,5 \cdot 0,3}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = -\frac{0,14}{0,24} = -0,583.$$

Сопоставив полученные значения  $Q$  и  $\Phi$ , можно видеть, что коэффициент  $\Phi$  дает более осторожную оценку сопряженности, чем коэффициент  $Q$ .

Таблица 1.8

Четырехклеточное (альтернативное) распределение

События и меры возможности их появления	A	$\bar{A}$	Частоты, частоты или вероятности событий B
B	a	b	a + b
$\bar{B}$	c	d	c + d
Частоты, частоты или вероятности событий A	a + c	b + d	a + b + c + d

Связь между значениями  $Q$  и  $\Phi$  и совместным распределением вероятностей событий иллюстрирует табл. 1.9. Неодинаковая чувствительность  $Q$  и  $\Phi$  к форме совместного и безусловных распределений позволяет рекомендовать к использованию коэффициент  $Q$  тогда, когда частоты концентрируются преимущественно в трех клетках таблицы

Таблица 1.9

К сопоставлению коэффициентов контингенции и ассоциации (по: Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. М., 1988. С. 238)

	A	$\bar{A}$	f(B)		A	$\bar{A}$	f(B)		A	$\bar{A}$	f(B)
B	15	5	20	B	19	1	20	B	20	0	20
$\bar{B}$	35	45	80	$\bar{B}$	31	49	80	$\bar{B}$	30	50	80
f(A)	50	50	100	f(A)	50	50	100	f(A)	50	50	100
$Q = 0,58;$			$\Phi = 0,28$	$Q = 0,94;$			$\Phi = 0,45$	$Q = 1,00;$			$\Phi = 0,50$

Коэффициенты  $m \times n$ -клеточной сопряженности вычисляются по следующим формулам:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \quad \text{или} \quad C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}}; \quad (1.31)$$

$$K = \begin{cases} \sqrt{\frac{\chi^2}{N\sqrt{(m-1)(n-1)}}} & \text{при } m \neq n, \\ \sqrt{\frac{\chi^2}{N(n-1)}} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (1.32)$$

Здесь  $\varphi^2 = \chi^2 : n$ ,  $N$  — общее число наблюдений,  $m$  и  $n$  — число строк и столбцов в таблице.

Коэффициент  $C$  предложен К. Пирсоном и часто называется коэффициентом взаимной сопряженности Пирсона. Коэффициент  $K$  предложен А. А. Чупровым и часто называется коэффициентом взаимной сопряженности Чупрова. В оба коэффициента входит величина  $\chi^2$ , имеющая в статистике большое значение. Мы будем рассматривать  $\chi^2$  подробно в главе 5, а здесь познакомимся с ее вычислением:

$$\chi^2 = \sum_j \sum_i \frac{(f_{ij} - f_{ij}^*)^2}{f_{ij}^*}, \quad (1.33)$$

где  $f_{ij}$  — наблюдаемая в опыте частота,  $f_{ij}^*$  — теоретически ожидаемая частота.

Если вместо частот применять вероятности, то формула (1.33) переписывается следующим образом:

$$\chi^2 = n \sum_j \sum_i \frac{(P_{ij} - P_{ij}^*)^2}{P_{ij}^*},$$

где  $n = \sum_j \sum_i f_{ij}$  — объем выборки. Рассмотрим вычисление  $\chi^2$  и коэффициентов  $C$  и  $K$  на примере.

**Пример 1.11.** По данным наблюдения определить, имеется ли у людей сопряженность между цветом волос и цветом глаз. В табл. 1.10 приведены частоты совместного распределения трех градаций цвета глаз и четырех градаций цвета волос, а также безусловные распределения. В каждой клетке, соответствующей совместному появлению событий  $A_i B_j$ , записаны три числа (сверху вниз): эмпирическая частота  $f_{ij}$ , ожидаемая частота  $f_{ij}^*$  и разность  $f_{ij} - f_{ij}^*$ .

Ожидаемая частота  $f_{ij}^*$  определяется из условия независимости событий, по которому частота совместного появления независимых событий равна произведению безусловных частот, деленному на общее число наблюдений:

$$f_{ij}^* = \frac{1}{n} f(A_i) f(B_j),$$

Таблица 1.10

Совместное распределение частот цвета волос ( $B_i$ ) и цвета глаз ( $A_j$ ) к примеру 1.11 (по: Урбах В. Ю. Биометрические методы. М., 1964. С.357)

	светлые $B_1$	русые $B_2$	черные $B_3$	рыжие $B_4$	$f(A_j)$
голубые $A_1$	177 117 60	71 96 -25	17 47 -30	14 19 -5	279
серые $A_2$	95 131 -36	119 108 11	75 53 22	25 22 3	314
карие $A_3$	12 36 -24	44 30 14	23 15 8	8 6 2	87
$f(B_i)$	284	234	115	47	680

где  $n = \sum_i f(A_j) = \sum_j f(B_i)$  — общее количество наблюдений,  $f(A_j)$  и  $f(B_i)$  понятны из табл. 1.10. Используя значения разностей  $f_{ij} - f_{ij}^*$  (из табл. 1.10), определим слагаемые в формуле для  $\chi^2$ , а затем и саму величину  $\chi^2$ .

$$\begin{array}{ll}
 60^2 : 117 = 30,8 & 22^2 : 53 = 9,1 \\
 36^2 : 131 = 9,9 & 8^2 : 15 = 4,3 \\
 24^2 : 36 = 16,0 & 5^2 : 19 = 1,3 \\
 25^2 : 96 = 6,5 & 3^2 : 22 = 0,4 \\
 11^2 : 108 = 1,1 & 2^2 : 6 = 0,7 \\
 14^2 : 30 = 6,5 & \\
 30^2 : 47 = 19,2 & \chi^2 = 105,8 \approx 106.
 \end{array}$$

По одной из формул (1.31) вычислим коэффициент взаимной сопряженности Пирсона:  $C = \sqrt{106 : (106 + 680)} \approx 0,37$ . Коэффициент Чупрова (1.32) дает несколько меньшую величину:  $K = \sqrt{106 : 680 : \sqrt{2 \cdot 3}} \approx 0,25$ .

Правила использования коэффициентов  $C$  и  $K$  сводятся, во-первых, к правилам применения  $\chi^2$  и, во-вторых, к следующему: считается, что коэффициент Чупрова менее, чем коэффициент Пирсона, чувствителен к количеству событий  $m \times n$ , поэтому при малых значениях  $m \times n$  лучше применять коэффициент  $K$ . Отметим, что оба коэффициента изменяются только от нуля до единицы и измеряют тесноту сопряженности, не указывая ее направления, о котором легко судить по форме совместного распределения вероятностей (частот) событий.

### 1.3.4. Последовательности событий

Пусть в каждом из  $n$  последовательных испытаний может появиться одно из  $s$  несовместных событий  $A_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ), образующих полную группу. Пусть  $P_{ik}$  — это вероятность появления события  $A_{ik}$ . Тогда в результате  $k$  испытаний реализуется некоторая последовательность событий:

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik-1}, A_{ik}.$$

Если испытания независимые, то появление каждого  $i$ -го события не зависит от его места в последовательности и определяется только безусловной вероятностью  $P_i$ . В этом случае события независимы в последовательности\*, и такую последовательность событий называют *последовательностью Бернулли*.

Если испытания зависимые, то появление каждого  $i$ -го события зависит от того, какие события появились до него, т. е. от места в последовательности. В этом случае события являются зависимыми в последовательности. Такая последовательность называется *цепью Маркова*. Различают простые и сложные, однородные и неоднородные цепи Маркова. Если для каждого из событий условная вероятность появиться в  $k+1$ -м испытании зависит от того, какое событие появилось в  $k$ -м испытании и не зависит от информации о событиях, наступивших во всех предыдущих  $k-1$ -х испытаниях, то последовательность событий называется *простой цепью Маркова*; события в простой цепи Маркова зависят в последовательности только попарно. Если условная вероятность появиться в  $k+1$ -м испытании зависит от того, какие события появились в двух или более предшествующих испытаниях, то последовательность событий называется *сложной цепью Маркова*; в ней события зависят в последовательности по два, по три и вообще — по  $h$ , где  $2 \leq h \leq n$ . Если в реализации последовательности величина  $h$  не изменяется, то цепь Маркова является *однородной*. Простая цепь по определению всегда однородна. Если  $h$  переменна, то сложная цепь Маркова является *неоднородной*.

Обычно цепям Маркова дают следующую «физическую» интерпретацию. Некоторая система (биологическая, экономическая, социальная, психическая и т. п.) может находиться в  $s$  состояниях:  $A_1, A_2, \dots, A_s$ , несовместных и образующих полную группу. В некоторые (случайные или определенные) моменты времени  $t_k$  или при некоторых условиях  $\Omega_k$  система переходит из состояния

\*Отметим, что, будучи в указанном смысле независимыми в последовательности, несовместные события зависимы в совокупности (в полной группе).

$i$  в состояние  $j$  ( $i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, s$ ) с некоторой условной вероятностью  $P_{ij} = P(A_j / \prod_h A_h)$ , причем, как определено выше, при  $h = 1$  последовательность состояний системы описывается простой (однородной) цепью Маркова, а при  $h \geq 2$  — сложной, однородной или неоднородной. Количество зависимых в последовательности событий  $h$  называют «памятью» системы. В этой связи системы, для которых динамика состояний описывается простой цепью Маркова, обычно называют «системами без памяти». В случае описания системы сложной цепью Маркова говорят о системе с памятью; чем больше  $h$ , тем лучше память. Легко понять, что для многих объектов психологии человека и животных можно применять только сложные, в том числе неоднородные (из-за флуктуаций памяти) цепи Маркова. Но это не означает, что в психологии совсем лишено смысла применение сравнительно более разработанного аппарата простых цепей. Оно вполне оправдано для первоначальных моделей динамики состояний (и других событий) во всех отраслях психологической науки.

Итак, под цепью событий будем понимать систему случайных событий  $A_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, s$ , обозначающих, в частности, состояния наблюдаемого объекта или процесса, вместе с соответствующими им безусловными вероятностями находиться в  $i$ -м состоянии и условными вероятностями переходить из  $i$ -го состояния в  $j$ -е, которые называются *переходными вероятностями* и обозначаются здесь  $P_{ij}$ . Множество безусловных вероятностей до и после  $k$ -го перехода («шага» наблюдения) образуют безусловные распределения вероятностей  $P_{k-1}$  и  $P_k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , причем для первого шага при  $k = 1$   $P_0$  называют *начальным распределением состояний*. Для каждого  $k$ -го шага совокупность переходных вероятностей  $P_{ij}$  образует *матрицу переходных вероятностей* (матрицу перехода, переходную матрицу, стохастическую матрицу — это все синонимы).

$$P_{k/k-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ s \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{1/1} \\ P_{2/1} \\ \dots \\ P_{s/1} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ s \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1s} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{s1} & P_{s2} & \dots & P_{ss} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (1.34)$$

В этой матрице  $P_{j/i}$  — частные условные распределения вероятностей  $P_{ij}$  при  $k$ -том переходе, причем для  $i = j$  они означают сохранение предыдущего состояния. Напомним, что для каждой строки в (1.34) должно выполняться условие нормировки (1.7): сумма переходных вероятностей из  $i$ -го состояния во все  $s$  состояний равна единице.

В общем случае сложных цепей указанные распределения вероятностей связаны на  $k$ -м шаге матричным уравнением

$$P_k = P_{k-1} \cdot P_{k/k-1}, \quad (1.35)$$

а за  $k$  последовательных переходов от начального распределения состояний — уравнением

$$P_k = P_0 \cdot P_{1/0} \cdot P_{2/1} \cdot \dots \cdot P_{k/k-1} = \prod_{m=1}^k P_{m/m-1} = P_0 \cdot P_{k/0}, \quad (1.36)$$

где применяется скалярное умножение матриц (см. Приложение 1),  $\prod$  — знак произведения  $k$  сомножителей,  $m = 1, 2, \dots, k$  — номера переходов.

Геометрически уравнения (1.35) и (1.36) можно иллюстрировать на графах. На рис. 1.11, а изображен граф цепи в виде дерева событий (исходов) при двух переходах. Если этот граф продолжить и свернуть, объединяя одноименные вершины и обобщая линии, то получится граф состояний — рис. 1.11, б, в котором безусловные вероятности *выходов* на вершины образуют начальное распределение состояний  $P_0$ , безусловные вероятности *выходов* из вершин — конечное распределение состояний  $P_k$  после  $k$  переходов, а условные вероятности на петлях и дугах графа образуют матрицу перехода  $P_{k/0}$  за  $k$  шагов

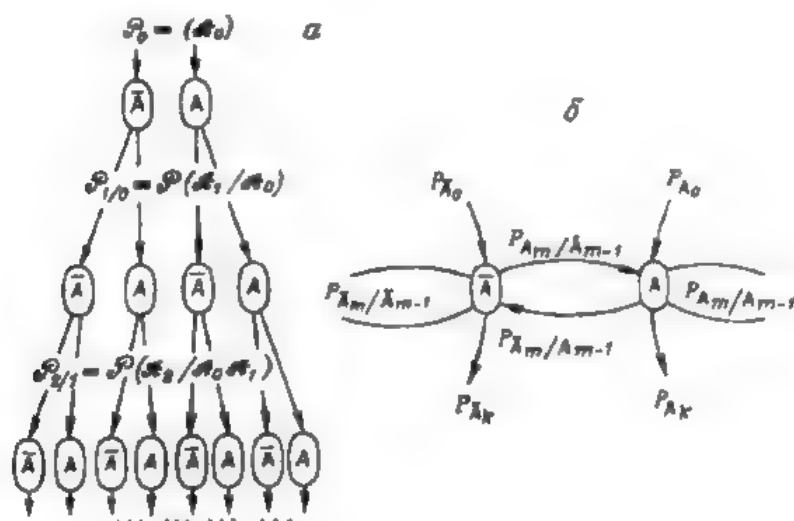


Рис. 1.11. Дерево событий (а) и граф состояний (б), геометрически иллюстрирующие распределения вероятности в цепях событий (см. уравнения (1.35) и (1.36)).

Матричные уравнения упрощаются для цепей Бернулли и простых цепей Маркова. Для бернуллиевской цепи характерна полная независимость событий, и, следовательно, по определению (1.27), все условные распределения на  $k$  переходах остаются равными начальному безусловному распределению вероятностей; поэтому  $P_k = P_0$ . Для простой марковской цепи характерна лишь попарная зависимость между событиями и независимость по три и больше событий. По этой причине все переходные матрицы численно равны матрице первого перехода:  $P_{k/k-1} = P_{1/0}$  для всех  $k > 1$ . Поэтому в уравнении (1.36) скалярное произведение  $k$  переходных матриц заменяется на  $k$ -тую степень первой из них.

$$P_k = P_0 \cdot P_{1/0}^k,$$

что, конечно, существенно уменьшает трудность эмпирической оценки переходных матриц простых цепей по сравнению со сложными

**Пример 1.12.** В эксперименте испытуемому  $k$ -кратно предъявляют  $s$  незнакомых объектов, из которых он после каждого предъявления воспроизводит  $n_k$  и не воспроизводит  $s - n_k$  объектов. Эксперимент продолжается до тех пор, пока не будут верно воспроизведены все объекты, т. е. пока  $n_k$  не станет равно  $s$ . В подобном эксперименте возможны три ситуации. Первая ситуация: испытуемый не может воспроизвести ни одного нового объекта либо, узнав сразу же некоторые, известные ему прежде, остальные не воспроизводит. Вторая ситуация: в каждой попытке испытуемый запоминает и воспроизводит *одинаковую* долю объектов, не изменяющуюся от предъявления к предъявлению. Третья ситуация: доля запоминаемых и правильно воспроизводимых объектов *изменяется* *направленно*, например увеличивается от попытки к попытке. Эти ситуации можно формализовать в виде цепей событий, которых здесь всего два — *воспроизвел* (В) или *не воспроизвел* ( $\bar{В}$ ) испытуемый предъявленные на  $k$ -м шаге объекты, но цепи и результаты разные

Первая ситуация моделируется цепью Бернулли. Например, если среди 30 предъявленных испытуемому вначале объектов ему знакомы 3 объекта и он может их правильно воспроизвести, а остальные 27 объектов он не знает и без длительного изучения воспроизвести не может, то частоты и частотности результатов нескольких предъявлений будут, как показано в табл. 1.11. Здесь, действительно, все безусловные и условные распределения равны, так как  $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = (0,9\bar{В}, 0,1В)$ , а в переходной матрице условные вероятности сохранить состояния равны единицам (это достоверные события), но условные вероятности перейти в противоположное состояние равны нулю (поскольку это невозможные



Таблица 1.11

Распределение частот и частостей после начального и следующих трех предъявлений шагов и примеру 1.12

Ситуация	События	Частота				Частость			
		0	1	2	3	0	1	2	3
I	$\bar{B}$	3	3	3	3	0,1	0,1	0,1	0,1
	$B$	27	27	27	27	0,9	0,9	0,9	0,9
II	$\bar{B}$	0	21	27	29	0,0	0,7	0,9	0,97
	$B$	30	9	3	1	1,0	0,3	0,1	0,03
III	$\bar{B}$	0	21	28	30	0,0	0,7	0,933	1,0
	$B$	30	9	2	0	1,0	0,3	0,067	0,0

в данной ситуации события); так что

$$P_{1/0} = P_{2/1} = P_{3/2} = \begin{matrix} \bar{B} & B \\ \bar{B} & B \end{matrix} \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем подтверждение пригодности бернуллиевской цепи для моделирования первой ситуации:

$$\begin{aligned} P_k &= P_0 \cdot P_{1/0} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,9 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 \cdot 1,0 & 0,9 \cdot 0,0 \\ 0,1 \cdot 0,0 & 0,1 \cdot 1,0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \bar{B} & B \\ 0,9 & 0,1 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Вторая ситуация может моделироваться простой цепью Маркова. При начальном предъявлении объекты неизвестны, и безусловное начальное распределение частостей — это  $P_0 = (1,0\bar{B}, 0,0B)$  (табл. 1.11). Но в процессе первого перехода из невоспроизведенных объектов воспроизводятся 21 и остаются невоспроизведенными 9 объектов, т.е. переходные частости составляют  $P_{\bar{B}/\bar{B}} = 0,3$  и  $P_{B/\bar{B}} = 0,7$ . Если учесть, что воспроизведение объекта — достоверное событие и не забывается в течение эксперимента, то переходные вероятности при условии  $B$  снова равны соответственно нулю и единице. Таким образом, первая переходная матрица в целом такова:

$$P_{1/0} = \begin{matrix} \bar{B} & B \\ \bar{B} & B \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Используя эту матрицу, проверяем гипотезу о простой цепи Маркова. После первого предъявления получаем:

$$\begin{aligned} P_1 = P_0 \cdot P_{1/0} &= \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 1,0 & 0,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,0 \cdot 0,3 & 1,0 \cdot 0,7 \\ 0,0 \cdot 0,0 & 0,0 \cdot 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Во время второго перехода из 9 оставшихся невоспроизведенных объектов 6 воспроизводятся, а 3 остаются в прежнем состоянии. Следовательно, переходная матрица практически сохраняется:  $P_{\bar{B}/\bar{B}} = 3/9 \cong 0,3$ ,  $P_{B/\bar{B}} = 6/9 \cong 0,7$ . Поэтому

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 \cdot P_{2/1} = P_0 \cdot P_{1/0} &= \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,3 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,7 \\ 0,7 \cdot 0,0 & 0,7 \cdot 1,0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

что соответствует данным табл. 1.11. При третьем переходе воспроизведены 2 из 3 оставшихся объектов, а переходная матрица остается прежней (с округлением до десятых долей):

$$P_3 = P_2 \cdot P_{3/2} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix},$$

что совпадает с данными табл. 1.11. Значит, можно считать простую цепь вполне удовлетворительной моделью для второй ситуации

Третья ситуация моделируется сложной цепью Маркова. Как показывают данные табл. 1.11, испытуемый по ходу предъявлений улучшает свои результаты: доля воспроизведений увеличивается, составляя при первом переходе  $21/30 = 0,7$ , при втором —  $(28 - 21) : 9 = 0,8$  и при третьем —  $(30 - 28) : 2 = 1,0$ . Следовательно, переходные матрицы изменяются от первого предъявления к

третьему.

$$P_{1/0} = \begin{matrix} & \bar{B} & B \\ \bar{B} & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad P_{2/1} = \begin{matrix} & \bar{B} & B \\ \bar{B} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$P_{3/2} = \begin{matrix} & \bar{B} & B \\ \bar{B} & \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Вычисляя по 1.35 безусловные распределения, получаем в результате первого предъявления прежнее распределение:

$$P_1 = P_0 \cdot P_{1/0} = (0,3, 0,7);$$

в результате второго —

$$P_2 = P_1 \cdot P_{2/1} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$$

и в результате третьего перехода —

$$P_3 = P_2 \cdot P_{3/2} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B} & B \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти распределения частот с приведенными в табл. 1.11, убеждаемся в адекватности сложной цепи как модели для третьей ситуации.

## 1.4 КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ СОБЫТИЙ

### 1.4.1. Ранжирование событий по величине

Если некоторое психическое явление обладает свойством, более или менее выраженным у разных людей, в различных жизненных ситуациях и т.п., то, пользуясь специальными экспериментальными приемами, разработанными в психологии\*, можно упорядочить проявления данного свойства по степени выраженности — по величине. Тогда проявление некоторой величины интересующего нас свойства может рассматриваться как событие и притом случайное событие. А множество таких событий, образующее

\*См., напр.: Решлен М. Измерение в психологии // Экспериментальная психология / Под ред. П. Фресса и Ж. Пиаже. М., 1966; Грин В. Ф. Измерение установок // Математические методы в современной буржуазной социологии / Под ред. Г. В. Осипова. М., 1966.

полную группу относительно области проявления рассматриваемого свойства (от минимума до максимума), составляет систему упорядоченных событий.

Система упорядоченных событий отличается от рассмотренных в предыдущем изложении тем, что может быть геометрически изображена на оси, как показано на рис. 1.12. Однако упорядочивание только на основе оценок «больше—меньше» не дает еще никакой числовой определенности. Числовая определенность достигается ранжированием, т. е. приписыванием баллов (или рангов)  $y_i$  событиям  $x_i$ . В качестве баллов используются 0 и числа натурального ряда—1, 2, 3 и т. д., причем не только положительные, но и отрицательные\*. При ранжировании заменяют неизвестные и обычно неравные интервалы между значениями упорядоченной переменной  $X$  равными интервалами  $\lambda = y_{i+1} - y_i$  между баллами  $Y$ , как это показано на рис. 1.13. Очевидно, что такое «уравнивание» интервалов семантически фиктивно. Но формально это допустимое приближение, так как математически ранжирование эквивалентно линеаризации: нелинейные приращения  $\Delta x_i$  переменной  $X$  заменяются линейными приращениями  $\Delta y_i$  переменной  $Y$ .



Рис. 1.12 Система упорядоченных событий.  
 $X$  — изучаемое свойство;  $x_i$  — его проявление ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ , причем  $x_{i+1} > x_i$  при всех  $i$ )

Часто упорядоченная переменная выражается через сумму баллов, «набрасываемых» испытуемым в результате выполнения группы заданий. Причем, если каждое задание оценивается по двух-, трех-, пяти- и вообще  $k$ -балльной шкале, то сумма баллов  $Y$  может принимать значения в пределах:

$$0 \leq Y \leq km,$$

где  $k$  — максимально возможное количество баллов в шкале;  $m$  — количество заданий в группе. В этой ситуации, типичной для большинства отраслей психологии, изучающих объекты более сложные, чем явления сенсомоторики, суммы баллов уже могут не образовывать равных интервалов в конкретном исходе опыта.

\*Строго говоря, ранги всегда положительны. Отрицательные ранги — это центральные отклонения, результат центрирования ранжированной переменной.

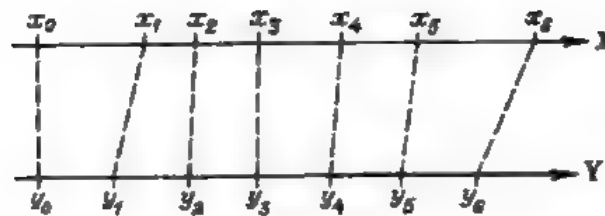


Рис. 1.13. Ранжирование системы упорядоченных событий  
 $Y$  — баллы (ранги);  $y_i$  — равноотстоящие значения баллов.  
 Остальные обозначения, как на рис. 1.12.

Тогда формальное уравнивание интервалов достигается группировкой исходных сумм баллов в классы длиной  $\lambda$ , где  $\lambda$  обычно больше или равно 2.

Выбор классового интервала  $\lambda$  и определение границ переменной суммы баллов  $Y$  состоит в следующем. Пусть  $y_{\min}$  — минимальное, а  $y_{\max}$  — максимальное значения  $Y$ . Тогда

$$\lambda = \text{ant} \left\{ \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta_y} \right\}, \quad (1.37)$$

где  $\lambda$  — классовый интервал,  $\text{ant}$  — обозначение ближайшей целой части,  $\Delta_y$  — натуральное число, причем обычно необходимо, чтобы  $\Delta_y \geq 8$  (насколько позволяет количество наблюдений). Затем выбираются границы классов ( $y_i$ ). Первая (нулевая) граница  $y_1 \leq y_{\min}$ , для того чтобы  $y_{\min}$  не оказался за пределами классификации. Аналогично требуется, чтобы граница последнего класса  $y_{n+1} \geq y_{\max}$ . Конкретные значения классовых границ, начиная со второй, определяются последовательно по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \lambda,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . В результате переменная сумма баллов  $Y$  снова изображается в равных интервалах  $\lambda$  (но  $\lambda \neq 1$ ) на числовой оси, как на рис. 1.13.

Наряду с границами классов при группировке данных используются средние значения классов. Эти значения — обозначим их  $w_i$  — определяются, если выбраны границы классов\*  $y_i$ , по уравнению

$$w_i = y_i + 0,5\lambda,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n+1$  для  $y$  и  $i = 1, 2, \dots, n$  для  $w_i$ .

\*Во многих случаях сначала выбирают  $w_1$ , например когда 0 баллов желательно сделать началом отсчета. Тогда границы определяют исходя из средних значений интервалов:  $y_1 = w_1 - 0,5\lambda$  и  $y_{i+1} = w_i + 0,5\lambda$ .

## 1.1. Распределение вероятностей ранжированной системы упорядоченных событий

Каждому значению балла  $y_i$  (или  $w_i$ ) как случайному событию соответствует вероятность (частота, частость) его появления. Пусть на оси абсцисс отложены значения баллов  $y_{i+1} > y_i$  (для  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ), тогда каждому интервалу значений переменной суммы баллов  $Y$  соответствует вероятность  $P(y_i \leq Y \leq y_{i+1})$ , которая геометрически может быть представлена площадью прямоугольника с основанием  $\lambda$  и высотой  $f(Y)$ :

$$P(y_i \leq Y \leq y_{i+1}) = f(Y)\lambda.$$

Фигура, образованная такими прямоугольниками, расположенными вплотную друг к другу на плоскости, называется *гистограммой* распределения вероятностей (частостей, частот) ранжированной системы упорядоченных событий. Гистограмма при  $\lambda = 1$  изображена на рис. 1.14, а. На основании выполнения неравенства  $y_{i+1} > y_i$  значения баллов  $y_i$  при любых  $i$  на оси абсцисс фиксированы не произвольно, как это имело место для системы классифицированных событий. Поэтому в отличие от диаграмм распределения, рассмотренных выше, гистограмма распределения имеет конфигурацию, зависящую от ординат  $f(Y)$  и классowego интервала  $\lambda$ , но не допускающую перестановок «столбиков» на оси абсцисс.

В отличие от системы классифицированных событий система упорядоченных событий характеризуется тем, что изучаемое свойство  $X$  — это по существу непрерывная латентная переменная, которая лишь в силу обстоятельств представлена в виде ряда дискретных значений\*. Поэтому следует ожидать, что и вероятности значений  $x_i$  переменной  $X$  должны изменяться непрерывно, а не «скачками», как на гистограмме. В этой связи более удобной плоской фигурой для геометрического изображения вероятности появления баллов на интервале  $\lambda$  является прямоугольная трапеция, равновеликая прямоугольнику гистограммы (рис. 1.14, а). Обозначив ординаты сторон такой трапеции как  $f(y_i)$  и  $f(y_{i+1})$ , где  $y_i$  и  $y_{i+1}$  — абсциссы интервала  $\lambda$ , очевидно, получим площадь трапеции, изображающую вероятность

$$P(y_i \leq Y \leq y_{i+1}) = 0,5[f(y_i) + f(y_{i+1})]\lambda,$$

где  $P(y_i \leq Y \leq y_{i+1})$  — вероятность появления баллов на интервале  $\lambda$

\*Непрерывной называется переменная, принимающая на бесконечно малом интервале бесконечно большое число значений. Дискретная переменная на конечном интервале имеет конечное число значений.

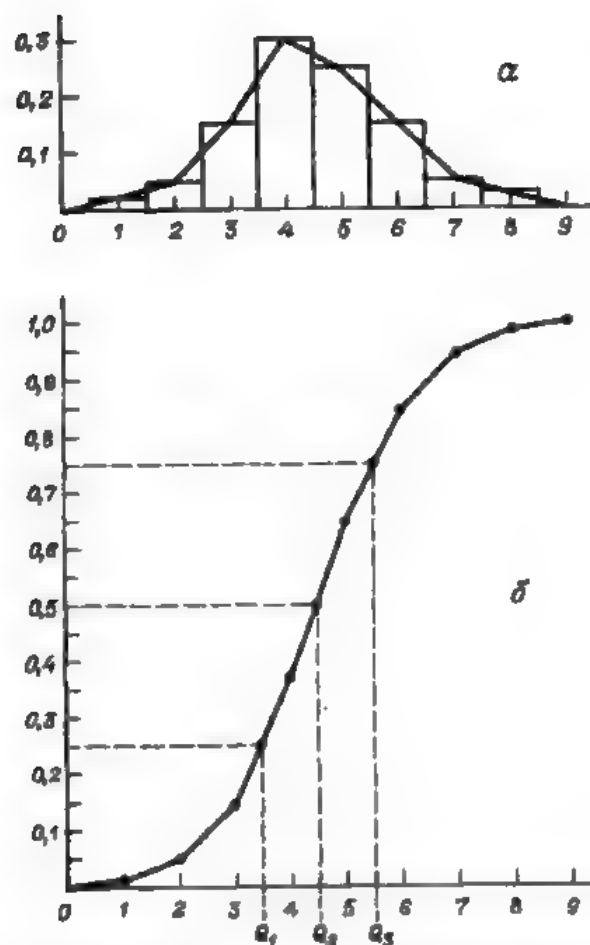


Рис. 1.14. Гистограмма, полигон (а) и кумулята (б) распределения оценок вероятностей ражированной системы упорядоченных событий (по данным табл. 1.12). По оси абсцисс — баллы, по оси ординат — частоты.  $Q_1, Q_2, Q_3$  — первый, второй и третий квартили

Фигура, образованная такими трапециями, расположенными вплотную друг к другу на плоскости  $Y, f(y)$ , называется *полигоном*, или *многоугольником* распределения (рис. 1.14, а). Полигон распределения более точно выражает изменение вероятностей значений упорядоченной непрерывной переменной, чем гистограмма. Но в результате группировки экспериментальных данных обычно сначала получают гистограмму. Чтобы построить по



гистограмме полигон, нужно соединить отрезками прямых линий середины верхних граней соседних прямоугольников гистограммы. А чтобы площадь полигона равнялась площади гистограммы, нормированной к единице, —

$$\sum_i P(y_i \leq Y \leq y_{i+1}) = 1,$$

надо середины верхних граней крайних слева и справа прямоугольников гистограммы соединить отрезками прямой с точками  $y_{\min} - \lambda$  и  $y_{\max} + \lambda$  на оси абсцисс, заменив тем самым крайние прямоугольники на равнобедренные треугольники (рис. 1.14, а).

Наряду с вероятностями появления значений на отдельных фиксированных интервалах наблюдений большое значение имеет вероятность того, что рандомизированная переменная не превзойдет одного из возможных значений.

$$P(Y \leq y_i) = \sum_{y_{\min}}^{y_i} P(y_{i-1} \leq Y \leq y_i), \quad (1.38)$$

где  $y_i - y_{i-1} = \lambda_i$  — интервал группировки, а  $y_i$  — среднее значение этого интервала. Если величина  $\lambda_i$  такова, что исследователь может интересоваться промежуточное значение  $y_{i-1} \leq y_j \leq y_i$ , то формула (1.38) уточняется:

$$P(Y \leq y_j) = \sum_{y_{\min}}^{y_{i-1}} P(y_{i-1} \leq Y \leq y_i) + \delta P(y_i),$$

где  $\delta = (y_j - y_{i-1}) : (y_i - y_{i-1})$  представляет собой долю интервала  $\lambda_i$ . В случае одинаковых интервалов группировки удобно отождествлять  $y_j$  и  $y_i$ ; тогда  $\delta = 0,5$  и формула интегральной вероятности принимает вид

$$P(Y \leq y_i) = \sum_{y_{\min}}^{y_{i-1}} P(y_{i-1} \leq Y \leq y_i) + 0,5 P(y_i), \quad (1.39)$$

где  $y_i = y_i$  — средние значения интервалов группировки. По этой формуле обычно и рассчитывают из частот гистограммы линию накопленных частот, которая называется *кумулятой*, или *интегральной функцией распределения* (рис. 1.14, б). Например, пусть распределение частот гистограммы (или эмпирическая *дифференциальная функция распределения*) задано значениями  $P(y_i) = (0,02y_1, 0,05y_2, 0,15y_3, 0,30y_4, 0,25y_5, 0,15y_6, 0,05y_7, 0,03y_8)$ , так что условие нормировки выполнено (табл. 1.12). Вычислим значения кумуляты по уравнению (1.39):  $P(Y \leq y_1) = 0,0 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,010$ ,  $P(Y \leq y_2) = 0,02 + 0,5 \cdot 0,05 = 0,045$ ,

$P(Y \leq y_2) = 0,02 + 0,05 + 0,5 \cdot 0,15 = 0,145, \dots, P(Y \leq y_7) = 0,02 + 0,05 + \dots + 0,15 + 0,5 \cdot 0,05 = 0,92 + 0,025 = 0,945, P(Y \leq y_8) = 0,92 + 0,05 + 0,5 \cdot 0,03 = 0,985$ . Объединяя результаты во множество значений кумуляты, получим:  $P(Y \leq y_i) = (0,010_{y_1}, 0,045_{y_2}, 0,145_{y_3}, 0,370_{y_4}, 0,645_{y_5}, 0,845_{y_6}, 0,945_{y_7}, 0,985_{y_8})$ . Заметим, что оставшиеся  $0,5 \cdot 0,03 = 0,015$  долей, которые приходятся на интервал  $\lambda$  справа от абсциссы  $y_8$ , дополняют кумуляту до единицы, как это видно из табл. 1.12.

Таблица 1.12

Частоты гистограммы, кумуляты и полигона к рис. 1.14

$y_i$	Гистограмма $P(y_i)$	Кумулята $P(Y \leq y_i)$	Полигон $P(y_i + 0,5)$
0	0,00	0,000	
1	0,02	0,010	0,010
2	0,05	0,045	0,035
3	0,15	0,145	0,100
4	0,30	0,370	0,225
5	0,25	0,645	0,275
6	0,15	0,845	0,200
7	0,05	0,945	0,100
8	0,03	0,985	0,040
9	0,00	1,000	0,015
$\Sigma_i$	1,00	-	1,00

По кумуляте легко вычисляются значения полигона, приходящиеся на интервалы  $y_{i+1} - y_i$ . Они определяются разностью соответствующих значений кумуляты:

$$P(y_{i+0,5}) = P(Y \leq y_{i+1}) - P(Y \leq y_i), \quad (1.40)$$

а также полусуммами соседних частот гистограммы.

$$P(y_i + 0,5) = 0,5 [P(y_i) + P(y_{i+1})]. \quad (1.41)$$

Отсюда правые части уравнений (1.40) и (1.41) должны быть равны:

$$P(Y \leq y_{i+1}) - P(Y \leq y_i) = 0,5 [P(y_i) + P(y_{i+1})],$$

что может служить для проверки безошибочности расчетов кумуляты и полигона по гистограмме.

Итак, распределение вероятностей ранжированной системы упорядоченных событий может быть задано мультимножеством, обычной таблицей и графически в двух основных и функционально взаимосвязанных формах: дифференциальной — гистограмма, полигон и интегральной — кумулята.

## 1.1.1 Количественные характеристики распределения вероятностей системы упорядоченных событий

Независимо от способа и формы задания, распределения вероятностей баллов  $Y$  упорядоченных переменных  $X$  различаются, во-первых, положением на числовой оси (рис. 1.15, а), во-вторых, рассеиванием значений переменной (рис. 1.15, б) и, в-третьих, асимметрией (косостью, скошенностью) рассеивания значений переменной (рис. 1.15, в). Степень выраженности этих трех свойств как по отдельности, так и в сочетаниях зависит от специфики упорядоченной переменной  $X$ , а также от условий, в которых она эмпирически изучалась. Пользуясь количественными характеристиками указанных свойств, психолог получает возможность сравнивать психические явления у разных людей и в различных условиях. Иначе говоря, поскольку распределения вероятностей характеризуют конкретные упорядоченные психические переменные, то, сравнивая распределения, опосредованно сравнивают психические переменные.

Количественные (числовые) характеристики свойств распределения вероятностей ранжированной переменной определяются на основе квантилей. *Квантилем* называется значение переменной, отделяющее от распределения «слева» или «справа» определенную долю объема совокупности. Если объем совокупности (площадь гистограммы или полигона) положен равным единице, то квантиль — это значение  $y$  переменной  $Y$ , для которого задана вероятность

$$P(Y \leq y) \quad \text{либо} \quad P(Y \geq y) = 1 - P(y \leq Y).$$

Среди квантилей, имеющих огромное значение в математической статистике, обычно используются квартили, децили и центили. *Квартили* делят совокупность на четыре части, поэтому их всего три. *Децили* делят совокупность на десять частей, их девять. *Центили* отделяют от совокупности по 0,01 части, их 99.

Для распределений упорядоченной переменной используются преимущественно квартили. Именно через квартили определяются в этом случае числовые характеристики положения, рассеива-

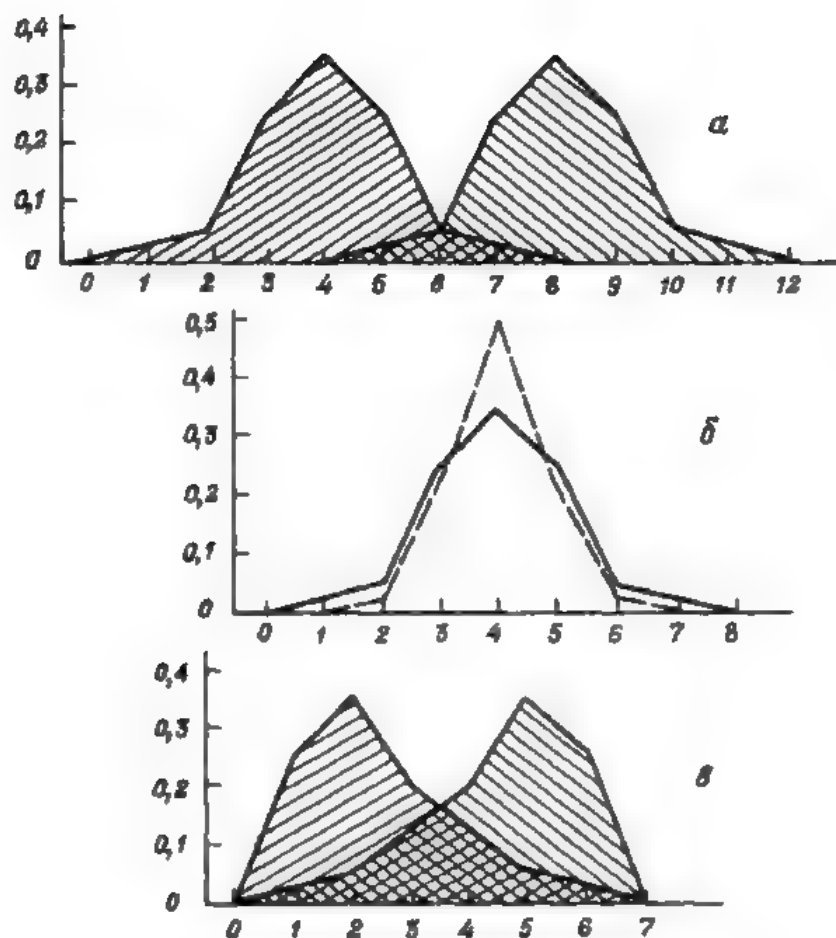


Рис. 1.15. Свойства распределения вероятностей ранжированной переменной.

а — положение, б — расщепление, в — асимметрия. По оси абсцисс — баллы, по оси ординат — вероятности.

ния и асимметрии. Первый квартиль  $Q_1$  отделяет слева 0,25 объема совокупности. Второй квартиль  $Q_2$  делит совокупность на две равные по объему части (по 0,5), он называется медианой. Наконец, третий квартиль  $Q_3$  отделяет слева 0,75 объема совокупности и справа 0,25 объема (см. рис. 1.14, б).

Вычисляются квартили по полигону или кумуляте, заданным графически либо таблично. Если переменная  $X$  ранжирована по

возрастанию ( $x_{i+1} > x_i$ , соответственно  $y_{i+1} > y_i$ ), то вычисления проводятся «слева — направо» по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Q_1 &= A(Q_1) + \lambda \left( \frac{n}{4} - S_A \right) \frac{1}{f(Q_1)}, \\ Q_2 &= A(Q_2) + \lambda \left( \frac{n}{2} - S_A \right) \frac{1}{f(Q_2)}, \\ Q_3 &= A(Q_3) + \lambda \left( \frac{3n}{4} - S_A \right) \frac{1}{f(Q_3)}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где  $Q_i$  —  $i$ -й квартиль;  $A(Q_i)$  — начало классového интервала, в котором находится  $i$ -й квартиль;  $\lambda$  — классовой интервал;  $n$  — объем совокупности в частотах ( $n = 1$ , если используются частоты или вероятности);  $S_A$  — сумма частот (частостей, вероятностей) классов, предшествующих тому классу, где находится  $i$ -й квартиль ( $S_A = P[Y \leq A(Q_i)]$ );  $f(Q_i)$  — частота (частость, вероятность), соответствующая классу, где находится  $i$ -й квартиль.

Если переменная  $X$  ранжирована по убыванию ( $x_{i+1} < x_i$ , но  $y_{i+1} > y_i$ ), то вычисления проводятся «справа — налево» по формулам

$$\begin{aligned} Q_1 &= B(Q_1) - \lambda \left( \frac{3n}{4} - S_B \right) \frac{1}{f(Q_1)}, \\ Q_2 &= B(Q_2) - \lambda \left( \frac{n}{2} - S_B \right) \frac{1}{f(Q_2)}, \\ Q_3 &= B(Q_3) - \lambda \left( \frac{n}{4} - S_B \right) \frac{1}{f(Q_3)}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Здесь  $B(Q_i)$  — «конец» класса, где находится  $i$ -й квартиль;  $S_B$  — сумма частот (частостей, вероятностей) классов, следующих за классом, где находится  $i$ -й квартиль; остальные обозначения те же, что и в формулах (1.42)\*.

Мерой положения распределения вероятностей ранжированной переменной является *медиана* ( $Me = Q_2$ ). Для симметричных распределений медиана совпадает с модой, для асимметричных не совпадает. Медиану рассматривают как центр рассеивания значений ранжированной переменной.

Приближенной мерой рассеивания является *размах распределения*. Это область существования (или экспериментального определения) ранжированной переменной. Очевидно, чем больше размах, тем больше и рассеивание значений относительно медианы. Однако при одном и том же размахе рассеивание значений может

\*Отметим, что формулы (1.43) можно использовать для проверки вычислений по (1.42)

быть более или менее «сжатым». «Чувствительной» мерой рассеивания является *полуинтерквартильное* (вероятное, срединное) *отклонение*. Оно определяется как половина интервала рассеивания, включающего медиану, которому соответствует половина объема совокупности, т. е.

$$E = 0,5(Q_3 - Q_1), \quad (1.44)$$

где  $E$  — полуинтерквартильное отклонение;  $Q_3$  и  $Q_1$  — третий и первый квартили. Для симметричных распределений (рис. 1.15, а и б)

$$E = Me - Q_1 = Q_3 - Me,$$

а для асимметричных распределений (рис. 1.15, в)

$$Me - Q_1 \neq Q_3 - Me.$$

На этом и основана количественная оценка асимметрии распределения

Мерой асимметрии является *квартильный коэффициент асимметрии*  $As(Q)$ , который определяется по формуле

$$As(Q) = \frac{1}{2E}(Q_1 + Q_3 - 2Me), \quad (1.45)$$

где  $-1 < As(Q) < 1$ . Из уравнения (1.45) нетрудно установить, что для симметричных распределений  $As(Q) = 0$  (рис. 1.15, а, б). При скошенности влево  $As(Q) > 0$ , а при скошенности вправо, наоборот,  $As(Q) < 0$  (рис. 1.15, в). Поэтому скошенность (асимметрию) влево называют *положительной*, а скошенность вправо — *отрицательной*<sup>9</sup>.

**Пример 1.13.** По одному из субтестов батареи Векслера (отечественный вариант) на выборке в 100 испытуемых получены суммы баллов (табл. 1.13). Осуществим группировку данных, определим гистограмму, кумуляту распределения (в частотах) и его числовые характеристики.

Для получения частот гистограммы нужно упорядочить и сгруппировать эмпирические данные. Записанные в табл. 1.13, они по сути представляют собой развернутое и неупорядоченное

<sup>9</sup>Необходимо отметить, что наряду с указанными мерами положения, рассеивания и асимметрии для ранжированных случайных переменных применяются среднее арифметическое значение, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса, рассматриваемые далее (см. 2.2). Допустимость их вычисления обосновывается, во-первых, тем, что упорядоченная система событий гомоморфно отображает непрерывную случайную величину, во-вторых, тем, что формулы этих мер представляют собой монотонно возрастающие преобразования, приемлемые для шкал порядка, и, наконец, тем, что баллы (ранги) в результате линеаризации (см. рис. 1.13) метрически определены.

Суммы баллов к примеру 1.13

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
15	20	14	13	10	9	24	17	11	16
12	15	16	5	15	15	7	9	25	23
20	16	14	17	21	15	10	19	22	25
18	16	10	20	24	11	15	15	17	15
10	11	22	22	22	19	17	20	14	11
14	12	24	16	9	23	13	11	18	17
18	23	22	19	23	26	19	14	22	19
17	21	21	18	16	20	21	15	23	16
15	24	18	14	18	12	20	16	15	20
22	23	16	15	14	5	20	22	20	22

мультимножество, которое надо упорядочить и свернуть. Для этого, просматривая таблицу, переписывают числовые значения по возрастанию их величины, начиная с минимального, причем одинаковые значения записываются рядом. В результате получается так называемый *вариационный ряд* — упорядоченное по возрастанию мультимножество данных; но оно еще находится в развернутой форме: 5, 5, 7, 9, 9, ..., 25, 25, 26. Затем количество одинаковых значений записывается в виде кратностей — частот значений. Таким образом, получается распределение частот баллов:  $\mathcal{F}(Y) = (2 \cdot 5, 7, 2 \cdot 9, \dots, 2 \cdot 25, 26)$ . Сумма частот здесь равна 100. Нормируя этой суммой частоты баллов, преобразуют распределение частот в распределение частостей гистограммы:  $\mathcal{P}(Y) = (0,02 \cdot 5, 0,01 \cdot 7, 0,02 \cdot 9, \dots, 0,02 \cdot 25, 0,01 \cdot 26)$ . Чтобы получить частости кумуляты по гистограмме, следует воспользоваться, как это было сделано раньше, формулой (1.39).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Y \leq y_i) &= \left[ (0,00 + 0,5 \cdot 0,02) \cdot 5, (0,02 + 0,5 \cdot 0,01) \cdot 7, (0,02 + 0,01 + \right. \\ &+ 0,5 \cdot 0,02) \cdot 9, \dots, \left. \left( \sum_{y=5}^{y=24} P_y + 0,5 \cdot 0,02 \right) \cdot 25, \left( \sum_{y=5}^{y=25} P_y + 0,5 \cdot 0,01 \right) \cdot 26 \right] = \\ &= (0,010 \cdot 5, 0,025 \cdot 7, 0,040 \cdot 9, \dots, 0,980 \cdot 25, 0,995 \cdot 26). \end{aligned}$$

Пропущенные здесь значения любопытный читатель может восстановить самостоятельно.

Рассмотренный способ — наиболее общий и точный, но он требует не менее пяти наблюдений, приходящихся в среднем на одно числовое значение вариационного ряда. В этом примере (100:22) меньше 5 наблюдений, поэтому необходимо «укрупнить» интер-

вал, пользуясь уравнением (1.37) и данными табл. 1.13:

$$Y_{\min} = 5; \quad Y_{\max} = 26; \quad \lambda = \text{ant} \left\{ \frac{26 - 5}{10} \right\} = 2.$$

Чтобы не распределять «граничные» частоты баллов между соседними интервалами, выберем в качестве границ пары упорядоченных по возрастанию значений: 5 и 6, 7 и 8, ..., 25 и 26 и выполним группировку данных, используя пятиричную систему кодирования событий  $k \leq Y \leq k+1$  и подсчитывая по кодам частоты баллов в каждом интервале, как это сделано в табл. 1.14. Далее нужно вычислить частоты гистограммы, потом кумулянты и сопоставить частоты средним значениям интервалов, как это показано в табл. 1.15. Пользуясь этой таблицей и формулами (1.42), вычислим значения квартилей:  $Q_1 = 13,5 + 2(0,25 - 0,225) : 0,09 \approx 14$ ;  $Q_2 = 17,5 + 2(0,5 - 0,54) : 0,12 \approx 16,8$ ;  $Q_3 = 19,5 + 2(0,75 - 0,67) : 0,14 \approx 20,6$ .

Таблица 1.14

Группировка первичных данных из табл. 1.13

Границы $k + k+1$	Кодирование	Частоты значений $k \leq Y \leq k+1$
5 ÷ 6	II	2
7 ÷ 8	I	1
9 ÷ 10	IIII II	7
11 ÷ 12	IIII III	8
13 ÷ 14	IIII IIII	9
15 ÷ 16	IIII IIII IIII III	21
17 ÷ 18	IIII IIII III	12
19 ÷ 20	IIII IIII IIII	14
21 ÷ 22	IIII IIII III	13
23 ÷ 24	IIII IIII	10
25 ÷ 26	III	3

$\Sigma_i$  100

Таблица 1.15

Частоты гистограммы и кумулянты к примеру 1.13

Средние значения интервалов $w_i$	Гистограмма $P(w_i)$	Кумулята $P(Y \leq w_i)$	Средние значения интервалов $w_i$	Гистограмма $P(w_i)$	Кумулята $P(Y \leq w_i)$
5,5	0,02	0,010	17,5	0,12	0,540
7,5	0,01	0,025	19,5	0,14	0,670
9,5	0,07	0,065	21,5	0,13	0,805
11,5	0,08	0,140	23,5	0,10	0,920
13,5	0,09	0,225	25,5	0,03	0,985
15,5	0,21	0,375			
			$\Sigma_i$	1,00	-

Далее по формулам (1.14) и (1.45) вычислим полуинтерквартильное отклонение и квартильный коэффициент асимметрии:  $E = 0,5(20,6 - 14,0) = 3,3$ ;  $A_3(Q) = (20,6 + 14,0 - 2 \cdot 16,8) : 2 \cdot 3,3 \approx 0,15$ . Это значение коэффициента асимметрии показывает, что распределение баллов скошено в сторону значений, не превышающих медиану.

#### 1.1.1. Меры корреляции рангов



Две (или более) системы упорядоченных событий могут быть стохастически взаимосвязаны, подобно тому как это имеет место для системы классифицированных событий. Стохастическая связь в этом случае известна под названием *ранговой корреляции*. Она характеризуется степенью (теснотой) и направлением, которые оцениваются для несгруппированных значений ранжированных переменных. Пусть совместно наблюдаются упорядоченные переменные  $X_1$  и  $X_2$ , каждая из которых независимо ранжируется\*, соответственно получают два ряда значений баллов  $Y_1$  и  $Y_2$ . Если для каждой  $i$ -й пары значений ранги (баллы) полностью совпадают, то имеет место максимально тесная положительная связь. Если минимальные ранги одной переменной соответствуют максимальным рангам другой (или наоборот), то имеет место максимально тесная отрицательная связь. В общем случае для  $n$  пар ранги у каждой  $i$ -й пары могут отличаться на величину от 0 до  $n - 1$  при  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Для количественного выражения тесноты и направления связи ранжированных переменных  $Y_1$  и  $Y_2$  используются коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену и Кендалу.

*Коэффициент корреляции рангов по Спирмену* определяется следующим образом. Если среди рангов каждой из переменных нет одинаковых (усредненных для «одинаковых» значений упорядоченной переменной  $X$ ), то используется формула

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (1.46)$$

где  $\rho$  — ранговый коэффициент корреляции Спирмена;  $d_i = y_i^{(1)} - y_i^{(2)}$  — разность  $i$ -х рангов переменной  $Y_1$  и переменной  $Y_2$ ;  $n$  — количество сопоставляемых пар;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Если среди рангов каждой (или одной) из переменных имеются одинаковые, причем возможно несколько групп одинаковых ран-

---

\*Ранжирование выполняется независимо, но в одном направлении (по убыванию или по возрастанию) для обеих переменных. Правила ранжирования те же, что и при ранжировании по вероятности.

гов, то используется формула

$$\rho = 1 - \frac{6(\sum_i d_i^2 + T_{Y_1} + T_{Y_2})}{n(n^2 - 1)}, \quad (1.47)$$

$$\text{где } T_{Y_1} = \frac{1}{12} \sum_j (t_{Y_1}^3 - t_{Y_1}), \quad T_{Y_2} = \frac{1}{12} \sum_j (t_{Y_2}^3 - t_{Y_2});$$

$t_{Y_1}$  — количество усредненных одинаковых рангов переменной  $Y_1$  и  $t_{Y_2}$  — количество таких рангов переменной  $Y_2$  в  $j$ -й группе одинаковых рангов;  $j$  — номер группы одинаковых рангов (см. пример 1.14). Наличие одинаковых рангов означает меньшую степень дифференцировки свойств упорядоченных переменных, представляемых баллами  $Y_1$  и  $Y_2$ , следовательно, меньше и возможности оценить степень связи между ними. Для учета этого уменьшения в формулу (1.47) введены поправки  $T_{Y_1}$  и  $T_{Y_2}$ , в результате чего  $\rho$ , вычисленный по (1.47) при  $T_{Y_1} > 0$  и  $T_{Y_2} > 0$ , всегда меньше, чем вычисленный по (1.46).

**Пример 1.14\***. По данным анкетного обследования получены два ряда групп работников, упорядоченных в соответствии с интересом к выполняемой работе ( $Y_1$ ) и по соответствию образования и работы ( $Y_2$ ). Определим, есть ли корреляция между этими переменными. Процесс вычисления  $\rho$  по уравнению (1.46) ясен из табл. 1.16:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 286,5}{14(14^2 - 1)} \approx 1 - 0,63 = 0,37$$

Однако у обеих переменных имеются группы одинаковых рангов (по две группы), поэтому целесообразно воспользоваться оценкой тесноты связи по формуле (1.47):

$$T_{Y_1} = \frac{1}{12}[(5^3 - 5) + (2^3 - 2)] = 10,5;$$

$$T_{Y_2} = \frac{1}{12}[(2^3 - 2) + (2^3 - 2)] = 1;$$

$$\rho = 1 - \frac{6(286,5 + 10,5 + 1)}{14(14^2 - 1)} \approx 0,345.$$

*Коэффициент корреляции рангов по Кендалу имеет несколько способов вычисления\*\*.* Наиболее простой из них состоит в следующем. Одна из переменных ранжируется и записывается так, чтобы ранги возрастали. Другая переменная ранжируется в том

\*Занимствован из кн.: Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации / Под ред. Г. В. Осипова. М., 1968. С. 168.

\*\*См. Юл Дж. Э., Кендал М. Дж. Теория статистики. М., 1960.

Таблица 1.16

Данные для расчета  
коэффициента ранговой корреляции по Спирмену

i	Ранги		$d_i$	$d_i^2$
	$Y_1$	$Y_2$		
1	3	1	2	4,00
2	3	5,5	-2,5	6,25
3	3	9	-6	36
4	3	10	-7	49
5	3	11,5	-8,5	72,25
6	6,5	3	3,5	12,25
7	6,5	8	-1,5	2,25
8	8	4	4	16
9	9	2	7	49
10	10	7	3	9
11	11	5,5	5,5	30,25
12	12	11,5	0,5	0,25
13	13	13	0	0
14	14	14	0	0
Суммы			0	286,50

же «направлении», после чего ее ранги, соответствующие рангам первой переменной, записываются рядом. Тогда коэффициент корреляции рангов Кендала определяется по формуле

$$\tau = \frac{2 \sum_i Z_i}{0,5n(n-1)} - 1, \quad (1.48)$$

где  $\tau$  — коэффициент корреляции рангов Кендала,  $Z_i$  — количество рангов второй переменной, начиная с  $i+1$ , величина которых больше, чем величина  $i$ -го ранга этой переменной,  $i$  — номер (ранг) первой переменной,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Оба коэффициента ранговой корреляции изменяются в пределах:  $-1 \leq \rho \leq 1$  и  $-1 \leq \tau \leq 1$ , по модулю характеризуя тесноту связи, а по знаку — ее направление. М. Кендал считает, что у  $\tau$  имеется ряд преимуществ перед  $\rho$ . Однако это сомнительно хотя бы потому, что в  $\tau$  не предусмотрена поправка на усредненные ранги, и применять его в этом случае затруднительно. Иногда используют приближенное соотношение между этими коэффициентами:  $\tau \approx 2/3\rho$ , но следует помнить, что оно справедливо лишь для больших  $n$ , а также не очень малых и не очень больших значений  $\rho$ . Очевидно, что эти ограничения слишком неопределенны.

**Пример 1.15.** В результате анкетного обследования для девятнадцати важнейших видов оборудования, используемого судоводителями во время вахты, получены два ряда ранговых оценок: «по важности» оборудования ( $Y_1$ ) и «по частоте» его использования ( $Y_2$ ). Есть основания предполагать, что эти ряды взаимосвязаны. Для проверки тесноты и направления связи вычислим коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену и Кендалу (табл. 1.17). По формуле (1.46) определим

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 124}{19(19^2 - 1)} \approx 0,89.$$

Величина  $Z_i$  получается следующим образом. Для  $i$ -го ранга второй переменной (частота, в табл. 1.17) из оставшихся  $n - i$  рангов подсчитываются те, которые больше  $i$ -го по величине. Например, при  $i = 2$  величина ранга частоты 4. Просматривая оставшиеся 17 значений рангов частоты, видим, что 15 из них больше четырех, следовательно  $Z_2 = 15$ . Определив все  $Z_i$ , суммируем их и вычисляем по (1.48):

$$\tau = \frac{2 \cdot 149}{0,5 \cdot 19(19 - 1)} - 1 \approx 0,74$$

Сравнивая  $\tau$  и  $\rho$ , можно видеть, что действительно  $\tau < \rho$ , но при этом  $\tau = 0,83\rho > 2/3\rho$ .

Наряду с корреляцией рангов двух упорядоченных и ранжированных переменных может рассматриваться корреляция рангов нескольких таких переменных. В общем случае  $N$  упорядоченных и ранжированных переменных  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ , рассматриваемых совместно, образуют  $N$ -мерную систему случайных ранжированных величин. Если в такой системе значения каждой величины — это простые ранги, то можно оценивать, во-первых, корреляцию рангов между всеми парами переменных, а во-вторых, согласованность рангов всех переменных, вместе взятых. Парные корреляции рангов в  $N$ -мерной системе упорядоченных величин числом  $N(N - 1)$  образуют матрицу коэффициентов ранговой корреляции (по Спирмену):

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2N} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \dots & \rho_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{1N} & \rho_{2N} & \rho_{3N} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

где из-за симметричности корреляций ( $i_j \equiv j_i$ ) и максимальная корреляция каждой переменной с самой собой равна единице (по главной диагонали). Вместо  $\rho$  в матрице (1.49) могут использоваться коэффициенты  $\tau$  (по Кендалу).

Таблица 1.17

Данные для расчета коэффициентов ранговой корреляции по Спирмену и по Кендалу к примеру 1.15

Код оборудова- ния	Ранги		$d_i$	$d_i^2$	$Z_i$
	важность ( $i$ )	частота			
А	1	1	0	0	18
Б	2	4	-2	4	15
В	3	2	1	1	16
Г	4	6	-2	4	13
Д	5	3	2	4	14
Е	6	5	1	1	13
Ж	7	12	-5	25	7
З	8	9	-1	1	9
И	9	15	-6	36	4
К	10	7	3	9	8
Л	11	11	0	0	6
М	12	8	4	16	7
Н	13	10	3	9	6
О	14	14	0	0	4
П	15	17	-2	4	2
Р	16	13	3	9	3
С	17	16	1	1	2
Т	18	18	0	0	1
У	19	19	0	0	0
Суммы			0	124	149

Для оценки степени совместной корреляции в такой системе используются коэффициенты согласованности. Один из них представляет собой модификацию коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

$$\bar{\rho} = 1 - \left[ \frac{2N(2n+1)}{(N-1)(n-1)} - \frac{12 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^N y_{ij} \right)^2}{N(N-1)n(n^2-1)} \right], \quad (1.50)$$

где  $\bar{\rho}$  — коэффициент согласованности по Спирмену;  $N$  — число совместно рассматриваемых ранжированных переменных,  $j$  — номер переменной ( $j = 1, 2, \dots, N$ );  $n = y_{\max}$  — число ранжированных значений, одинаковое для всех переменных и равное максимальному рангу;  $1 \leq y_{ij} \leq n$  —  $i$ -й ранг  $j$ -й упорядоченной переменной; все обозначения поясняются табл. 1.18.

Таблица 1.18

Данные для расчета коэффициентов согласованности

$x_i$	Эксперты ( $j$ )			$\sum_{j=1}^N v_{ij}$	$(\sum_{j=1}^N v_{ij})^2$	$S$	$S^2$
	1	2	3				
$x_1$	1	3	4	8	64	-2,5	6,25
$x_2$	2	2	6	10	100	-0,5	0,25
$x_3$	3	1	1	5	25	-5,5	30,25
$x_4$	4	4	2	10	100	-0,5	0,25
$x_5$	5	5	3	13	169	2,5	6,25
$x_6$	6	6	5	17	289	6,5	42,25
Суммы					747	0,0	85,5

Другой коэффициент согласованности (конкордации) предложен М. Кендалом и В. Смитом:

$$W = \frac{12 \sum_{j=1}^n S^2}{nN^2(n^2 - 1)}, \quad (1.51)$$

где  $S = \sum_{j=1}^N v_{ij} - 0,5N(n+1)$ , а остальные обозначения те же, что и в формуле (1.50).

Заметим, что изменяются коэффициенты согласованности в следующих пределах:  $-1 < \bar{r} \leq 1$  и  $0 < W \leq 1$ . Между обоими коэффициентами существует однозначная зависимость.

$$W = \frac{1}{N}[\bar{r}(N-1) + 1] \quad \text{и} \quad |\bar{r}| = \frac{NW - 1}{N - 1}. \quad (1.52)$$

**Пример 1.16.** В табл. 1.18 представлены ранги, полученные от трех экспертов, по отношению к одной и той же упорядоченной переменной. Спрашивается, в какой мере оценки экспертов согласованы?

Вычислим  $\bar{r}$  по формуле (1.50):

$$\bar{r} = 1 - \left[ \frac{2 \cdot 3(12+1)}{(3-1)(6-1)} - \frac{12 \cdot 747}{3(3-1) \cdot 6(36-1)} \right] \approx 0,31$$

Вычислим  $W$  по формуле (1.51).

$$W = \frac{12 \cdot 85,5}{3^2 \cdot 6(36-1)} \approx 0,54.$$

Проверим по формулам (1.52):

$$W = \frac{1}{3}[0,31(3-1) + 1] = 0,54.$$

Если по уравнению (1.46) вычислять коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену между результатами, полученными каждым из экспертов, то найдем значения  $\rho_{12} = 0,77$ ,  $\rho_{13} = -0,09$  и  $\rho_{23} = 0,26$ , которые можно записать в виде корреляционной матрицы (1.49). Заметим, что коэффициент согласованности между ними есть среднее арифметическое:

$$\bar{r} = \frac{1}{3}(\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23}) = (0,77 - 0,09 + 0,26) : 3 \approx 0,31.$$

## ГЛАВА 1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

### 1.1. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

#### 1.1.1. Случайная величина

Под величиной условимся понимать какое-либо физическое или психическое явление, которое относительно совокупности существенных условий характеризуется совокупностью чисел. Если изменяющимся условиям соответствует совокупность одинаковых чисел, величину называют *константой*. Если изменяющимся условиям соответствует совокупность чисел, изменяющихся по некоторому правилу, то величину называют *переменной*. Если при одних и тех же (фиксированных) условиях величина — безразлично, константа или переменная — принимает одно и только одно числовое значение, будем называть ее *неслучайной*. Если при фиксированных условиях величина принимает различные числовые значения, заранее неизвестно какие, такая величина называется *случайной*.

Случайные величины, так же как и неслучайные, могут быть дискретными (прерывными) или непрерывными. Это обстоятельство существенно для определения количественных характеристик, поэтому сначала рассмотрим специфику дискретной и прерывной случайных величин.

*Дискретная случайная величина* принимает всегда конечное множество целочисленных значений на заданном интервале возможных значений. Это, например, такие случайные величины, как «количество случаев», «количество людей», «количество единиц продукции определенного рода» и т. п.

*Непрерывная случайная величина* принимает теоретически бесконечное множество значений на любом, сколь угодно малом интервале возможных значений. Это, например, такие случайные величины, как «время реакции», «объем памяти» (в битах), «умственная одаренность» и т. п. Непрерывная случайная величина при практическом использовании всегда *квантуется*, т. е. приближенно выражается в виде квантованной случайной величины.

*Квантованная случайная величина* определяется уже не бесконечным числом значений, а конечным числом обычно равных интервалов  $\lambda_i^*$ , «внутри» которых переменная остается непрерывной. В этой связи квантованная случайная величина, с одной стороны, похожа на дискретную, но с другой — все-таки остается принципиально отличной от нее.

Сходство в том, что дискретная случайная величина  $X$  задается конечной совокупностью возможных числовых значений  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  и квантованная случайная величина  $X_k$  задается конечной совокупностью возможных числовых интервалов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$ .

Принципиальное различие между этими величинами состоит в следующем. Значения  $x_i$  дискретной случайной величины — обязательно неотрицательные целые числа, так как они обозначают явления, для которых понятие «часть» («доля») не имеет реального смысла (например, выражения «полслучая» или «20,62 человека» бессмысленны). Между парами значений дискретной случайной переменной существуют разрывы, поэтому не имеют смысла и разности  $x_{i+1} - x_i$ , и любые части таких разностей.  $\frac{1}{a}(x_{i+1} - x_i)$ , где  $a > 1$ . Наоборот, интервалы  $\lambda_i$  квантованной непрерывной случайной величины, адекватно отображая реальность, непосредственно «переходят» друг в друга, так что конец интервала  $\lambda_i$  есть в то же время начало следующего интервала  $\lambda_{i+1}$  — непрерывность сохраняется. Благодаря этому имеют реальный смысл не только любые разности  $\lambda_i = x_{i+1} - x_i$ , но и любые, сколь угодно малые доли этих разностей  $\frac{1}{a}\lambda_i$  (где  $1 < a < \infty$ ). Это, в свою очередь, позволяет теоретически сколь угодно точно интерполировать значения непрерывной случайной величины на основе изучения ее в квантованной форме. Но принципиально неверно поступать так же с дискретной переменной.

Рассмотрим сначала распределение вероятностей значений дискретной случайной переменной. Тот факт, что дискретная случайная величина принимает определенное числовое значение, можно рассматривать как случайное событие и характеризовать возможность его появления вероятностью (частотой и частостью). Тогда дискретную случайную величину  $X$  можно определить как систему из  $n$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , которые появляются с ве-

\*В частности, при любом измерении результат определяется лишь с точностью до абсолютной ошибки измерения  $\Delta x$ , т. е. если результат измерения  $x$ , определен как  $x \pm \Delta x$ , то интервал квантования  $\lambda = 2\Delta x$ .

роятностями  $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_i(x_i), \dots, P_n(x_n)$ . Совокупность вероятностей  $P_i(x_i)$ , сопоставленных значениям  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) дискретной случайной величины  $X$ , образует ряд распределения вероятностей значений случайной величины.

Ряд распределения — это функция, отображающая отдельные значения дискретной случайной величины на вероятности (частоты, частости) их появления. Этот ряд может быть представлен в виде мультимножества (см. 1.4.2) или в виде таблицы (табл. 2.1) и «палочковой» диаграммы (рис. 2.1, а).

Таблица 2.1  
Ряды распределения вероятностей значений дискретной случайной величины

Значения $X$	$P_i(x_i)$	$P_i(X \leq x_i)$	Значения $X$	$P_i(x_i)$	$P_i(X \leq x_i)$
$x_1$	0,05	0,05	$x_5$	0,20	0,85
$x_2$	0,10	0,15	$x_6$	0,10	0,95
$x_3$	0,20	0,35	$x_7$	0,05	1,00
$x_4$	0,30	0,65	$\sum_{i=1}^7$	1,00	—

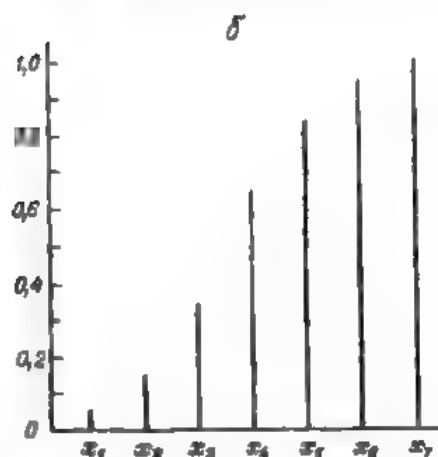
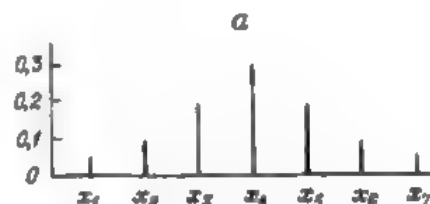


Рис. 2.1. Графическое представление ряда распределения (а) и кумулятивного ряда распределения (б). По оси абсцисс — значения  $x$  дискретной случайной величины  $X$ ; по оси ординат — вероятности:  $P_i(x_i)$  на а и  $P_i(X \leq x_i)$  на б.



Другим способом выражения распределения вероятностей значений дискретной случайной величины является кумулятивный ряд распределения. *Кумулятивным рядом распределения* будем называть совокупность вероятностей

$$P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k P_i(x_i) \quad \text{при } k \leq n,$$

сопоставленных значениям  $x_i$  дискретной случайной величины  $X$  (табл. 2.1 и рис. 2.1, б). Так как множество возможных числовых значений дискретной случайной величины образует полную группу событий, то полная вероятность для ряда распределения равна единице:

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_i) = 1.$$

Рассмотрим далее распределение вероятностей значений квантованной случайной величины. Факт появления значения  $x_i$  квантованной случайной величины  $X$  на  $i$ -м интервале  $\lambda_i$  также можно рассматривать как случайное событие и характеризовать некоторой вероятностью

$$P_i(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_i), \quad (2.1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, k$ . Совокупность таких вероятностей (частот, частостей), сопоставленная совокупности интервалов квантования непрерывной случайной величины, образует *полигон распределения* или *гистограмму распределения вероятностей* значений квантованной непрерывной случайной величины.

Наряду с вероятностью, выраженной в (2.1), важна вероятность квантованной случайной величине  $X$  принять значение, меньшее или не большее, чем некоторое значение  $x_k$ ; соответственно

$$P(X \leq x_k).$$

Совокупность таких вероятностей

$$P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k P_i(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_i)$$

при  $1 \leq k \leq n$  и  $x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max}$ ,  
 $0 \leq P(X \leq x_k) \leq 1,$

сопоставленных совокупности интервалов квантования, образует *кумулятивный полигон* (или *кумулятивную гистограмму*) распределения вероятностей значений квантованной непрерывной переменной.

Формально аналитическое, табличное и графическое представление полигона, гистограммы и кумуляты для квантованной случайной величины те же самые, что и для упорядоченной, ранжированной случайной величины. Но по существу наших сведений об этих величинах здесь имеются два важных отличия. Первое отличие состоит в том, что интервал  $\lambda$  у квантованной непрерывной случайной величины может быть выражен любым действительным числом, а у ранжированной случайной величины классовой интервал  $\lambda$  — обязательно целое число. Второе отличие (оно, кстати сказать, обуславливает и первое) состоит в том, что у квантованной случайной величины интервал  $\lambda$  точно определен по значению самой величины, тогда как у ранжированной случайной величины классовой интервал семантически фиктивен: он лишь приближенно обозначает интервалы квантования, точные значения которых нам неизвестны. Указанные отличия позволяют гносеологически оправданно осуществить предельный переход от полигона, гистограммы и кумуляты квантованной случайной величины к монотонным функциям, в общем и явном виде выражающим распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины.

Чтобы перейти к распределению непрерывной случайной переменной, рассмотрим «элементарную» трапецию\* полигона распределения, схематически изображенного на рис. 2.2. Площадь этой трапеции (на рисунке заштрихована) численно равна вероятности того, что случайная величина примет значение на интервале  $\lambda$ :

$$f'(x_i)\lambda = P(x_i \leq X \leq x_i + \lambda), \quad (2.2)$$

где  $f'(x_i)$  — средняя линия «элементарной» трапеции.

Очевидно, что уравнение (2.2) не изменится, если уменьшать высоту трапеции  $\lambda$  и одновременно соответствующим образом увеличивать ее среднюю линию  $f'(x_i)$ :

$$af'(x_i)\frac{\lambda}{a} = P(x_i \leq X \leq x_i + \lambda), \quad (2.3)$$

где  $a > 0$  — произвольная константа. Тогда, увеличивая константу  $a$  в (2.3), уменьшаем интервал квантования  $\lambda$  до бесконечно малой (но не нулевой) величины. В результате получаем некоторое значение средней линии «элементарной» трапеции  $f(x_i)$ , соответствующее бесконечно малому  $\lambda$  и неизменной вероятности  $P(x_i \leq X \leq x_i + \lambda)$ . Это значение  $f(x_i)$  будем называть *теоретической плотностью вероятности*. Теоретическая плотность вероятности показывает «удельное количество» вероятности, при-

\*Аналогичные рассуждения возможны и для «элементарного» прямоугольника гистограммы.

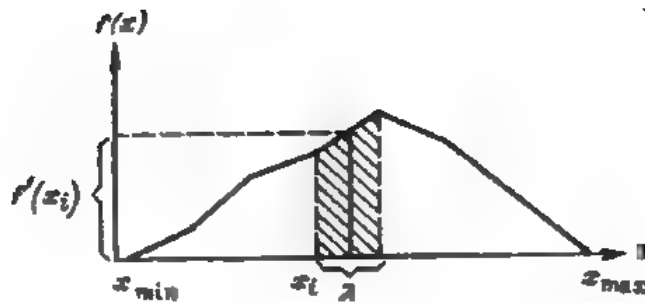


Рис. 2.2. Схематическое изображение полигона распределения вероятностей квантованной непрерывной случайной величины.

По оси абсцисс — значения  $x$  непрерывной случайной величины  $X$ ; по оси ординат — значения плотности вероятности;  $x_{\min} \div x_{\max}$  — область определения величины  $X$ . Заштрихована элементарная трапеция;  $\lambda$  — интервал квантования и высота трапеции,  $f'(x_i)$  — ее средняя линия.

ходящееся на бесконечно малый интервал значений непрерывной случайной величины

Очевидно, что каждому из бесконечно малых интервалов квантования  $dx$  непрерывной случайной величины  $X$  соответствует некоторое значение теоретической плотности вероятности  $f(x)$ , а совокупности таких значений соответствует совокупность плотностей. Функцию, устанавливающую соответствие между бесконечно малыми интервалами квантования  $dx$  и плотностями  $f(x)$ , будем называть *функцией плотности распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины*, сокращенно — *плотностью вероятностей*, и обозначать  $f(x)$ . Функция плотности, таким образом, это предел, к которому стремится ломанная линия, ограничивающая сверху полигон или гистограмму распределения при устремлении интервала квантования  $\lambda$  к нулю\*.

Аналогичный предел можем получить и для кумуляты. Для этого нам, в сущности, необходимо найти сумму бесконечно большого числа слагаемых, каждое из которых есть вероятность  $f(x)dx$  появиться значению  $x$  на бесконечно малом интервале  $dx$ . Та-

\*Важно отметить, что при  $dx \neq 0$  и  $P(x \leq X \leq x + \lambda) = 0$ , как следует из формулы (2.2). Иначе говоря, в отличие от дискретной случайной величины для непрерывной случайной величины вероятность отдельного значения (а этому и соответствует  $dx = 0$ ) равна нулю.

кую сумму будем называть интегралом и записывать следующим образом:

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^x f(x)dx. \quad (2.4)$$

Функция  $F(x)$ , удовлетворяющая уравнению (2.4), называется (интегральной) *функцией распределения вероятностей* значений  $x$  непрерывной случайной величины  $X$ , сокращенно — *функцией распределения*. Она показывает вероятность того, что случайная величина будет меньше или не превзойдет одно из возможных значений; соответственно

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Очевидно, что все бесконечное множество значений непрерывной случайной величины образует полную группу событий. Поэтому

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx = 1,$$

где  $x_{\min} \div x_{\max}$  — область возможных значений случайной величины  $X$ .

Интегральная функция распределения  $F(x)$  и плотность вероятностей  $f(x)$  — это две взаимосвязанные операции дифференцирования и интегрирования формы теоретического выражения распределений вероятностей для непрерывных случайных величин:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x), \quad \int_{x_{\min}}^x f(x)dx = F(x).$$

Но для практики более важной является дифференциальная функция распределения  $P(x)$ :

$$\begin{aligned} P(x_i) &= F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(x_i)\lambda_i, \\ \sum_i P(x_i) &= F(x_i), \quad f(x_i) = P(x_i) : \lambda_i. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эта функция уже рассматривалась для систем упорядоченных числовых событий в параграфе 1.4. Ее элементами служат вероятности (частоты) появления значений случайной величины на конечных интервалах группировки данных, в соответствии с формулой (2.2). Уравнения (2.5) характеризуют взаимную зависимость всех трех функций, которые аналитически выражают распределения непрерывных случайных величин.

Заметим, что эмпирическую плотность вероятности можно рассматривать как вероятность, выраженную в единицах интервала

квантования\*. Аналогично и вместо теоретической функции распределения используется эмпирическая функция, в качестве которой выступает кумулята. При этом интеграл заменяется суммой, как в уравнениях (2.5).

## 2.1.1. Основные свойства распределений

Как и для упорядоченных переменных, распределения вероятностей случайных величин (дискретных и непрерывных) могут отличаться друг от друга положением на числовой оси (рис. 2.3, а), рассеиванием значений (рис. 2.3, б), асимметрией (косостью, скошенностью) рассеивания значений (рис. 2.3, в), а также эксцессом (выпуклостью, «кучностью») рассеивания (рис. 2.3, г).

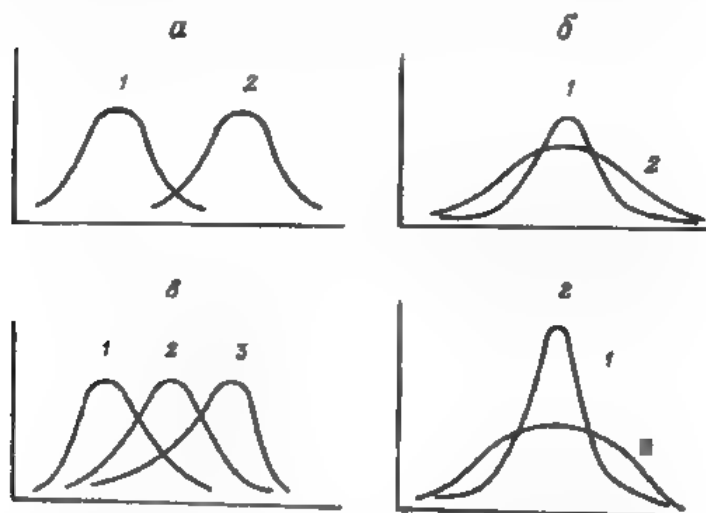


Рис. 2.3. Основные свойства распределения вероятностей случайной величины.

По оси абсцисс — значения  $x$  непрерывной случайной величины  $X$ ; по оси ординат — плотности вероятностей  $f(x)$ . а — кривые 1 и 2 различаются только положением на числовой оси, б — кривые 1 и 2 имеют одинаковое положение, но рассеивание меньше у кривой 1; в — кривые различаются положением и асимметрией: кривая 1 имеет положительную асимметрию, кривая 3 — отрицательную, кривая 2 симметрична; г — кривые различаются по дисперсии и эксцессу, у кривой 1 эксцесс больше.

\*Из (2.5) очевидно следует, что при  $\lambda_i = 1$ ,  $f(x_i) \equiv P_i(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_i)$  плотность численно равна вероятности.

Эти четыре свойства по отдельности и в комбинациях зависят как от специфики случайной величины, так и от условий ее наблюдения. Кроме того, будучи выражены количественно, эти свойства являются параметрами большинства встречающихся на практике распределений. Поэтому, выбирая меры, количественно характеризующие положение, рассеивание, асимметрию и эксцесс, во-первых, можно сравнивать случайные величины по выраженности отдельных свойств, а во-вторых, во многих случаях можно определять в явном виде функции распределения.

Меры, количественно характеризующие указанные четыре, а также и другие отдельные свойства распределения, обычно называются его *числовыми характеристиками* (параметрами).

## 1.1. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1.1. Меры положения

Мер положения много, но каждая из них преимущественно используется только в определенных условиях

*Мода*, уже известная нам по системам классифицированных и упорядоченных событий, — это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность появления. Мода служит единственно возможной мерой положения для существенно дискретной случайной величины.

Для непрерывных случайных величин, имеющих «выпуклую» функцию распределения (см. рис. 2.3), мода определяется из условия максимума функции:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &< 0,\end{aligned}$$

где  $f(x)$  — плотность вероятности,  $\frac{d}{dx}f(x)$  — ее первая производная и  $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$  — ее вторая производная.

Для квантованных непрерывных случайных величин с «выпуклой» гистограммой за моду приближенно принимается среднее значение классового интервала  $\lambda$ . Более точно значение моды получается по формуле

$$M_0 = x_i + \lambda \left( \frac{P_2 - P_1}{2P_2 - P_1 - P_3} \right), \quad (2.6)$$

где  $M_0$  — мода;  $x_i$  — начало модального класса;  $\lambda$  — классовой интервал;  $P_1$  — вероятность (частота, частость) класса, предшествующего модальному классу;  $P_2$  — то же для модального класса;  $P_3$  — то же для класса, следующего за модальным.

Необходимо отметить, что среди распределений встречаются «унимодальные», у которых мода отсутствует (рис. 2.4, а), и полимодальные, у которых две и более мод (рис. 2.4, б)\*

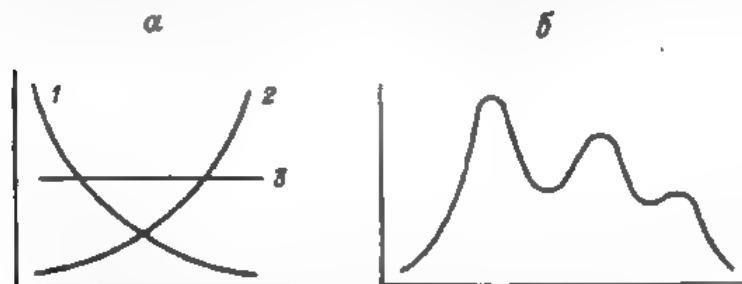


Рис. 2.4. Унимодальные распределения (а, кривые 1, 2, 3 характеризуют разные типы таких распределений) и полимодальное распределение (б).

По оси абсцисс — значения непрерывной случайной величины, по оси ординат — плотности вероятностей

Медиана уже была рассмотрена применительно к распределению вероятностей ранжированной случайной величины. Точно так же она вычисляется и для квантованной переменной.

Для распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины медиана определяется из условия

$$\int_{x_{\min}}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{x_{\max}} f(x)dx = 0,5,$$

где  $Me$  — медиана,  $x_{\min} \div x_{\max}$  — границы области наблюдения (существования) случайной величины  $X$ ;  $f(x)$  — ее плотность вероятности.

Необходимо отметить, что для квантованных и непрерывных случайных величин медиана имеет ограниченное применение. А для дискретной случайной величины медиана вовсе неприменима.

Только для квантованных и непрерывных случайных величин появляется возможность использовать в качестве мер положения

\*Полимодальные распределения часто представляют собой композицию одномодальных распределений и получаются в результате неустойчивости условий опыта.

средние значения: среднее гармоническое, среднее арифметическое, среднее квадратическое, среднее кубическое и так далее — среднее  $m$ -й степени, а также среднее геометрическое.

Среднее гармоническое ( $H$ ) определяется для непрерывной случайной величины как

$$\frac{1}{H} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{f(x)dx}{x},$$

а для квантованной соответственно как

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} P_i, \quad (2.7)$$

где  $P_i$  — это сокращенное  $P_i (x_i \leq X \leq x_i + \lambda)$ , а все остальные обозначения прежние.

Среднее арифметическое ( $M$ )\* определяется для непрерывной случайной величины как

$$M = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x f(x) dx, \quad (2.8a)$$

а для квантованной соответственно как

$$M = \sum_{i=1}^k x_i P_i \quad \text{или} \quad M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i f_i, \quad (2.8b)$$

где  $P_i$  — частоты или вероятности,  $f_i$  — частоты на интервалах  $\lambda$ .

Среднее квадратическое ( $S$ ) определяется для непрерывной случайной величины как

$$S = \sqrt{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f(x) dx}, \quad (2.9a)$$

а для квантованной как

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2 P_i} \quad (2.9b)$$

Среднее кубическое значение ( $\Theta$ ) и среднее четвертой степени ( $Q$ ) определяются сходным образом:

$$\Theta = \begin{cases} \sqrt[3]{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^3 f(x) dx} \\ \sqrt[3]{\sum_{i=1}^k x_i^3 P_i} \end{cases} \quad (2.10)$$

\*Очень часто для среднего арифметического значения случайной величины  $X$  в литературе используются обозначения  $\bar{x}$  и  $\bar{X}$ .



и

$$Q = \begin{cases} \sqrt[k]{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k f(x) dx} \\ \sqrt[k]{\sum_{i=1}^k x_i^k P_i} \end{cases} \quad (2.11)$$

Важно отметить, что из перечисленных средних *основной мерой положения является среднее арифметическое значение*. Среднее гармоническое используется как мера положения распределения частоты колебаний, а также скорости. Средние квадратическое, кубическое и четвертой степени используются при вычислении мер рассеивания, асимметрии и эксцесса.

*Среднее геометрическое (G)* определяется для квантованной случайной величины как

$$G = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k x_i^{f_i}} \quad (2.12)$$

или

$$G = \prod_{i=1}^k x_i^{P_i} \quad (2.13)$$

где  $x_i$  — средние значения интервалов квантования  $\lambda_i$ ;  $f_i$  — частоты появления значений на  $i$ -х интервалах;  $P_i$  — вероятности (частоты);  $\prod_{i=1}^k$  — обозначение произведения всех  $x_i$  при  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Среднее геометрическое вычисляется только при положительных  $x_i$  и используется, в частности, для определения эффективности выполнения человеком последовательности рабочих операций и для оценки среднего эффекта тренировки.

Логарифмируя (2.12) и (2.13), можно видеть, что логарифм среднего геометрического

$$\log G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \log x_i = \sum_{i=1}^k P_i \log x_i \quad (2.14)$$

— это среднее арифметическое (2.86) логарифмов значений квантованной переменной.

В этой связи необходимо специально остановиться на понятии «среднее значение» (*математическое ожидание*). В теории вероятностей и математической статистике это понятие *многозначно*. С одной стороны, это понятие обозначает меру положения. В таком смысле оно и употреблялось выше. С другой стороны, поня-

тие «математическое ожидание» означает специфическую операцию, смысл которой выражается следующим образом:

$$M[Z] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i f_i = \sum_{i=1}^k z_i P_i$$

для квантованной переменной  $Z$ , принимающей не более  $n$  возможных значений на  $k$  интервалах группировки, и

$$M[Z] = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z f(z) dz$$

для непрерывной переменной  $Z$ , определенной на интервале  $(z_{\min} \div z_{\max})$ , причем сама переменная  $Z$  может быть любой функцией (суммой, произведением, степенью и т. п.). Например, можно уравнение (2.13) записать, используя знак операции «математическое ожидание» ( $M[\dots]$ ):

$$M[\log G] = \sum_{i=1}^k \log z_i P_i.$$

Наконец, имеется третье значение этого понятия, а именно: математическое ожидание как среднее арифметическое не любой, а *генеральной* совокупности.

Отметим в заключение вопроса о средних, что между ними существует следующее отношение порядка

$$z_{\min} < H < G < M < S < \Theta < Q < \dots < z_{\max}. \quad (2.15)$$

### 2.2.2. Меры рассеивания

Среди мер рассеивания наибольший интерес представляют размах распределения и различные отклонения от мер положения

*Размах* распределения — это область наблюдавшихся значений случайной величины:

$$d = z_{\max} - z_{\min}. \quad (2.16)$$

Для дискретных случайных величин размах является единственно допустимой мерой рассеивания. Но для непрерывных случайных величин он лишь приближенно характеризует рассеивание. Например, кривые на рис. 2.3 имеют одинаковый размах, но разное рассеивание.

*Среднее (арифметическое или абсолютное) отклонение* для непрерывной случайной величины определяется формулой

$$\delta = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} |z - M_z| f(z) dz,$$

$$\delta = \sum_{i=1}^k |x_i - M_x| P_i, \quad (2.17)$$

где  $|x - M_x|$  — абсолютная величина (*модуль*) отклонения значений  $x_i$  случайной величины  $X$  от ее среднего арифметического значения  $M_x$ ;  $P_i \approx f(x)dx$  — вероятность (частота) появления значений на  $i$ -м интервале квантования. Несмотря на простоту вычисления, абсолютное отклонение имеет ограниченное применение из-за ряда трудностей его использования в теории статистики.

Наиболее употребительной мерой рассеивания является *стандартное (или среднее квадратическое) отклонение*, определяемое как

$$\sigma_x = |\sqrt{D_x}|, \quad (2.18)$$

где величина  $D_x$ , называемая *дисперсией*, вычисляется по уравнениям

$$D_x = \begin{cases} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - M_x)^2 f(x) dx \\ \sum_{i=1}^k (x_i - M_x)^2 P_i \end{cases}$$

соответственно для непрерывной и для квантованной случайных величин

Меньше распространено теоретически, но всегда используется практически другое определение дисперсии — как разности между квадратами среднего квадратического и среднего арифметического значений

$$D_x = S_x^2 - M_x^2, \quad (2.19)$$

где  $S_x$  — среднее квадратическое, согласно уравнениям (2.9а) и (2.9б),  $M_x$  — среднее арифметическое значение, согласно уравнениям (2.8а) и (2.8б).

Дисперсия тоже является мерой рассеивания, что отражено в самом термине («дисперсия» и означает «рассеивание»). Однако там, где требуется учитывать качество (наименование) случайной величины, квадратическая мера, какой является дисперсия, неудобна. Тогда применяется стандартное отклонение.

Следует указать, что для «не очень» асимметричных распределений справедливо приближенное равенство, связывающее среднее арифметическое и стандартное отклонения

$$\delta \approx 0,8\sigma. \quad (2.20)$$

Стандартное отклонение можно определить по аналогии с полуинтерквартильным отклонением как половину величины интервала рассеивания значений  $x$  непрерывной (или квантованной) случайной величины  $X$ , в пределах которого вероятность появления этих значений составляет примерно  $2/3$ . Тогда между средним отклонением ( $E$ ) и стандартным отклонением ( $\sigma$ ) имеется следующее количественное соотношение:

$$E = 0,674\sigma. \quad (2.21)$$

Отметим, что среднее отклонение  $E$  редко используется в настоящее время применительно к непрерывным (и квантованным) случайным величинам.

В отдельных случаях для сравнения рассеивания *разномасштабных* случайных величин применяются *безразмерные* меры рассеивания. Одной из таких мер служит коэффициент вариации (вариативности), предложенный К. Пирсоном.

*Коэффициент вариации* ( $V$ ) определяется в долях или в процентах как отношение стандартного отклонения ( $\sigma_x$ ) к среднему арифметическому значению ( $M_x$ ):

$$V = \frac{\sigma_x}{M_x} (100\%). \quad (2.22)$$

Важно помнить, что этот коэффициент существенно зависит от  $M_x$ . Поэтому его применение для цели сравнения ограничивается теми случаями, когда распределения имеют одинаковые начала отсчета и одинаковые по модулю средние арифметические. Иначе сравнение может привести к ложному результату.

### 1.1.1. Меры асимметрии и эксцесса

Наиболее употребительной мерой асимметрии для непрерывных и квантованных распределений является *коэффициент асимметрии* ( $A_s$ ), определяемый как

$$A_s = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - M_x)^3 f(x) dx \\ \frac{1}{\sigma_x^3} \sum_{i=1}^k (x_i - M_x)^3 P_i, \end{cases}$$

где обозначения уже известны. В отличие от квартильного коэффициента этот коэффициент асимметрии изменяется в пределах:  $-\infty < A_s < \infty$ . При  $A_s = 0$  распределение считается симметричным (см. рис. 2.3, в, кривая  $g$ ), при  $A_s > 0$  распределение имеет «скошенность влево» (там же, кривая  $f$ ) и при  $A_s < 0$  распределение «скошено вправо» (там же, кривая  $g$ ).

В качестве меры выпуклости (эксцесса) используется *коэффициент эксцесса* ( $E_x$ ), определяемый как

$$E_x = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_x^4} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - M_x)^4 f(x) dx - 3 \\ \frac{1}{\sigma_x^4} \sum_{i=1}^k (x_i - M_x)^4 P_i - 3, \end{cases}$$

$$-3 < E_x < \infty.$$

За «начало отсчета» выпуклости распределений принято значение коэффициента эксцесса для нормального закона распределения, для которого  $E_x = 0$ .

## 1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

### 1.1.1. Исходные положения

При определении числовых характеристик изучаемой случайной величины по экспериментальным данным необходимо учитывать ряд обстоятельств

Во-первых, из числа указанных выше мер, характеризующих одно и то же свойство закона распределения, нужно выбрать ту меру, которая достаточно информативна с точки зрения цели исследования, а также применима к изучаемой случайной величине, согласно ее специфике. Например, сравнивая две группы людей по рассеиванию некоторого изучаемого психического свойства, можно воспользоваться приближенной оценкой рассеивания с помощью размаха. Если размахи значительно отличаются, допустим,  $\Delta d = |d_1 - d_2| > 1,5$  или 2, то степень приближения к истинному ответу велика и применение размаха в качестве меры рассеивания оправдано. В противном случае следует воспользоваться более точной мерой — дисперсией. Выше мы указывали, что для дискретной случайной величины, в сущности, применимы корректно лишь мода и размах. Этим обстоятельством часто пренебрегают, поступая с дискретной переменной как с квантованной. Это может быть допустимо в случае, когда совместно рассматриваются дискретные и непрерывные случайные величины и целесообразно использовать одинаковый математический аппарат, но лишь при условии округления окончательных результатов (применительно к дискретной величине) до целочисленных значений. К непрерывной случайной величине можно применять все рассмотренные выше меры, в том числе моду, медиану и размах, разумеется, если

эти меры соответствуют задаче исследования. Наконец, в ряде случаев можно использовать вместо одного из средних значений другое, проще вычисляемое.

Во-вторых, после того как нужная мера выбрана, следует подобрать для нее вычислительную формулу, соответствующую массиву экспериментальных данных и по возможности обеспечивающую меньше субъективных ошибок при ее использовании. Дело в том, что большинство мер можно вычислять различными способами и наряду с «понятийными» формулами, приведенными выше, существует немало так называемых «вычислительных» формул. В результате оказывается, что для маленького массива данных лучше один способ, а для большого — другой; при вычислениях вручную с помощью бумаги и карандаша также лучше один способ, на арифмометре — другой, а при машинном счете (на ЭВМ) — третий

Важно подчеркнуть, что выбор необходимых мер и вычислительных формул — это своего рода искусство, приобретаемое лишь на практике

### 1.3.1. Вычисление мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса по несгруппированным данным

Массив экспериментальных данных, составленный значениями  $x_i$  случайной величины  $X$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  при

$$N \leq 80 \div 100, \quad (2.23)$$

группировать не всегда имеет смысл. Учитывая статистическое определение вероятности, можно видеть, что при условии (2.23) нельзя получить устойчивые экспериментальные оценки вероятностей  $P(x_i)$  или  $P(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_i)$ . Поэтому здесь не применимы мода, медиана и большинство «понятийных» формул для других мер, рассмотренных выше.

Вычисление средних значений в качестве мер положения здесь осуществляется в соответствии с общей формулой

$$\text{Среднее} = \sqrt[h]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^h}, \quad (2.24)$$

из которой, придавая показателю  $h$  и переменной  $x$  разные значения, можно получить все вычислительные формулы.

Для среднего гармонического значения, полагая в (2.24)  $h = -1$ , получаем

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}. \quad (2.25)$$

Для среднего арифметического значения, полагая  $h = 1$ , получаем

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.26)$$

Для среднего квадратического значения  $h = 2$  и

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (2.27)$$

Для среднего кубического значения  $h = 3$  и

$$\Theta = \sqrt[3]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^3}. \quad (2.28)$$

Для среднего значения четвертой степени  $h = 4$  и

$$Q = \sqrt[4]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^4}. \quad (2.29)$$

Наконец, для среднего геометрического значения, полагая  $h = 1$  и заменяя в (2.24) все  $x_i$  их логарифмами, получаем

$$\log G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i. \quad (2.30)$$

Кроме неравенств (2.15) существует приближенное линейное равенство, связывающее все степенные средние значения\*:

$$\bar{x}_h \cong M + \frac{h-1}{2} \frac{D}{M}, \quad (2.31)$$

где  $\bar{x}_h$  — среднее значение  $h$ -й степени из числа рассмотренных с помощью формул (2.24) — (2.29),  $h = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $M$  — среднее арифметическое значение;  $D$  — дисперсия. Использование равенства (2.31) имеет смысл для приближенной оценки одних средних через другие, проще вычисляемые, например через среднее арифметическое. Нужно при этом помнить, что использование равенства (2.31) ограничивается, во-первых, степенью асимметрии распределения, а во-вторых, величиной коэффициента вариации. Чем симметричнее распределение и чем меньше рассеивание, тем точнее приближение формулой (2.31).

\*Джиги К. Средние величины. М., 1970. С.180; см. также: Ястремский В.С. Некоторые вопросы математической статистики. М., 1961. С.120.

Вычисление мер рассеивания осуществляется, за исключением размаха, посредством мер положения: среднего арифметического и среднего квадратического значений.

Среднее абсолютное отклонение вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - M|. \quad (2.32)$$

Дисперсия вычисляется по формуле (2.19) как разность между квадратом среднего квадратического и квадратом среднего арифметического значений, а также непосредственно по формуле

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - M)^2. \quad (2.33)$$

Стандартное отклонение ( $\sigma$ ) и коэффициент вариации ( $V$ ) вычисляются соответственно по формулам (2.18) и (2.22).

Вычисление мер асимметрии и эксцесса выполняется посредством средних: арифметической, квадратической, кубической и четвертой степени:

$$A_3 = \frac{1}{\sigma D} (\Theta^3 - 3S^2M + 2M^3) \quad (2.34)$$

и

$$E_3 = \frac{1}{D^2} (Q^4 - 4\Theta^3M + 6S^2M^2 - 3M^4) - 3, \quad (2.35)$$

где  $A_3$  — коэффициент асимметрии,  $E_3$  — коэффициент эксцесса,  $\sigma$  — стандартное отклонение,  $D$  — дисперсия,  $M$  — среднее арифметическое,  $S$  — среднее квадратическое,  $\Theta$  — среднее кубическое,  $Q$  — среднее четвертой степени. Кроме того, вычислить  $A_3$  и  $E_3$  можно непосредственно по формулам

$$A_3 = \frac{1}{N\sigma D} \sum_{i=1}^N (x_i - M)^3 \quad (2.36)$$

и

$$E_3 = \frac{1}{ND^2} \sum_{i=1}^N (x_i - M)^4 - 3. \quad (2.37)$$

Следует, однако, заметить, что для вычислений вручную предпочтительнее формулы (2.19), (2.34) и (2.35), чем формулы (2.33), (2.36) и (2.37) соответственно, так как при расчете разности  $(x_i - M)$  нередки ошибки. Тем не менее наилучший путь для получения верного результата — это вычисления двумя разными способами. совпадение ответов с приемлемой точностью гарантирует их правильность.



**Пример 2.1.** Экспериментально определены скорости, с которыми люди записывают цифры арабского алфавита (табл. 2.2)\*. Требуется количественно оценить положение, рассеивание, асимметрию и эксцесс распределения значений скорости записывания цифр по экспериментальным данным.

Таблица 2.2

Исходные данные к примеру 2.1			
Цифра	Скорость записи, 1/с, $x_i$	Цифра	Скорость записи, 1/с, $x_i$
1	5,9	6	4,5
2	3,1	7	2,8
3	3,6	8	2,8
4	3,4	9	2,9
5	2,1	10	5,0
		$\sum_{i=1}^{10}$	36,1

Для вычисления оценок всех мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса, рассмотренных выше, нам потребуются, как это следует из формул (2.24)–(2.37), а также (2.18), (2.19) и (2.22), следующие величины:  $\frac{1}{x_i}$ ,  $\lg x_i$ ,  $x_i^2$ ,  $x_i^3$  и  $x_i^4$ , а после вычисления среднего арифметического ( $M$ ) — разности:  $(x_i - M)$ ,  $|x_i - M|$ ,  $(x_i - M)^2$ ,  $(x_i - M)^3$  и  $(x_i - M)^4$ . Эти величины и разности должны быть суммированы по  $i = 1, 2, \dots, 10$ , после чего по соответствующим формулам рассчитываются оценки мер. Выполним расчет промежуточных величин и разностей (табл. 2.3 и 2.4).

Пользуясь формулой (2.25) и суммой из второго столбца табл. 2.3, вычислим среднее гармоническое:

$$H = \frac{10}{3,02} \approx 3,31(1/c).$$

Используя сумму из табл. 2.2 и формулу (2.26), вычисляем среднее арифметическое.

$$M = \frac{36,1}{10} = 3,61(1/c).$$

Аналогично по формулам (2.27) — (2.29) и соответствующим суммам из табл. 2.3 вычисляем средние квадратическое, кубическое и четвертой степени:

$$S = \sqrt{\frac{1}{10} 142,69} \approx 3,78(1/c),$$

\* Данные к примеру с некоторыми изменениями заимствованы из работы: Кандарацкова Н.М., Суходольский Г.В. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций // Экспериментальная и прикладная психология / Под ред. Б.Ф. Ломова. Вып. 1. Л., 1968.

Таблица 2.3

Промежуточные величины, необходимые для расчета оценок мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса

i	$\frac{1}{x_i}$	$\lg x_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$
1	0,170	0,7709	34,81	205,38	1211,70
2	0,323	0,4914	9,61	29,79	92,35
3	0,278	0,5563	12,98	46,68	168,00
4	0,294	0,5315	11,56	39,30	133,63
5	0,476	0,3222	4,41	9,26	19,45
6	0,222	0,6532	20,25	91,12	410,10
7	0,357	0,4472	7,84	21,95	61,47
8	0,357	0,4472	7,84	21,95	61,47
9	0,345	0,4624	8,41	24,39	70,73
10	0,200	0,6990	25,00	125,00	625,00
$\sum_{i=1}^{10}$	3,02	5,3813	142,69	614,80	2853,90

Таблица 2.4

Степени разностей к примеру 2.1

i	$x_i - M$	$(x_i - M)^2$	$(x_i - M)^3$	$(x_i - M)^4$
1	2,3	5,29	12,167	27,9841
2	-0,5	0,25	-0,125	0,0625
3	0,0	0,00	0,000	0,0000
4	-0,2	0,04	-0,008	0,0016
5	-1,5	2,25	-3,375	5,0625
6	0,9	0,81	0,729	0,6561
7	-0,8	0,64	-0,512	0,4096
8	-0,8	0,64	-0,512	0,4096
9	-0,7	0,49	-0,343	0,2401
10	1,4	1,96	2,744	3,8416
$\sum_{i=1}^{10}$	0,1	12,37	10,765	38,6677

$$\Theta = \sqrt[3]{\frac{1}{10} 614,8} \approx 3,95(1/c),$$

$$Q = \sqrt[4]{\frac{1}{10} 2853,9} \approx 4,11(1/c).$$

Наконец, по формуле (2.30) и  $\sum_{i=1}^{10} \lg x_i$  из табл. 2.3, потенцируя результат, определяем среднее геометрическое.

$$G = \text{antilog} \left\{ \frac{1}{10} 5,3813 \right\} \approx 3,45(1/c).$$

Можно видеть, что действительно средние значения различаются между собой, и если поместить среднее геометрическое между средним гармоническим и средним арифметическим, то отно-

шение порядка будет соответствовать указанному неравенствами (2.15). После того как будут вычислены оценки для мер рассеивания, мы еще раз вычислим все средние, пользуясь равенством (2.31).

Характеризуя рассеивание значений скорости записывания цифр человеком, вычислим сначала среднее абсолютное отклонение. Для этого, не обращая внимания на знаки, заново суммируем отклонения от среднего арифметического во втором столбце табл. 2.4

$$\delta = \frac{9,1}{10} = 0,91.$$

Здесь необходимо обратить внимание на то, что алгебраическая сумма второго столбца в табл. 2.4, составляющая 0,1, пренебрежимо мала как по сравнению с суммой  $x_i$ , так и по сравнению с суммой  $|x_i|$ . Теоретически, как мы покажем ниже, должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^N (x_i - M) \equiv 0.$$

Но практически из-за округлений это равенство становится приближенным, т. е.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - M) \approx \epsilon,$$

где  $\epsilon$  — величина «второго порядка малости» (в десятки раз меньше, чем  $\sum_i x_i$  и  $\sum_i |x_i - M|$ ). Нетрудно убедиться в следующем: если бы в примере центральные отклонения вычислялись при  $M = 3,61$ , а не при округлении с недостатком ( $M \approx 3,6$ ), что значительно упростило расчеты в табл. 2.4, то равенство суммы центральных отклонений нулю выполнялось бы точно.

Вычислим далее дисперсию двумя способами. По формуле (2.19), используя полученные выше значения среднего арифметического и среднего квадратического, имеем

$$D = 14,288 - 13,032 = 1,256.$$

Подставляя сумму третьего столбца из табл. 2.4 в формулу (2.33), получаем практически тот же результат:

$$D = \frac{1}{10} 12,37 = 1,237.$$

По формуле (2.18) определим стандартное отклонение:

$$\sigma = |\sqrt{1,237}| \approx 1,11.$$

Можем теперь сравнить оценки  $\delta$  и  $\sigma$  по приближенному равенству (2.20). Действительно,

$$\frac{0,91}{1,11} \approx 0,8.$$

Далее определим отношение  $\frac{D}{M}$  и по приближенному равенству (2.31) вычислим заново оценки остальных степенных средних:

$$\frac{D}{M} = \frac{1,237}{3,61} \approx 0,34,$$

$$H = 3,61 + \frac{-1-1}{2} \cdot 0,34 \approx 3,27,$$

$$G = 3,61 - 0,5 \cdot 0,34 \approx 3,44,$$

$$S = 3,61 + 0,5 \cdot 0,34 \approx 3,78,$$

$$\Theta = 3,61 + 0,34 \approx 3,95,$$

$$Q = 3,61 + 1,5 \cdot 0,34 \approx 4,12.$$

Сопоставим полученные оценки с результатами непосредственных расчетов (табл. 2.5). Можно видеть, что использование равенства (2.31) не внесло существенной погрешности в оценки разных средних.

Таблица 2.5

Результаты вычисления средних значений разными способами

Среднее	Вычислено		Ошибка	
	непосредственно	посредством $M$ по формуле (2.31)	абсолютная	относительная (к величине, вычисленной непосредственно), %
$H$	3,31	3,27	0,04	1,2
$G$	3,45	3,44	0,01	0,3
$M$	3,61	—	—	—
$S$	3,78	3,78	—	—
$\Theta$	3,95	3,95	—	—
$Q$	4,11	4,12	0,01	0,2

Сравнивая оценки значений средних разного вида, в частности оценку  $M = 3,61(1/c)$  и оценку  $H = 3,31(1/c)$ , необходимо отметить следующее. Как указывалось, для усреднения скоростей следует использовать среднее гармоническое. Но если разница между  $H$  и  $M$  невелика (допустима, по мнению исследователя), то можно заменить  $H$  на  $M$ . В данном случае эта разница составляет

несколько менее 10%, и в первом приближении ею можно пренебречь

Основываясь на среднем арифметическом значении в качестве центра рассеивания, вычислим двумя способами оценки для мер асимметрии и эксцесса. Оценку для коэффициента асимметрии получим по формулам (2.34) и (2.36), подставляя в них значения из табл. 2.5 и 2.4 соответственно.

$$A_s = \frac{1}{1,3731}(61,48 - 3 \cdot 14,27 \cdot 3,61 + 2 \cdot 47,05) \approx \frac{1,04}{1,3731} \approx 0,76,$$

$$A_s = \frac{1}{13,731} 10,765 \approx 0,78$$

Точно так же оценку для коэффициента эксцесса получаем по табл. 2.4 и 2.5 и формулам (2.35) и (2.37):

$$E_x = \frac{1}{1,53}(285,39 - 4 \cdot 61,48 \cdot 3,61 + 6 \cdot 14,269 \cdot 13,032 - 3 \cdot 169,833) -$$

$$-3 \approx \frac{3,84}{1,53} - 3 \approx -0,49,$$

$$E_x = \frac{1}{1,53 \cdot 10} 38,6677 - 3 \approx -0,47.$$

Легко видеть, что оба способа приводят к одинаковым результатам с ошибкой менее 5%

Отметим, заканчивая пример, что рассматриваемая совокупность скоростей записывания цифр имеет небольшую положительную асимметрию и незначительный отрицательный эксцесс. Учитывая погрешность центрирования ( $\varepsilon = 0,1$ ), можно практически считать совокупность симметричной и нормально выпуклой

### 111 Группировка данных и получение эмпирических распределений

Важнейшей задачей при изучении психических и связанных с ними явлений служит получение их полных количественных описаний. Такие описания суть распределения вероятностей тех случайных величин, которые получаются в результате подсчета либо измерения свойств или признаков изучаемых явлений. В этой связи в эксперименте необходимо провести достаточно много измерений либо наблюдений изучаемого свойства или признака, для того чтобы статистически надежно оценить по эмпирическим частотам вероятности значений случайной величины, отображающей исследуемое свойство. Как было сказано выше, количество наблюдений либо измерений должно быть таким, чтобы большинство значений встречалось в эмпирических данных не менее пяти

раз. Это условие практически приводит к следующей оценке числа необходимых наблюдений (измерений):

$$N > 80 \div 100.$$

В отдельных случаях, при небольшом рассеивании данных, оказывается достаточным для предварительной оценки распределения  $N > 50 \div 80$ .

Чтобы эмпирическое распределение адекватно отражало реальность, при группировке следует учитывать: с дискретной или непрерывной случайной величиной мы имеем дело, большое или небольшое рассеивание данных получено, какова была точность измерений и многое другое. Группировка данных применительно к дискретной случайной величине не отличается в сущности от рассмотренной в параграфе 1.4. Поэтому обратимся к особенностям группировки результатов измерений непрерывных случайных величин, которые процедурой измерения преобразованы в квантованную форму.

При достаточном числе измерений наилучшие результаты гарантирует упорядочивание перестановкой рядов измеренных значений с одновременной группировкой одинаковых значений и последующим подсчетом их частот и частостей. Практически выполняется следующая процедура.

1. Из массива экспериментальных данных определим минимальное ( $x_{\min}$ ) и максимальное ( $x_{\max}$ ) значения.

2. Полагая, что все наблюдавшиеся значения  $x$  получены в результате равноточных измерений с точностью  $\Delta x$ , запишем возрастающий ряд из  $k$  возможных значений:

$$x_{\min}; x_{\min} + \Delta x; x_{\min} + 2\Delta x; \dots; x_{\min} + (k-2)\Delta x; x_{\max},$$

где  $x_{\max} = x_{\min} + (k-1)\Delta x$  и  $k$  — натуральное число. Отметим, что некоторые из возможных значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) среди экспериментальных данных могут случайно отсутствовать. Отметим также, что  $k$  эквивалентно количеству интервалов группировки величиной  $\Delta x$ :

$$k = \frac{1}{\Delta x}(x_{\max} - x_{\min}) + 1,$$

и требуется, чтобы  $N \gg k$ , иначе группировка может не имеет смысла. Отметим, наконец, что при большом  $N$  высокоточных измерений ( $\Delta x$  мало)  $k$  оказывается столь большим (несколько сотен и более), что этот способ группировки неприменим и следует воспользоваться другим способом.

3. Последовательно просматриваем массив экспериментальных данных и, кодируя их «палочками», как и прежде, подсчитываем, сколько раз фактически встречается каждое из  $k$  возможных значений  $x_i$ . Таким образом определяем частоты  $f_i(x_i)$ . Очевидно,

некоторые из возможных значений фактически могут и не встретиться, и соответствующие частоты окажутся тождественно равными нулю.

**Пример 2.2.** В опыте по изучению амплитудно-частотной характеристики руки человека для одного из испытуемых получены значения амплитуды установившихся колебаний руки при слежении за движущейся целью (табл. 2.6). Оценим по этим данным дифференциальную функцию распределения значений амплитуды, используя указанную процедуру группировки.

Таблица 2.6

Значения амплитуды установившихся колебаний руки ( $x_i$ , мм)  
к примеру 2.2

1	2	3	4	5	6	7	8
64	62	63	65	70	62	62	49
72	52	55	70	64	66	65	59
60	68	61	65	63	60	66	48
67	72	45	58	65	75	55	52
63	63	46	52	70	66	68	54
65	66	64	56	68	67	62	42
60	62	72	55	56	61	67	57
75	67	70	60	56	70	57	51
51	60	70	54	56	64	62	66
60	68	63	59	65	71	62	51
65	60	63	71	62	57	62	56
62	60	62	63	73	68	60	55
73	58	62	55	62	66	57	56
62	57	68	55	60	53	60	54
71	60	69	58	63	73	58	53
63	64	71	66	68	63	62	41
55	59	58	62	64	67	58	55
56	64	60	82	60	62	52	54
64	65	64	54	71	62	62	58
61	60	70	74	61	66	61	51
65	63	73	58	62	58	61	58
69	59	52	55	56	66	67	62
65	60	59	62	51	72	60	62
68	58	54	75	44	71	53	51
58	62	64	62	73	65	50	62

Сначала находим в табл. 2.6 минимальное и максимальное значения амплитуды:  $x_{\min} = 41$ ,  $x_{\max} = 82$ . Затем записываем упорядоченные по возрастанию промежуточные значения: 41, 42, 43, ..., 81, 82, как показано в табл. 2.7. Просматривая числовой массив табл. 2.6, кодируем «палочками» (в пятеричном коде) повторяющиеся значения амплитуды и подсчитываем частоты значений, как

Таблица 2.7

Группировка данных из табл. 2.6

i	x <sub>i</sub> , мм	Кодирование	f <sub>i</sub>	i	x <sub>i</sub> , мм	Кодирование	f <sub>i</sub>
1	41	I	1	22	62	IIII IIII IIII IIII	25
2	42	I	1	23	63	IIII IIII I	11
3	43		0	24	64	IIII IIII	10
4	44	I	1	25	65	IIII IIII II	12
5	45	I	1	26	66	IIII IIII	9
6	46	I	1	27	67	IIII I	6
7	47		0	28	68	IIII II	7
8	48	I	1	29	69	II	2
9	49	I	1	30	70	IIII II	7
10	50	I	1	31	71	IIII I	6
11	51	IIII I	6	32	72	IIII	4
12	52	IIII I	6	33	73	IIII	5
13	53	IIII	3	34	74	I	1
14	54	IIII I	6	35	75	IIII	3
15	55	IIII IIII	10	36	76		0
16	56	IIII I	6	37	77		0
17	57	IIII	5	38	78		0
18	58	IIII IIII IIII	13	39	79		0
19	59	IIII	5	40	80	I	1
20	60	IIII IIII IIII I	16	41	81		0
21	61	IIII I	6	42	82	I	1
Σ,							200

это сделано в табл. 2.7. Оценивая итоги, можем видеть, что некоторые из промежуточных значений в эксперименте не наблюдались, и распределение получилось «с разрывами». Следовательно, двухсот измерений оказалось мало для получения требуемого распределения. Необходима группировка данных в интервалы  $\lambda > 1$ .

Для выбора интервала группировки, не равного единице, следует учесть, что количество интервалов должно составлять не меньше восьми, обычно — от восьми до двенадцати\*. Поэтому в общем случае для квантованной случайной величины искомый интервал определяется по формуле

$$\lambda = (x_{\max} - x_{\min}) : (8 \div 12). \quad (2.38)$$

Поскольку эта формула может привести к иррациональному  $\lambda$ ,

\* Величина интервала должна быть не меньше половины стандартного отклонения нормально распределенной случайной величины, большинство значений которой рассеивается в области шести стандартных или восьми полуинтерквартильных отклонений (см. рис. 2.5 и формулу (2.21)).



иногда его следует округлять, но так, чтобы

$$\lambda = \Delta x,$$

где  $\Delta x$  — абсолютная погрешность измерений случайной величины в условиях эксперимента.

Границы  $x_i$  и средние значения  $w_i$  интервалов выбираются либо исходя из условия

$$x_i \leq x_{\min}, \quad x_{k+1} \geq x_{\max}, \quad (2.39)$$

где  $k$  — номер последнего интервала и

$$x_{i+1} = x_i + \lambda, \quad w_i = x_i + 0,5\lambda, \quad (2.40)$$

либо исходя из условия

$$w_1 = x_{\min}, \quad w_k = x_{\max},$$

и тогда

$$x_i = w_i - 0,5\lambda, \quad w_{i+1} = w_i + \lambda,$$

где  $i = 1, 2, \dots, k+1$  для границ и  $i = 1, 2, \dots, k$  для средних значений интервалов. Оба эти способа выбора практически равноценны, но при сравнительно небольшом количестве данных (сотни, а не тысячи) лучше предпочесть первый из них, соответственно условиям (2.39) и (2.40).

Продолжим теперь пример 2.2. Зададимся вначале десятью интервалами и по уравнению (2.38) определим для  $x_{\min} = 41$  мм и  $x_{\max} = 82$  мм  $\lambda = (82 - 41) : 10 = 4,1$  (мм). Так как измерения амплитуд проводились с абсолютной погрешностью в полмиллиметра, округлим интервал с недостатком до  $\lambda = 4$  мм. По условиям (2.39) и (2.40) выберем:  $x_1 = 40$  мм  $< x_{\min}$ . Вычислим остальные границы и средние значения интервалов и записываем их, как это сделано в табл. 2.8. При этом  $x_{\max} = w_{11}$  и число интервалов оказывается на один больше, чем предполагалось вначале.

Прежде чем перейти к группировке данных из табл. 2.6 в табл. 2.8, следует обратить внимание на одно обстоятельство. Среди эмпирических данных теперь необходимо выделить два подмножества значений: *внутриинтервальные* и *границные*. Внутриинтервальные значения должны быть сопоставлены средним значениям «своих» интервалов, а граничные — только «своим» границам. Но граница относится к обоим соседним интервалам. Поэтому частоты граничных значений необходимо делить пополам и суммировать эти половины с частотами соседних интервалов (табл. 2.8); таким путем обеспечивается *несмещенность* оценок частот из-за группировки данных. То обстоятельство, что в результате могут получаться дробные или смешанные числовые

Таблица 2.8

Группировка данных из табл. 2.6 в счетверенные интервалы; частоты и частоты распределения амплитуд и примеру 2.3

Границы $x_i$ , мм	Средние значения $m_i$ , мм	Кодирование	Частоты $f_i$	Частоты $p_i$
40	—			
—	42	II	2,5	0,0125
44	—	I		
—	46	II	3,0	0,0150
48	—	I		
—	50	IIII III	11,5	0,0575
52	—	IIII I		
—	54	IIII III III III III	25,5	0,1250
56	—	IIII I		
—	58	IIII III III III III III	34,0	0,1700
60	—	IIII III III I		
—	62	IIII III III III III III	55,0	0,2750
64	—	IIII III		
—	66	IIII III III III III III III	35,5	0,1775
68	—	IIII II		
—	70	IIII III III III	20,5	0,1025
72	—	IIII		
—	74	IIII III III	11,0	0,0550
76	—			
—	78		0,5	0,0025
80	—	I		
—	82	I	1,5	0,0075
84	—			
Суммы			200,0	1,0000

значения частот, не должно смущать: это связано с недостаточным количеством измерений и могло бы быть ликвидировано при повышении точности и числа измерений.

После того как частоты определены, следует вычислить частоты  $p_i$ . Для этого необходимо определить объем совокупности после группировки ( $N'$ ):

$$N' = \sum_{i=1}^k f_i,$$

где  $k$  — количество интервалов группировки, и затем вычислить частоты

$$p_i = \frac{f_i}{N'}. \quad (2.41)$$

Дело в том, что при значительном количестве экспериментальных данных (несколько сотен и более) в процессе их разнесения по ин-

тервалам отдельные значения — обычно из числа частых — могут быть случайно пропущены или закодированы дважды. Повторное разнесение данных не изменяет положения, так как допускаются новые ошибки. Сами по себе ошибки такого рода (1—2%) не влияют на полученное распределение. Но поскольку  $N' \neq N$ , а требуется, чтобы  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ , частоты вычисляются здесь по формуле (2.41).

Заканчивая, нужно отметить, что не обязательно группировать данные в равные интервалы. Но они удобны для вычисления параметров распределения, особенно если значения случайной величины в результате измерений включают в себя две или больше значащих цифр.

Эмпирический ряд распределения вероятностей значений дискретной случайной величины в качестве меры положения имеет лишь моду, значение которой, если она существует, непосредственно определяется по наибольшей частоте (или частости). В качестве меры рассеивания используется лишь размах, значение которого определяется теперь не формулой (2.16), а разностью

$$d = x_{n+1} - x_1,$$

где  $x_{n+1}$  — последняя, а  $x_1$  — первая границы ряда, определенные фактически наблюдавшимися, а не теоретически возможными значениями изучаемой случайной величины. Следует помнить, что размах полигона ( $d_n$ ) всегда больше, чем размах гистограммы ( $d_r$ ), построенной на тех же самых средних значениях интервалов  $w_i$ :  $d_n > d_r$ .

Для квантованной непрерывной случайной величины все рассмотренные выше меры положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса вычисляются по любой из эмпирических форм закона распределения. Но меньше всего труда затрачивается при вычислениях по эмпирической дифференциальной функции, представленной в виде ряда средних значений равных интервалов группировки ( $w_i$ ) с сопоставленными этим значениям частостями ( $p_i$ ). Именно такой формой мы ограничили получение эмпирической функции распределения в результате группировки. Эта же форма, как будет показано в дальнейшем, является исходной для определения эмпирического, а затем и теоретического закона распределения в виде некоторой монотонной функции.

За исключением моды, медианы, среднего гармонического и

среднего геометрического значений, а также размаха, все рассмотренные выше меры вычисляются единообразно через так называемые моменты. Рассмотрим сначала исключения, а потом общие правила.

**Пример 2.3.** В ходе экспериментального изучения характеристик человека при слежении за целью получено эмпирическое распределение значений полупериодов треморовидных колебаний руки одного из мастеров спорта по стрельбе (табл. 2.9). Требуется вычислить по распределению моду, медиану, а также среднее гармоническое и среднее геометрическое значения полупериодов таких колебаний.

Таблица 2.9

Эмпирическое распределение данных в примере 2.3

$x_i \div x_{i+1}$ , мс	$u_i$ , мс	$p_i$	$\frac{x_i}{u_i}$	$\lg u_i$	$p_i \lg u_i$
17,75 ÷ 53,25	35,5	0,1960	0,005521	1,5502	0,303839
53,25 ÷ 88,75	71,0	0,3260	0,004592	1,8513	0,603524
88,75 ÷ 124,25	106,5	0,1720	0,001615	2,0273	0,348696
124,25 ÷ 159,75	142,0	0,1170	0,000824	2,1523	0,251819
159,75 ÷ 195,25	177,5	0,0590	0,000332	2,2492	0,132703
195,25 ÷ 230,75	213,0	0,0460	0,000216	2,3284	0,107106
230,75 ÷ 266,25	248,5	0,0280	0,000113	2,3954	0,067071
266,25 ÷ 301,75	284,0	0,0240	0,000084	2,4533	0,058879
301,75 ÷ 337,25	319,5	0,0120	0,000038	2,5044	0,030053
337,25 ÷ 372,75	355,0	0,0090	0,000025	2,5502	0,022952
372,75 ÷ 408,25	390,5	0,0065	0,000017	2,5916	0,016845
408,25 ÷ 443,75	426,0	0,0045	0,000011	2,6294	0,011832
Суммы		1,0000	0,013388	—	1,955319

Моду вычислим по формуле (2.6). Начало модального класса  $x_{M_0} = 53,25$  мс. Классовый интервал  $\lambda = 35,5$  мс. Частость модального класса  $p_2 \approx 0,326$ , частость предшествующего класса  $p_1 = 0,196$ , а частость последующего класса  $p_3 = 0,172$ .

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 53,25 + 35,5 \left( \frac{0,326 - 0,196}{0,652 - 0,196 - 0,172} \right) = \\
 &= 53,25 + 35,5 \frac{0,130}{0,284} \approx 69,5 \text{ (мс)} \approx 70 \text{ (мс)}.
 \end{aligned}$$

Медиану вычислим по формуле (1.42). Начало медианного класса  $A(Q_2) = 53,25$  мс. Сумма частостей предшествующих классов (такой всего один)  $S_A = 0,196$ . Частость, соответствующая меди-

ане, равна 0,5. Частость медианного класса  $P(Q_2) = 0,326$ .

$$\begin{aligned} Me &= 53,25 + 35,5(0,5 - 0,196) \frac{1}{0,326} = \\ &= 53,25 + \frac{10,792}{0,326} = 53,25 + 33,1 \approx 86 \text{ (мс)}. \end{aligned}$$

Проверяя по формуле (1.43), убеждаемся, что  $Me$  вычислена правильно

$$Me = 88,75 - 35,5(0,5 - 0,475) \frac{1}{0,326} \approx 86 \text{ (мс)}.$$

*Среднее гармоническое* значение полупериодов колебаний вычислим по формуле (2.7), заменив  $x_i$  на  $w_i$  и считая, что  $n = 12$  — количество интервалов группировки:

$$\frac{1}{H} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{w_i}.$$

Значения отношений  $\frac{p_i}{w_i}$  представлены в табл. 2.9, там же приведена их сумма

$$H = \frac{1}{0,013388} \approx 74,7 \text{ (мс)} \approx 75 \text{ мс}.$$

Наконец, *среднее геометрическое* значение вычислим по формуле (2.14), снова заменяя  $x_i$  на  $w_i$  и считая  $n = 12$  количеством интервалов группировки. Промежуточные величины  $\lg w_i$  и  $p_i \lg w_i$  тоже приведены в табл. 2.9. Суммируя от  $i = 1$  до  $n$  все  $p_i \lg w_i$  в последнем столбце табл. 2.9, получаем 1,9553 — логарифм среднего геометрического. Потенцируя этот логарифм, находим

$$G = 90,22 \text{ мс} \approx 90 \text{ мс}.$$

Рассмотрим теперь с единых позиций вычисление всех остальных мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса. Для этого введем понятие *моментов распределения*.

Для непрерывной случайной величины общая формула момента  $h$ -й степени может быть записана следующим образом:

$$\text{момент}_h = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^h f(x) dx, \quad (2.42a)$$

где  $h$  — показатель степени (порядка) момента;  $x$  — отклонение значений случайной величины от некоторого начала отсчета;  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  — границы области определения случайной величины  $X$ .

Для квантованной непрерывной случайной величины, заменяя в (2.42a) интеграл суммой, «элементы» вероятностей  $f(x)dx$  — вероятностями  $P_i$  появления значений  $x_i$  на конечных интервалах

группировки  $\lambda_i$  и полагая, что  $x_i$  — это средние значения  $w_i$  интервалов, получаем общую формулу моментов, которую будем использовать для всех расчетов при обработке экспериментальных данных:

$$\text{момент}_h = \sum_{i=1}^k x_i^h P_i, \quad (2.426)$$

где  $n$  — количество, а  $i = 1, 2, \dots, k$  — номера интервалов группировки.

Моменты различаются порядком (степенью)  $h$  и видом отклонения  $x_i$ . Степень  $h$  может принимать любые значения из неотрицательных целых чисел. Соответственно различают моменты нулевого, первого, второго, третьего, четвертого, а также более высоких порядков.

По виду отклонения выделяют начальные, центральные, основные и абсолютные моменты

**Начальные моменты** определяются по отклонениям значений случайной величины от некоторого начала отсчета. Часто начальные моменты непосредственно вычисляют по значениям  $x_i$  случайной величины  $X$ , полученным в результате измерения. Эти значения в сущности представляют собой отклонения от нуля измерительной шкалы. Общая формула начальных моментов совпадает по виду с формулой (2.426).

Придавая показателю степени  $h$  различные числовые значения, получим начальные моменты нулевого, первого и т. д. порядков. Так как эти моменты играют важнейшую роль в определении числовых характеристик случайной величины, рассмотрим их подробнее.

**Нулевой начальный момент** — это вероятность полной группы значений случайной величины:

$$m_0 = \sum_{i=1}^k P_i = 1.$$

**Первый начальный момент** — это среднее арифметическое значение (см. ф-лу (2.86)):

$$m_1 = \sum_{i=1}^k x_i P_i = M. \quad (2.43a)$$

**Второй начальный момент** — это квадрат среднего квадратического значения (см. ф-лу (2.96)):

$$m_2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 P_i = S^2. \quad (2.436)$$

*Третий начальный момент* — это куб среднего кубического значения (см. ф-лу (2.10)):

$$m_3 = \sum_{i=1}^k x_i^3 P_i = \theta^3. \quad (2.43в)$$

*Четвертый начальный момент* — это четвертая степень среднего четвертой степени (см. ф-лу (2.11)):

$$m_4 = \sum_{i=1}^k x_i^4 P_i = Q^4. \quad (2.43г)$$

Нулевой начальный момент служит для проверки правильности вычисления частотей распределения. Обычно требуется, чтобы

$$0,999 \leq \sum_{i=1}^k P_i \leq 1,001$$

Первый начальный момент, как неоднократно указывалось, — это важная из мер положения распределения на числовой оси. Остальные начальные моменты служат для вычисления «степенных» средних и чаще всего для вычисления центральных моментов.

Формулы (2.43 а — г) далеко не всегда удобны для практических расчетов, так как значения  $x_i$  могут иметь большое количество значащих цифр, и тогда промежуточные результаты достигают астрономических величин. Для практических расчетов по распределению используются другие формулы, которые получаются из формул (2.43 а — г) с помощью линейного преобразования значений:

$$x_i = A + x'_i,$$

где

$$x'_i = \lambda x''_i, \quad x''_i = \frac{x_i - A}{\lambda}. \quad (2.44)$$

Здесь  $x_i$  — средние значения интервалов группировки;  $\lambda$  — величина интервалов, одинаковая для всех них;  $A$  — так называемое *условное начало*, выбираемое обычно как среднее значение модального интервала<sup>\*</sup>;  $x'_i = x_i - A$  — это, в сущности, тоже начальное отклонение, только от условного начала отсчета; наконец,  $x''_i$  — начальное отклонение от условного начала, нормированное интервалом квантования (группировки).

<sup>\*</sup>Вообще говоря, условное начало  $A$  может быть выбрано в пределах  $x_1 \div x_{n+1}$  где угодно, однако для упрощения расчетов его выбирают там, где частота больше.

Поскольку  $x'_i$  и  $x''_i$  — тоже отклонения от некоторого начала, то по ним можно вычислять начальные моменты, которые соответственно будем обозначать  $m'_k$  и  $m''_k$ . Правда, величина этих моментов зависит от выбранного начала отсчета. Но легко показать, что

$$M = m_1 = A + m'_1, \quad (2.45)$$

где

$$m'_1 = \lambda m''_1 \quad (2.46)$$

и

$$m''_1 = \sum_{i=1}^k \frac{x_i - A}{\lambda} P_i. \quad (2.47)$$

Поэтому для расчета среднего арифметического значения по распределению сначала выбирают условное начало  $A$ , затем для всех средних значений интервалов  $x_i$  осуществляют преобразование (2.44), после этого по формуле (2.47) вычисляют  $m''_1$ , затем по (2.46) —  $m'_1$  и далее по (2.45) окончательно вычисляют  $M$ .

Начальные моменты, начиная со второго, которые используются для вычисления центральных моментов, достаточно определить аналогичным путем:

$$m'_2 = \lambda^2 m''_2, \quad \text{где } m''_2 = \sum_{i=1}^k (x''_i)^2 P_i; \quad (2.48a)$$

$$m'_3 = \lambda^3 m''_3, \quad \text{где } m''_3 = \sum_{i=1}^k (x''_i)^3 P_i; \quad (2.48б)$$

$$m'_4 = \lambda^4 m''_4, \quad \text{где } m''_4 = \sum_{i=1}^k (x''_i)^4 P_i. \quad (2.48в)$$

Здесь  $x''_i = \frac{x_i - A}{\lambda}$  определяется преобразованием (2.44). Такая возможность обусловлена тем, что величина центральных моментов зависит лишь от  $\lambda$  и не зависит от начала отсчета.

Центральные моменты определяются по так называемым *центральным отклонениям* ( $\overset{\circ}{x}_i$ ):

$$\mu_h = \sum_{i=1}^k \overset{\circ}{x}_i^h P_i,$$

где  $\overset{\circ}{x}_i = x_i - M$  — центральное отклонение как разность между «текущими» значениями  $x_i$  случайной величины  $X$  и ее средним арифметическим значением  $M$ .

Случайная величина  $\overset{\circ}{X}$ , заданная центральными отклонениями  $\overset{\circ}{x}_i$ , называется *центрированной* случайной величиной. Процесс



вычисления центральных отклонений, эквивалентный переносу начала отсчета в точку среднего арифметического значения, называют *центрированием* случайной величины.

*Нулевой центральный момент*, как и все другие нулевые моменты, равен единице.

*Первый центральный момент* теоретически равен нулю:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^k (x_i - M) P_i = 0.$$

Но практически это равенство выполняется лишь приближенно, из-за неточностей центрирования, в частности из-за округления среднего арифметического значения до величины порядка  $x_i$ .

*Второй центральный момент* есть дисперсия:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^k (x_i - M)^2 P_i = D.$$

Однако чаще, как указывалось, ее вычисляют через начальные моменты:

$$D = \mu_2 = m_2 - m_1^2 = S^2 - M^2,$$

и наиболее часто — через преобразованные начальные моменты:

$$D = \mu_2 = m'_2 - (m'_1)^2 = \lambda^2 [m''_2 - (m''_1)^2]. \quad (2.49)$$

Аналогично через преобразованные начальные моменты вычисляют третий центральный момент:

$$\mu_3 = m'_3 - 3m'_2 m'_1 + 2(m'_1)^3 = \lambda^3 [m'''_3 - 3m'''_2 m''_1 + 2(m''_1)^3] \quad (2.50)$$

и четвертый центральный момент:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= m'_4 - 4m'_3 m'_1 + 6m'_2 (m'_1)^2 - 3(m'_1)^4 = \\ &= \lambda^4 [m''''_4 - 4m''''_3 m''_1 + 6m''''_2 (m''_1)^2 - 3(m''_1)^4]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь значения  $m'_1$  и  $m''_1$  определены выше формулами (2.46) и (2.47), а значения  $m'_2$  и  $m''_2$ ,  $m'_3$  и  $m''_3$ ,  $m'_4$  и  $m''_4$  — формулами (2.48 а — в). Разумеется, третий и четвертый начальные моменты можно вычислять и через обычные начальные моменты  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$ , пользуясь теми же формулами (2.50) и (2.51).

*Основные моменты* определяются по основным отклонениям. *Основными* называются центральные отклонения, нормированные стандартными отклонениями:

$$\frac{x_i - M}{\sigma},$$

где  $\sigma = \sqrt{D}$  — стандартное отклонение. Очевидно, что основные моменты удобнее всего выражать через центральные моменты, нормированные  $h$ -й степенью стандартного отклонения.

Наибольший интерес для нас представляют третий основной момент

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} = A_3$$

— коэффициент асимметрии и четвертый основной момент

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = E_4 + 3,$$

который используется для определения коэффициента эксцесса:

$$E_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Учитывая формулы (2.46)–(2.48 а–в), (2.50) и (2.51), а также то, что, как следует из (2.49),

$$\sigma = \sqrt{D} = \lambda \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2}, \quad (2.52)$$

можно записать расчетные формулы для коэффициентов асимметрии и эксцесса:

$$A_3 = \frac{m_3'' - 3m_2''m_1'' = 2(m_1'')^3}{[\sqrt{m_2'' - (m_1'')^2}]^3} \quad (2.53)$$

и

$$E_4 = \frac{m_4'' - 4m_3''m_1'' + 6m_2''(m_1'')^2 - 3(m_1'')^4}{[m_2'' - (m_1'')^2]^2} - 3, \quad (2.54)$$

где моменты  $m_h''$  ( $h = 1, 2$  и  $4$ ) вычисляются по общей формуле

$$m_h'' = \sum_{i=1}^k (x_i'')^h P_i \quad \text{при} \quad x_i'' = \frac{x_i - A}{\lambda}.$$

Наконец, абсолютные моменты определяются по абсолютным значениям (модулям) любых отклонений, начальных, центральных или основных. В частности, для нас представляет некоторый интерес первый центральный абсолютный момент

$$\delta = \sum_{i=1}^k |x_i - M_x| P_i,$$

который и называется средним арифметическим отклонением (2.17).

Наиболее часто вычисляют среднее арифметическое значение, дисперсию и стандартное отклонение, реже к ним добавляют коэффициенты асимметрии и эксцесса. Расчет всех этих параметров

по распределению осуществляется в виде последовательной процедуры, включающей в себя преобразование (2.44) и вычисление различных моментов из числа только что рассмотренных. Эта последовательная процедура в наиболее удобной для вычисления форме называется *способом произведений*\*. Рассмотрим его на примере

**Пример 2.4.** По способу произведений для эмпирического распределения значений полупериодов треморовидных колебаний руки при слежении за целью вычислить среднее арифметическое значение, дисперсию и стандартное отклонение, а также коэффициенты асимметрии и эксцесса. Исходные данные и промежуточные величины приведены в табл. 2.10.

Таблица 2.10  
Исходные данные и промежуточные величины  
к примеру 2.4 ( $\lambda = 35,5$  мс,  $A = 71$  мс)

$x_i$ , мс	$P_i$	$x_i''$	$x_i'' P_i$	$(x_i'' P_i) x_i''$	$[(x_i'')^2 P_i] x_i''$	$[(x_i'')^3 P_i] x_i''$
35,5	0,1960	-1	-0,1960	0,1960	-0,1960	0,1960
71,0	0,3260	-	-	-	-	-
106,5	0,1720	1	0,1720	0,1720	0,1720	0,1720
142,0	0,1170	2	0,2340	0,4680	0,9360	1,8720
177,5	0,0590	3	0,1770	0,5310	1,5930	4,7790
213,0	0,0460	4	0,1840	0,7360	2,9440	11,7760
248,5	0,0280	5	0,1400	0,7000	3,5000	17,5000
284,0	0,0240	6	0,1440	0,8640	5,1840	31,1040
319,5	0,0120	7	0,0840	0,5880	4,1160	28,8120
355,0	0,0090	8	0,0720	0,5760	4,6080	36,8640
390,5	0,0065	9	0,0585	0,5265	4,7385	42,6465
426,0	0,0045	10	0,0450	0,4500	4,5000	45,0000
Суммы	1,0000	-	1,1145	5,8075	32,0955	220,7215
Моменты	$m_0 = 1$	-	$m_1'' \approx 1,11$	$m_2'' \approx 5,81$	$m_3'' \approx 32,1$	$m_4'' \approx 220,7$

1. Выберем условное начало по принципу

$$A \equiv x_i, \quad \text{если} \quad P_i(x_i) \equiv \max P_i,$$

т. е.  $A = 71$  мс (табл. 2.10).

2. Вычислим  $x_i'' = \frac{x_i - A}{\lambda}$ ; очевидно, что при  $x_i \equiv A$   $x_i'' = 0$ . Чтобы не писать нули, обычно строку условного начала прочеркивают во всех столбцах, начиная от столбца  $x_i''$  (см. табл. 2.10). Нетрудно убедиться, что при любых  $x_i$ ,  $A$  и  $\lambda$  значения  $x_i''$  — это

\*Наряду со способом произведений существует и способ сумм, для использования которого требуются, однако, дополнительные расчетные формулы.

всегда натуральные числа, положительные в сторону возрастания значений  $x_i$  переменной  $X$  и отрицательные в сторону убывания этих значений. Поэтому после небольшой тренировки значения  $x_i''$  уже не вычисляют, а записывают, согласно mnemonicскому правилу: а) в столбце  $x_i''$  в строке условного начала  $A$  проставить «0» или прочерк; б) если ряд средних значений  $x_i$  интервалов возрастает сверху вниз, то выше прочерка проставить соответственно  $x_i'' = -1, -2, -3$  и т. д., а ниже —  $1, 2, 3$  и т. д. (см. табл. 2.10).

3. Вычислим последовательно по всем столбцам справа от столбца  $x_i''$  в каждой строке: а)  $x_i'' P_i$ , б)  $(x_i'' P_i) x_i''$ , в)  $[(x_i'')^2 P_i] x_i''$  и г)  $[(x_i'')^3 P_i] x_i''$  — отсюда и название способа: «способ произведений». Разумеется, необходимо учитывать знак отклонения  $x_i''$ . Заметим, что последовательная процедура умножения предыдущего результата на  $x_i''$  выполняется столько раз, сколько параметров распределения требуется вычислить: для вычисления  $M$  и  $D$  — два раза; если нужен еще  $A_s$ , то — три; а если нужен и  $E_x$  — то, как в табл. 2.10, четыре раза.

4. Суммируем результаты последовательного умножения в четырех последних столбцах — это и есть начальные моменты  $m_1'', m_2'', m_3''$  и  $m_4''$  соответственно. Их значения можно округлить, как показано в табл. 2.10.

5. Вычислим среднее арифметическое значение по формулам (2.46) и (2.45)

$$m_1' = \lambda m_1'' = 35,5 \cdot 1,11 \approx 39,4 \text{ (мс)}, \\ M = A + m_1' = 71 + 39,4 \approx 110 \text{ (мс)}.$$

6. Вычислим дисперсию по формуле (2.49) и стандартное отклонение по формуле (2.52):

$$D = \lambda^2 [m_2'' - (m_1'')^2] = 35,5^2 (5,81 - 1,11^2) \approx \\ \approx 1260 (5,81 - 1,23) = 1260 \cdot 4,58 \approx 5770,8 \text{ (мс)}^2,$$

$$Q = \sqrt{D} = \lambda \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2} \approx 35,5 \cdot 2,14 \approx 76 \text{ (мс)}.$$

7. Вычислим коэффициент асимметрии по формуле (2.53):

$$A_s = \frac{m_3'' - 3m_2''m_1'' + 2(m_1'')^3}{[m_2'' - (m_1'')^2] \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2}} = \\ = \frac{32,1 - 3 \cdot 5,81 \cdot 1,11 + 2(1,11)^3}{4,58 \cdot 2,14} = \frac{32,1 - 19,3 + 2,7}{9,8} \approx 1,58.$$

8. Вычислим коэффициент эксцесса по формуле (2.54):

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{m_4'' - 4m_3''m_1'' + 6m_2''(m_1'')^2 - 3(m_1'')^4}{[m_2'' - (m_1'')^2]^2} - 3 = \\ &= \frac{220,7 - 4 \cdot 32,1 \cdot 1,11 + 6 \cdot 5,81(1,11)^2 - 3(1,11)^4}{(4,58)^2} - 3 = \\ &= \frac{220,7 - 142,5 + 42,9 - 4,6}{21} - 3 \approx 2,5. \end{aligned}$$

Заметим, что последовательная процедура способа произведений допускает использование уже полученных ранее промежуточных результатов для дальнейших вычислений. Так, в частности, определяя дисперсию и стандартное отклонение, мы вычислили промежуточные значения

$$[m_2'' - (m_1'')^2] = 4,58 \quad \text{и} \quad \sqrt{m_2'' - (m_1'')^2} = 2,14,$$

которые использовали затем при расчете коэффициентов  $A_x$  и  $E_x$ .

Итак, искомые значения равны:

$$M \approx 0,11 \text{ с}, \quad \sigma \approx 0,08 \text{ с}, \quad A_x \approx 1,58, \quad E_x \approx 2,5.$$

Если эмпирическое распределение предполагается в дальнейшем нормализовать (см. 2.4), то ограничиваются расчетом стандартных мер положения и рассеивания — среднего арифметического значения, дисперсии и стандартного отклонения. При этом рассчитывать данные, в которых одна-две значащие цифры, удобнее не с помощью таблицы, а прямо по записанной в виде мультимножества дифференциальной функции распределения  $\mathcal{P}(X) = (P_1x_1, P_2x_2, \dots, P_kx_k)$ . Заметим, что формулу (2.426) в этом случае можно записать так:

$$\text{Момент}_k = \sum_{i=1}^k P_i x_i^k = \sum_X \mathcal{P}(X^k). \quad (2.55)$$

И тогда среднее арифметическое значение (первый начальный момент) определяется суммированием дифференциальной функции по аргументу:

$$M_X = \sum_X \mathcal{P}(X) = \sum_{i=1}^k P_i x_i, \quad (2.56)$$

а дисперсия (второй центральный момент) — как разность квадратов среднего квадратического и среднего арифметического значений:

$$D_X = S_X^2 - M_X^2 = \sum_X \mathcal{P}(X^2) - M_X^2, \quad (2.57)$$

где  $M_X$  определено формулой (2.56). Из (2.55) следует и проверка условия нормировки (нулевой начальный момент):

$$\sum_X P(X^0) = \sum_{i=1}^k P_i x_i^0 = 1. \quad (2.58)$$

**Пример 2.5.** В экспериментах по изучению точности подравнивания человеком яркости объектов под эталонную яркость в одной из серий опытов получено распределение модуля ошибки подравнивания, в %:  $P(X) = (0,14 \cdot 0,1; 0,13 \cdot 0,2; 0,22 \cdot 0,3; 0,20 \cdot 0,4; 0,06 \cdot 0,5; 0,05 \cdot 0,6; 0,05 \cdot 0,7; 0,03 \cdot 0,8; 0,03 \cdot 0,9; 0,03 \cdot 1,0; 0,03 \cdot 1,1; 0,02 \cdot 1,2; 0,01 \cdot 1,3)$ . Нетрудно убедиться, что условие нормировки (2.58) выполнено. Вычисляем среднее арифметическое значение по (2.56).

$$M_X = 0,014 + 0,026 + 0,066 + 0,080 + 0,030 + 0,030 + 0,035 + 0,024 + 0,027 + 0,030 + 0,033 + 0,024 + 0,013 = 0,432 \approx 0,4(\%)$$

По формуле (2.57) вычисляем дисперсию модуля ошибки подравнивания

$$\begin{aligned} D_X &= (0,14 \cdot 0,1^2 + 0,13 \cdot 0,2^2 + 0,22 \cdot 0,3^2 + 0,20 \cdot 0,4^2 + \\ &+ 0,06 \cdot 0,5^2 + 0,05 \cdot 0,6^2 + 0,05 \cdot 0,7^2 + 0,03 \cdot 0,8^2 + 0,03 \cdot 0,9^2 + \\ &+ 0,03 \cdot 1,0^2 + 0,03 \cdot 1,1^2 + 0,02 \cdot 1,2^2 + 0,01 \cdot 1,3^2) - 0,432^2 \approx \\ &\approx 0,2714 - 0,1866 = 0,0848 \end{aligned}$$

Извлекая из дисперсии корень квадратный, находим стандартное отклонение:  $\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0,0848} \approx 0,29 \approx 0,3(\%)$ . Заметим, что итоговые результаты округляются до десятых долей соответственно измеренным значениям

## 1.1 ВИДЫ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

### 1.1.1. Общие положения

В природе существует большое разнообразие законов распределения, объясняемое свойствами самих случайных величин и условиями, в которых они подлежат изучению.

Основные свойства — положение на числовой оси, рассеивание, скошенность и выпуклость, рассмотренные выше, — в общем случае не определяют полностью аналитическое выражение для закона распределения некоторой случайной величины. Наоборот, аналитическое выражение, соотнобразующееся как с теоретическими

знаниями о специфике случайной величины, так и с экспериментальными данными о ней, несет всю необходимую информацию о случайной величине, в том числе и об основных ее свойствах.

Говоря о виде закона распределения случайной величины  $X$ , будем иметь в виду, во-первых, свойства самой величины  $X$  как переменной (дискретность или непрерывность и возможные пределы области ее существования), во-вторых, свойства реальных условий, влияющих так или иначе на случайную величину  $X$ , и, в-третьих, определенное аналитическое (геометрическое и табличное) представление функций, связывающих значения  $x$ , случайной величины  $X$  с соответствующими вероятностями  $P_i$ .

Из большого количества видов известных законов распределения мы рассмотрим лишь те, которые в настоящее время могут использоваться в психологических дисциплинах для описания случайных переменных. Кроме того, в главе 5 будут рассмотрены некоторые из специальных распределений, используемых при статистической проверке гипотез.

### 1.1.1. Нормальный закон

Нормальный закон\* распределения во всех естественных науках имеет фундаментальное значение. И в психологических дисциплинах его значение трудно переоценить. Достаточно сказать, что все психологические шкалы основываются на этом законе, поскольку ему следуют распределения большинства человеческих способностей и свойств.

Самой общей характеристикой нормального распределения является простое наблюдение того закономерного факта, что очень большие центральные отклонения  $(x_i - M)$  встречаются крайне редко, а маленькие — часто, при этом одинаковые по модулю отклонения одинаково вероятны. Такая закономерность может иметь место в условиях, когда на случайную величину  $X$  действует большое число разнообразных факторов и доля воздействия каждого из них одинаково мала по сравнению с их числом.

Вероятность нормально распределенной величины  $X$  принять значение  $x_i$  на некотором интервале  $\lambda$  определяется уравнением

$$P(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x_i - M)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.59)$$

где  $M$  — среднее арифметическое значение;  $\sigma$  — стандартное отклонение;  $\pi = 3,14 \dots$ ;  $\lambda = x_{i+1} - x_i$ ,  $-\infty < X < \infty$ . Можно видеть,

---

\*Закон Лапласа — Гаусса (по имени ученых, независимо открывших и исследовавших его) из-за широкого распространения в природе первоначально принимался за норму распределения любой случайной величины, чем и обусловлено название «нормальный закон».

что, согласно (2.59), значения вероятности определяются не только значениями аргумента  $x_i$ , но и значениями  $M$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$ , которые, естественно, различны у конкретных случайных величин. В этой связи целесообразно использовать вместо функции (2.59) функцию плотности вероятности, центрированную и нормированную стандартным отклонением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0,5x^2), \quad (2.60)$$

где  $x = \frac{x_i - M}{\sigma}$  — основные отклонения;  $f(x) = \frac{1}{\lambda} P(x_i \leq X \leq x_{i+1})$  — плотность вероятности.

Плотность, определяемая уравнением (2.60), называется *стандартной плотностью нормального закона*. Ее значения приведены в табл. 1 Приложения 2

Отметим некоторые свойства нормального распределения на примере его стандартной плотности (рис. 2.5, а).

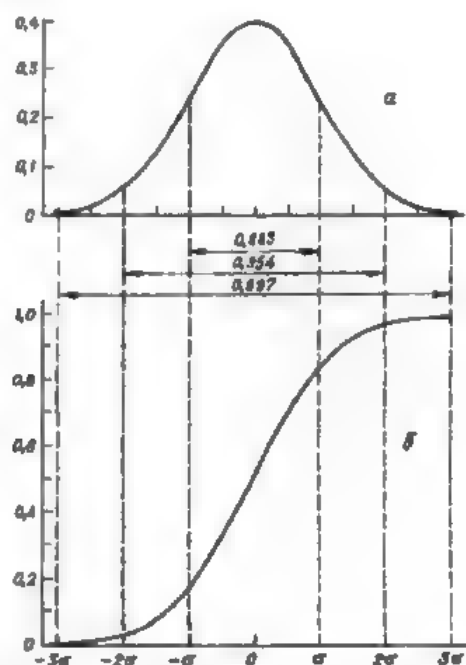


Рис. 2.5. Плотность (а) и функция распределения (б) нормального закона в стандартном масштабе.

По оси абсцисс — значения случайной величины в единицах стандартного отклонения ( $\sigma$ ), по оси ординат — плотности и вероятности соответственно.

1. При всех значениях  $x_i$  переменной  $X$  плотность  $f(x)$  положительна.

2. Плотность  $f(x)$  симметрична относительно математического ожидания, которое в этой связи нередко называют центром рассе-



ивания (для симметричных распределений). Коэффициент асимметрии равен нулю.

3. При увеличении модуля аргумента ( $|x_i| \rightarrow \infty$ ) функция  $f(x)$  сколь угодно близко (асимптотически) приближается к оси абсцисс, не достигая ее

4. Максимальную плотность нормальное распределение имеет при  $x_i = M$ :

$$f(x_i = M) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

— для конкретной случайной величины и

$$f(x_i = M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,39894$$

— для стандартного выражения плотности (табл. I Приложения 2). Таким образом, в случае нормального распределения численные значения среднего арифметического, моды и медианы совпадают.

5. Из рис. 2.5,а можно видеть, что плотность нормального распределения быстро убывает по мере увеличения значений центрированной случайной величины, выраженных в единицах стандартного отклонения; в частности, следует запомнить, что

$$P(-\sigma \leq X \leq \sigma) \approx 0,683, \quad (2.61a)$$

$$P(-2\sigma \leq X \leq 2\sigma) \approx 0,954, \quad (2.61б)$$

$$P(-3\sigma \leq X \leq 3\sigma) \approx 0,997. \quad (2.61в)$$

В этой связи и стандартное (среднее квадратическое) отклонение определяют по аналогии с полуинтерквартильным отклонением как половину величины интервала, симметричного относительно центра рассеивания, для которого вероятность появления на нем значения случайной величины  $X$  равна 0,683.

6. Заметим (рис. 2.5,а), что при значениях  $-\sigma$  и  $\sigma$  на кривой стандартной плотности имеются точки смены кривизны (перегиба): на участке  $(-\sigma \leq X \leq \sigma)$  функция плотности вогнута вниз, а за его пределами, наоборот, вогнута вверх.

7. Четвертый основной момент  $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$ ; поэтому в уравнение для коэффициента эксцесса и введено слагаемое  $(-3)$ , чтобы эксцесс нормального распределения численно равнялся нулю и служил «началом» отсчета для измерения степени крутости любых функций распределения.

Вероятность случайной величине  $X$  принять значение не больше заданного  $x$  определяется функцией распределения:

$$P(X \leq x) = F(x),$$

где в стандартном масштабе ( $x = \frac{x_1 - M}{\sigma}$ )

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-0,5x^2) dx. \quad (2.62)$$

Эта функция изображена на рис. 2.5,б. Так как  $F(x)$  симметрична относительно центра рассеивания, то при вычислениях используют и разные другие формулы\*.

Несмотря на то, что теоретически нормальный закон распределения предполагает существование бесконечно малых и бесконечно больших значений любой следующей ему случайной величины, на практике, тем более в психологии, случайные переменные имеют конечные области существования. В этой связи на практике используются функции нормального распределения, ограниченные слева и справа основными отклонениями:  $-3 < x < 3$ , как в табл. 1 Приложения 2.

Чтобы установить, является ли эмпирическое распределение изучаемой случайной величины нормальным, необходимо сопоставить сведения о свойствах этой величины и условиях ее изучения, известные исследователю, со свойствами функций нормального распределения, рассмотренными выше. Это сопоставление вначале является качественным, а затем осуществляется специальными количественными методами.

Основой качественного сопоставления служит «физическое» условие появления нормального распределения, а именно действие на изучаемую случайную величину большого числа факторов, тоже случайных, воздействия которых преимущественно независимы и примерно одинаковы. Если такое условие, по мнению исследователя, имеет место, то можно ожидать, что изучаемая случайная величина распределена нормально. Так, на формирование способностей человека действует множество различных случайных факторов (биологических, физиологических, психических и социальных). В этой связи можно ожидать, что в массе людей степень выраженности той или иной способности распределена нормально. И это во многом подтверждается практикой тестирования способностей\*\*.

Количественное сопоставление включает в себя два последовательных этапа. Первый — сравнение отдельных свойств эмпирического распределения со свойствами нормального закона. Это касается прежде всего симметричности (мода, медиана и среднее

\*См.: Абергауз Г.Г., Тронь А.П., Копеев Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчетам. М., 1970.

\*\*См., напр.: Бурлачук Л.Ф., Морозов С.М. Словарь-справочник по психологической диагностике. Киев, 1989.

арифметическое примерно или точно одинаковы) и эксцесса (коэффициент эксцесса близок нулю). Весьма информативным является факт наличия точек смены кривизны на сглаженном от руки полигоне распределения при значениях случайной величины  $x_i = -\sigma$  и  $x_i = \sigma$ , а также факт приближенного выполнения равенств (2.61 а—в). Если имеется соответствие между некоторыми из перечисленных свойств эмпирического и нормального распределения, то можно перейти к следующему этапу.

Второй этап состоит в вычислении теоретической функции распределения по эмпирическому ряду в предположении, что он подчиняется нормальному закону. Именно это предположение и обосновывается при качественном и количественном (на первом этапе) сопоставлении свойств

Вычисление теоретических значений вероятностей, соответствующих эмпирическим частотам, в общем случае осуществляется либо по таблицам функций распределения, либо через логарифмы, либо с использованием таблиц специальных функций. Нередки комбинации двух последних способов.

В предположении нормального закона обычно пользуются таблицами функций  $f(x)$  или  $F(x)$ . Суть вычисления вероятностей здесь такова. Осуществляют преобразование значений  $x$ , случайной величины  $X$  в основные отклонения

$$z = \frac{x_i - M}{\sigma},$$

для чего, разумеется, предварительно следует по эмпирическому ряду вычислить оценки  $M$  и  $\sigma$ . Далее по табл. I Приложения 2 для всех  $x$  эмпирического ряда определяют значения стандартной плотности  $f(z)$ , которые затем умножают на отношение  $\frac{\lambda}{\sigma}$ , чтобы от стандартного перейти к истинному (опытному) масштабу функций распределения или значению функции распределения  $F(x)$ :

$$P_i^*(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = \frac{\lambda}{\sigma} f_i(z)$$

и

$$P_i^*(X \leq x_i) = F_i(z).$$

Сопоставление заканчивается сравнением фактических (полученных в опыте) частот и теоретических (вычисленных) вероятностей. Если различия малы или отсутствуют, то можно считать, что изучаемая случайная величина распределена нормально. Лишенная субъективных предпочтений оценка того, «малы» или «велики» получившиеся различия, осуществляется с помощью специальных критериев согласия, которые будут рассмотрены в главе 6.

Если согласие теоретического распределения с эмпирическим рядом приемлемое, то посредством теоретических функций рас-

пределения можно решать важные для практических приложений задачи:

- определять вероятности  $P(x_i \leq X \leq x_i + \lambda)$  при любом по величине  $\lambda$ ;
- определять вероятности

$$P(X \leq x_i) \text{ и } (P(X \geq x_i)), \quad (2.63)$$

где

$$P(X \leq x_i) + P(X \geq x_i) = 1;$$

- определять квантили (обратная предыдущей задача): по заданной вероятности (2.63) определить значение  $x_i$  случайной переменной  $X$ ;

- определять среднее арифметическое значение части распределения, отсекаемой ординатой  $f(x)$ .

**Пример 2.6.** В табл. 2.11 приведен эмпирический ряд распределения значений амплитуды установившихся колебаний руки человека. Проверим, является ли данное распределение нормальным, и если является, то определим:

- 1) 2,5%-е квантили, 75%-й квантиль;
- 2) вероятность того, что амплитуда колебаний руки будет больше 75 мм;
- 3) вероятность того, что амплитуда будет находиться в пределах 50–70 мм;
- 4) среднее арифметическое значение амплитуды при условии, что она будет не больше 66 мм.

Таблица 2.11

Расчет теоретических вероятностей к примеру 2.6

Среднее значение интервала $x_i$	Частость $p_i$	Основное отклонение $z$	Стандартная плотность $f(z)$	Вероятность $P_i^*$
41,5	0,010	-2,9	0,00595	0,003
45,5	0,015	-2,3	0,02833	0,016
49,5	0,045	-1,7	0,09405	0,054
53,5	0,125	-1,15**	0,20560	0,119
57,5	0,145	-0,6	0,33322	0,193
61,5	0,290	0,0	0,39894	0,231
65,5	0,165	0,6	0,33322	0,193
69,5	0,110	1,15**	0,20560	0,119
73,5	0,085	1,7	0,09405	0,054
77,5	0,000	2,3	0,02833	0,016
81,5	0,010	2,9	0,00595	0,003
$\sum_{i=1}^{11}$	1,000	0,0	1,73324	1,001

Примечание. Значения, отмеченные двумя звездочками, получены по табл. 1 Приложения 2 путем линейной интерполяции:  $f(z + 0,05) = 0,5[f(z + 0,1) - f(z)]$ .

Эмпирическому ряду распределения амплитуды соответствует полигон распределения на рис. 2.6. Рассматривая ряд распределения и его полигон, можно видеть, что ряд близок симметричному. Суммарная частота значений на интервале (53,5 – 69,5), несколько большем, чем интервал в два стандартных отклонения ( $2\sigma = 2 \cdot 6,92$  мм), составляет 0,737, т. е. равенство (2.61а) приближенно выполняется. Среднее арифметическое значение находится в том же интервале группировки, что и мода и (из-за симметричности) медиана.

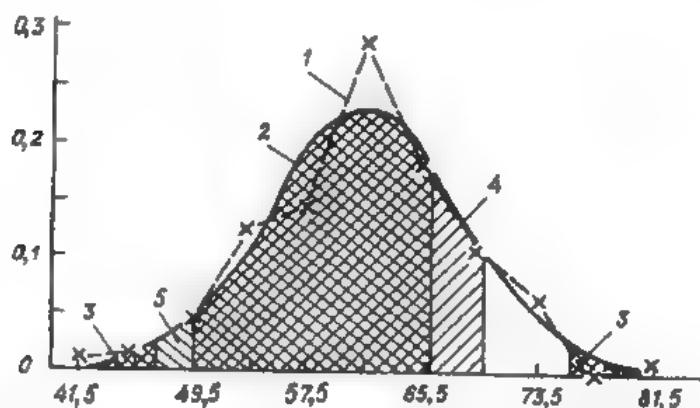


Рис. 2.6. Полигон эмпирического ряда распределения и соответствующая ему функция плотности нормального распределения.

1 — полигон; 2 — функция плотности; 3 — доли распределения вероятностей, соответствующие 2,5%-м квантилям; 4 — доля, соответствующая вероятности  $P(50 \text{ мм} \leq X \leq 70 \text{ мм})$ ; 5 — доля, покрывающая часть распределения, соответствующую ограниченному  $x = 66$  мм (усеченному) распределению.

Конечно, амплитуда движений руки не может быть бесконечно малой и бесконечно большой, поэтому область существования рассматриваемой случайной величины ограничена\*. Тем не менее уже приведенные черты сходства позволяют предполагать нормальное распределение и перейти к вычислениям (второй этап сопоставления).

Последовательность вычислений демонстрирует табл. 2.11. Проверка вычислений  $x$  и  $f(x)$  осуществляется выполнением ра-

\* Минимальная амплитуда тождественно равна нулю, а максимальная была ограничена в опытах до 400 мм.

венства  $\frac{\lambda}{\sigma} \sum_i f(x) \approx 1$ . В нашем случае  $\lambda = 4$  и  $\sigma = 6,92$ ;

$$\frac{4}{6,92} 1,73324 = \frac{6,93296}{6,92} \approx 1,002.$$

Сравнивая пока визуально частоты  $p_i$  и вероятности  $P_i^*$ , можно видеть, что различия невелики. Следовательно, с определенными основаниями можно предполагать, что амплитуда колебаний руки распределена нормально. В частности, можно записать функцию, связывающую в нашем примере вероятности амплитуде принять значения на интервале  $\lambda = 4$  со значениями амплитуды:

$$P_i^*(x_i \leq X \leq x_i + 4) = 0,58 f(x),$$

где  $f(x)$  — стандартная нормальная плотность с параметрами  $M = 61,5$  и  $\sigma = 6,92$  (см. рис. 2.6).

Определим теперь интегральную функцию. Самый простой способ — использование табл. 1 Приложения 2, непосредственно дающей теоретические значения вероятностей

$$P(X \leq x_i) = F\left(z = \frac{x_i - M}{\sigma}\right)$$

Эти вероятности приведены в табл. 2.12, а связывающая их функция — на рис. 2.7.

Таблица 2.12

Эмпирическая и теоретическая интегральные функции  
распределения данных к примеру 2.6

$w_i$	$x$	$F(x)$	$F^*(x_k)$
41,5	-2,9	0,002	0,002
45,5	-2,3	0,011	0,011
49,5	-1,7	0,045	0,046
53,5	-1,15	0,125	0,133
57,5	-0,6	0,274	0,288
61,5	0,0	0,500	0,500
65,5	0,6	0,726	0,712
69,5	1,15	0,875	0,869
73,5	1,7	0,955	0,955
77,5	2,3	0,989	0,990
81,5	2,9	0,998	1,000

Если под рукой нет таблицы значений  $F(x)$ , то значения этой функции приближенно определяются суммированием вероятностей  $P_i^* = P(x_i \leq X \leq x_i + \lambda)$ . Но при этом следует учитывать, что для любого интервала  $\lambda_k$ , среднему значению  $w_k = x_k$  которого сопоставляется вероятность  $P(X \leq x_k)$ , искомое значение этой

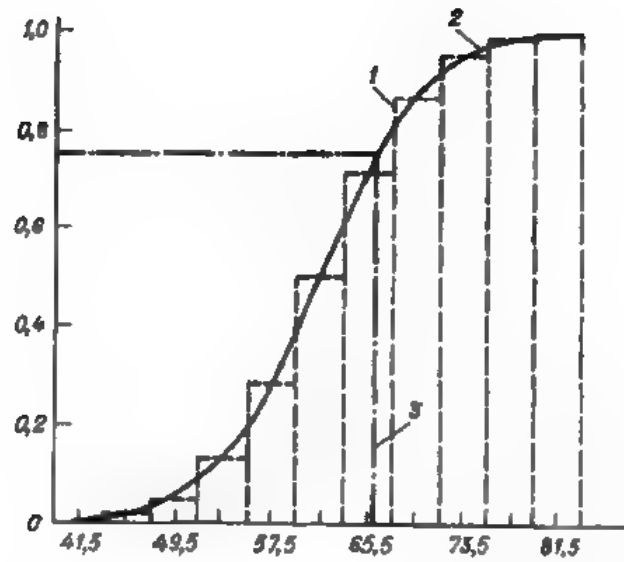


Рис. 2.7. Кумулятивная гистограмма  $F^*(x_i)$  и соответствующая ей функция нормального распределения  $F(x)$ .  
1 — гистограмма, 2 — функция, 3 — 75%-й квантиль.

вероятности

$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} P_i^* + 0,5P_k^* \quad (2.64)$$

включает в себя только половину элемента вероятности  $P_k^*$ , приходящейся на интервал  $\lambda_k$  (рис. 2.7).

Займемся теперь определением 2,5%-х и 75%-го квантилей распределения амплитуд. Как указывалось выше (см. 1.4), квантилем называется значение  $x_\alpha$  случайной величины  $X$ , для которого вероятность

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

Часто вместо вероятности  $\alpha$  используют процент, тогда и говорят о  $\alpha$ -процентном квантиле.

Квантили непосредственно определяют по таблице значений  $F(x)$ , отыскивая вероятность.

$$\alpha = F(x_k) \quad \text{при} \quad \alpha \geq 0,5, x_k > 0$$

или

$$\alpha = 1 - F(x_k) \quad \text{при} \quad \alpha < 0,5, x_k < 0,$$

после чего, осуществляя обратное преобразование аргумента из стандартного в естественный масштаб, определяют

$$x_a = \sigma x_k + M.$$

1. Итак, 2,5%-х квантилей два — это  $x_{0,025}$  и  $x_{0,975}$ . Определим сначала второй. По табл. I Приложения 2 находим

$$F(2, 0) = 0,977 \approx 0,975.$$

Основное отклонение  $x_k = \pm 2,0$  и может служить для приближенной оценки искомых квантилей (см. рис. 2.6):

$$x_{0,025} \approx 6,92(-2) + 61,5 \approx 47,7 \text{ (мм)},$$

$$x_{0,975} \approx 6,92 \cdot 2 + 61,5 \approx 75,3 \text{ (мм)}.$$

Аналогично вычислим 75%-й квантиль. Из табл. I Приложения 2 находим  $F(0,7) \approx 0,75$ . Следовательно, как показано на рис. 2.7,

$$x_{0,75} \approx 6,92 \cdot 0,7 + 61,5 \approx 66,3 \text{ (мм)}.$$

Заметим теперь, что 75%-й квантиль — это третий квартиль  $Q_3$ , который мы можем вычислить по формулам (1.42) и (1.43), используя вероятности  $P_i^*$  из табл. 2.11. В частности, по формуле (1.42) получим

$$X_{0,75} = 63,5 + 4(0,750 - 0,616) \frac{1}{0,193} \approx 66,3 \text{ (мм)}.$$

Таким образом, пользуясь этими формулами, мы можем определять по значениям гистограммы (полигона) любые квантили.

2. Если нахождение квантиля — это задача нахождения аргумента по заданному значению функции, то определение искомой вероятности — прямая задача, которая решается по той же таблице значений  $F(x)$ , где  $x = \frac{x_k - M}{\sigma}$  и  $x$ , задан. Так, искомая вероятность

$$P[X > 75 \text{ мм}] = 1 - P[X \leq 75 \text{ мм}] = 1 - F\left(\frac{75 - 61,5}{6,92}\right) = 1 - F(1,95)$$

По табл. I Приложения 2, интерполируя, находим

$$F(1,95) \approx F(1,9) + 0,5[F(2,0) - F(1,9)] \approx 0,974.$$

Следовательно,

$$P[X > 75 \text{ мм}] \approx 1 - 0,974 = 0,026.$$

3 Вероятность того, что случайная величина  $X$ , имеющая плотность  $f(x)$ , примет значение на конечном замкнутом интервале  $(a - b)$ , — это определенный интеграл

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$



который для нормального закона часто называют функцией Лапласа, а в общем случае — *интегралом вероятности*\*. Мы будем выражать такие вероятности, пользуясь таблицей значений  $F(x)$ :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) && \text{при } b > a > M \text{ и } a < b < M, \\ P(a \leq X \leq b) &= [F(b) + F(|a|)] - 1 && \text{при } b > M \text{ и } a < M, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где  $M$  — среднее арифметическое значение

Искомая вероятность  $P(50 \text{ мм} \leq X \leq 70 \text{ мм})$  должна быть вычислена по формуле (2.65), так как  $a < M$ :

$$\begin{aligned} P(50 \text{ мм} \leq X \leq 70 \text{ мм}) &= \left[ F\left(\left|\frac{50 - 61,5}{6,92}\right|\right) + F\left(\frac{70 - 61,5}{6,92}\right) \right] - 1 \approx \\ &\approx [F(1,65) + F(1,2)] - 1 \approx 0,950 + 0,885 - 1 = 0,835, \end{aligned}$$

эта вероятность показана на рис. 2.6.

4. Задача определения среднего арифметического значения усеченного распределения может получить большое распространение в психологической практике, в частности при оценке средней успешности выполнения экспериментальных заданий в подгруппах хорошо (плохо) успевающих испытуемых.

Обозначая среднее арифметическое значение усеченного в «точке»  $x_k$  распределения случайной величины  $X$  как  $M[X \leq x_k]$ , будем использовать для расчетов формулу

$$M[X \leq x_k] = M \pm \sigma \frac{f(x)}{F(x)}, \quad (2.66)$$

где  $f(x)$  и  $F(x)$  — соответственно плотность и функция распределения нормального закона в стандартном масштабе:  $x = \frac{x_k - M}{\sigma}$ , а знак определяется тем, с какой стороны «усекается» распределение («плюс», если слева, и «минус», если справа). Так, для  $x_k = 66$  получаем  $x \approx 0,65$ . По табл. I Приложения 2 находим, интерполируя:

$$f(0,65) \approx 0,32273 \text{ и } F(0,65) \approx 0,74189.$$

Далее по формуле (2.66) со знаком «минус», так как отсекаются большие значения амплитуды, вычислим:

$$M[X \leq 66 \text{ мм}] \approx 61,5 - 6,92 \frac{0,32273}{0,74189} \approx 58,5 \text{ (мм)}.$$

\*В «Справочнике по вероятностным расчетам» [Абергауз Г.Г., Троць А.П., Копенкин Ю.Н., Корокина И.А., 1970] дана сводка формул, по-разному выражающих интеграл вероятности.

### 1.1.1. Нормализация распределений

При измерении психических явлений важное значение имеет нормализация распределений, т. е. их отображение в нормальное распределение. Помимо обеспечения математической корректности обработки результатов посредством нормализации осуществляется переход от порядковых шкал к равноинтервальным и соизмеряются, превращаются в однокачественные и аддитивные (т. е. суммируемые) первично разнокачественные величины. Поэтому нормализация широко используется в разработке стандартных методик, включающих в себя интегральные показатели. Все стандартные психологические тесты обязательно нормализованы, что обеспечивает наряду с другими причинами высокую точность и надежность измерений.

Известны три метода нормализации — в эксперименте, преобразованием переменной и по составу.

Нормализация в эксперименте означает, что, меняя состав тестовых задач (вопросов, стимулов и пр.), подбирают такие, набор которых приводит к нормальному распределению вероятностей результатов (затрат времени, баллов, производительности и т. д.). Это трудный путь. Обычно его не проходят до конца, ограничиваясь получением распределения, близкого к симметричному, которое дальше нормализуют по составу.

Функционально преобразуя изучаемую переменную  $Y$  в нормально распределенную переменную  $X$ , подбирают вид функции  $X = \varphi(Y)$ , такой, чтобы в результате как-то не по Гауссу распределенная величина  $Y$  привела бы к нормально распределенному  $X$ . Наиболее распространенный случай — так называемое *логарифмически нормальное* распределение, имеющее плотность

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u_j \leq 0 \\ \frac{1}{2,303\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp[-0,5u^2] & \text{при } u_j > 0, \end{cases}$$

где  $u = \frac{x_i - M_X}{\sigma_X}$  и  $x_i = \lg y_i$ .

Здесь функция  $\varphi$ , преобразующая  $y_i$  в  $x_i$ , есть десятичный логарифм. Функциональное преобразование не всегда возможно. В частности, необходимо, чтобы преобразуемая переменная  $Y$  была уже распределена логарифмически нормально, а это встречается редко.

В психологии обычно после приближенной симметризации в эксперименте к эмпирическим распределениям применяют норма-

лизацию по составу\*. Суть этого метода заключается в следующем. Пользуясь уравнением (2.3), изменяют величину каждого интервала  $\lambda_y$  переменной  $Y$  так, чтобы при неизменной вероятности его плотность стала нормальной:

$$P_i = f(y_i)\lambda_y = f(x_i)\lambda_x = f(z_i)\lambda_z = \dots \quad (2.67)$$

При этом необходимому увеличению плотности соответствует сжатие исходного интервала, а уменьшению — его расширение (рис. 2.8). К сожалению, из четырех переменных в любом из равенств (2.67) известны только две — исходные плотность и интервал, а искомые нормальные подбираются приближенно путем ряда итераций. Поэтому нормализация по составу трудоемка и не обеспечивает однозначности результатов.

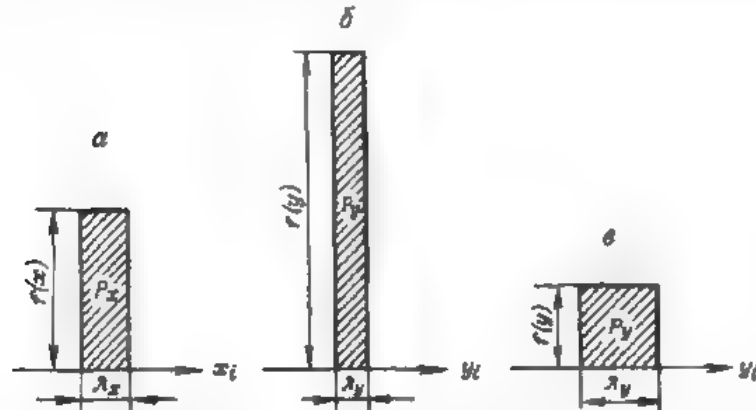


Рис. 2.8. Преобразование плотностей и интервалов переменной  $Y$  при нормализации по составу

а — элемент вероятности нормального закона,  $f(x)$  — нормальная плотность; б —  $f(x) = 0,5f(y)$ , поэтому  $\lambda_x = 2\lambda_y$ ; в —  $f(x) = 2f(y)$ , поэтому  $\lambda_x = 0,5\lambda_y$ ,  $P_y = P_x$ .

Таких недостатков лишен метод нормализации функции распределения\*\*. Суть этого нового метода нормализации заключена в следующем. Поскольку вероятности  $P_i$  на  $i$ -м интервале  $\lambda_y$  соответствует определенное приращение интегральной функции.

$$P_i = d_i F(y_i) = f(y_i)\lambda_y = f(x_i)\lambda_x = d_i F(x_i),$$

\*См. напр.: Gutjahr W. Die Messung psychischer Eigenschaften. Berlin, 1971.

\*\*См.: Суходольский Г. В. Нормализация эмпирических распределений // Психологические особенности обучающихся в техническом вузе / Под ред. М. Д. Дворяшиной. Ч. I. Новосибирск, 1973. С. 77–82; Методы системного педагогического исследования / Под ред. Н. В. Кузьминой. Л., 1980. С. 141–143.

то можно определить необходимое значение  $z_i$  нормально распределенной случайной переменной  $X$  по конкретному значению  $y_i$  исходной случайной величины, приравнивая значения исходной и нормальной интегральных функций и по стандартной таблице находя обратную функцию:

$$y_i \rightarrow F(y_i) \approx F(z_i) \rightarrow z_i = F^{-1}(z_i) \dots, \quad (2.68)$$

где  $F(z)$  — стандартная интегральная функция нормального распределения, определяемая формулой (2.62).

Значения  $z_i$  выражены в стандартном масштабе (т. е. центрированы и нормированы средним квадратическим, или стандартным, отклонением) и с вероятностью около 0,997 занимают интервал от  $-3$  до  $+3$ , в который благодаря нормализации отображаются любые первичные измерения. Применение отрицательных чисел не всегда удобно, и обычно в психологических методиках используются положительные целочисленные шкальные оценки\*. Поэтому от стандартных  $z_i$  следует перейти к новым значениям

$$y_i^* = \sigma[y^*] z_i + M[y^*] \dots, \quad (2.69)$$

подходящим образом выбирая стандартное отклонение  $\sigma[y^*]$  и среднее арифметическое значение  $M[y^*]$  новой шкалы  $Y^*$ .

Процедура нормализации функции распределения сравнительно проста и сводится к следующим действиям. 1. Получить исходную функцию  $F(y)$ . 2. Применяя формулу (2.68), последовательно для значений  $F(y)$  по табл. 1 Приложения 2 найти, если надо — интерполируя, приближенно равные значениям  $F(y_i)$  значения  $F(z_i)$ , а для них — обратные им нормально распределенные значения  $z_i$ . 3. По формуле (2.69), предварительно выбрав стандартное отклонение и среднее арифметическое значение, рассчитать и округлить до целых чисел значения шкальных оценок. 4. Сопоставить исходные  $z_i$  и нормализованные  $y_i^*$  в табличной номограмме (см., напр., табл. 2.15).

**Пример 2.7.** Для одного из субтестов методики Векслера (отечественный вариант) получено распределение первичных оценок в баллах  $Y$  (табл. 2.13). Как известно, тест Векслера нормализован в целом и по субтестам. Поэтому необходимо нормализовать и распределение первичных оценок. Конечно, это следует делать на репрезентативной выборке испытуемых. Но принципиальное знакомство с нормализацией функции распределения можно осуществить и на эмпирическом распределении  $Y$  из табл. 2.13.

\*Гайда В. К., Захаров В. П. Психологическое тестирование. Л., 1982.

Таблица 2.13

**Нормализация первичных баллов в шкальные оценки  
к примеру 2.7**

№ п/п $i$	Баллы $y_i$	Частоты $f_i$	Частоты $F_i$	$F(y_i) \approx F(x_i)$	Стандартные оценки $x_i$	Шкальные оценки $y_i^*$
10	16	1	0,01	0,995	2,60	18
9	15	4	0,04	0,970	1,90	16
8	14	3	0,03	0,935	1,50	15
7	13	7	0,07	0,885	1,20	14
6	12	20	0,20	0,750	0,68	12
5	11	30	0,30	0,500	0,00	10
4	10	13	0,13	0,285	-0,57	8
3	9	14	0,14	0,150	-1,03	7
2	8	7	0,07	0,045	-1,70	5
1	7	1	0,01	0,005	-2,60	2
Суммы		100	1,00	-	-	-

1. По формуле (2.64) рассчитаем значения эмпирической функции распределения  $F(y_i)$ :

$$F(y_1) = 0,00 + 0,5 \cdot 0,01 = 0,005;$$

$$F(y_2) = 0,01 + 0,5 \cdot 0,07 = 0,045,$$

$$F(y_3) = 0,01 + 0,07 + 0,5 \cdot 0,14 = 0,150$$

и т. д. (табл. 2.13).

2 Приравниваем приближенно эти значения стандартным из табл. 1 Приложения 2 и из той же таблицы находим стандартные оценки  $x_i$ .

$$F(y_1) = 0,005 \approx 0,00466 = F(x_1) \rightarrow F^{-1}(x_1) = -2,6,$$

$$F(y_2) = 0,045 \approx 0,04457 = F(x_2) \rightarrow F^{-1}(x_2) = -1,7.$$

Для оценки  $F(x_3)$  нужно интерполировать по табличным значениям:  $0,13567 < F(y_3) = 0,15000 < 0,15866$ . Считая от ближайшего — «верхнего» значения, получим поправку  $(0,15866 - 0,15000) \div (0,15866 - 0,13567) \approx 0,3$  долей интервала в одну десятую аргумента. Следовательно, искомое стандартное значение  $x_3 = F^{-1}(x_3) = -1,0 + (-1)0,3 = -1,03$ . Аналогично интерполяцией получаем:  $x_4 = F^{-1}(x_4) = -0,5 + (-1) \cdot (0,30854 - 0,28500) : (0,30854 - 0,27425) = -0,57$  и другие значения, записанные в табл. 2.13.

3. В качестве среднего арифметического нормально распределенной шкальной оценки, согласно методике Векслера, выберем  $M[y^*] = 10$ , а в качестве стандартного отклонения —  $\sigma[y^*] = 3$ . Тогда шкальные оценки  $y_i^*$  рассчитываются по найденным значениям  $x_i$  и уравнению  $y_i^* = 3x_i + 10$ :  $y_1^* = 3(-2,6) + 10 = 2$ ,  $y_2^* =$

$3(-1, 7) + 10 = 5$  и т. д. (табл. 2.13). Сравнивая в таблице второй и последний столбцы, можно видеть, что в результате нормализации произошло растяжение ряда интервалов.

**Пример 2.8.** В первых четырех столбцах табл. 2.14 представлено распределение баллов  $Z$ , полученное в результате выполнения той же группой еще одного субтеста Векслера. Аналогично предыдущему нормализуем баллы  $Z$  через  $X$  и отобразим их в шкальные оценки  $Y^*$ . Для этого снова вычислим эмпирическую функцию распределения  $F(z_i)$ , приравняем ее значения — интерполируя, если надо, — стандартным значениям  $F(x)$  из табл. 1 Приложения 2, определим там же значения  $x_i$  и отобразим их, округляя до целых, в шкальные оценки  $y_i^* = 3x_i + 10$ . Все результаты записаны в последних трех столбцах табл. 2.14. Заметим, что в отличие от предыдущего в данном случае некоторые интервалы первичных оценок сжимаются при нормализации.

Таблица 2.14

Нормализация первичных баллов в шкальные оценки  
к примеру 2.8

№ п/п $i$	Баллы $z_i$	Частоты $f_i$	Частоты $p_i$	$F(z_i) \approx$ $F(x_i)$	Стандартные оценки $x_i$	Шкальные оценки $y_i^*$
22	26	1	0,01	0,995	2,60	18
21	25	2	0,02	0,980	2,05	16
20	24	4	0,04	0,950	1,65	15
19	23	6	0,06	0,900	1,30	14
18	22	9	0,09	0,825	0,92	13
17	21	4	0,04	0,760	0,70	12
16	20	8	0,08	0,700	0,53	12
15	19	5	0,05	0,635	0,35	11
14	18	6	0,06	0,580	0,20	11
13	17	6	0,06	0,520	0,05	10
12	16	9	0,09	0,445	-0,16	10
11	15	12	0,12	0,340	-0,40	9
10	14	7	0,07	0,245	-0,70	8
9	13	2	0,02	0,200	-0,84	8
8	12	3	0,03	0,175	-0,92	7
7	11	5	0,05	0,135	-1,10	7
6	10	5	0,05	0,085	-1,37	6
5	9	3	0,03	0,045	-1,70	5
4	8	—	—	0,030	-1,90	4
3	7	1	0,01	0,025	-1,96	4
2	6	—	—	0,020	-2,06	4
1	5	2	0,02	0,010	-2,30	3
Суммы		100	1,00	—	—	—

Как и в стандартном протоколе теста Векслера, для практического использования строится табличная номограмма, в которой нормально распределенные первичные («сырые») оценки отображены в оценки шкальные. Такая номограмма для примеров 2.7 и 2.8 приведена в виде табл. 2.15. Из нее нетрудно понять как, благодаря нормализации распределений и отображению в одну и ту же шкалу нормально распределенных чисел, происходит соизмерение качественно не сравнимых исходных величин.

Таблица 2.15

Табличная номограмма нормально распределенных отображений разнокачественных первичных оценок в шкальные к примерам 2.7 и 2.8

Первичные оценки		Шкальные оценки $y_i^*$	Первичные оценки		Шкальные оценки $y_i^*$
$y_i$	$z_i$		$y_i$	$z_i$	
—	—	19	—	15	9
16	26	18	10	14 — 13	8
—	—	17	9	12 — 11	7
15	25	16	—	10	6
14	24	15	8	9	5
13	23	14	—	8 — 6	4
—	22	13	—	5	3
12	21 — 20	12	7	—	2
—	19 — 18	11	—	—	1
11	17 — 16	10			

## 2.1. Некоторые другие законы распределения важные для психологии

**Гамма-распределение.** Если воздействие одного или нескольких факторов из большого их числа, влияющего на случайную величину  $X$ , значительно превосходит по силе воздействия все остальные факторы, то распределение случайной величины  $X$  приобретает положительную асимметрию. Плотность вероятности такого распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x - \mu)^{\alpha-1} e^{-\beta(x-\mu)} & \text{при } x \geq \mu, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.70)$$

Здесь  $\mu$  — произвольное число, но всегда  $\mu \geq 0$ ;

$$\alpha = \frac{(M[X])^2}{D[X]} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{M[X]}{D[X]}, \quad (2.71)$$

где  $M[X]$  — математическое ожидание,  $D[X]$  — дисперсия случайной величины  $X$ ;  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция (см. табл. II Приложения 2), имя которой гамма-распределение и получило.

Уравнение (2.70) представляет собой так называемую *обобщенную* форму гамма-распределения. При  $\mu = 0$  либо при подстановке  $y = x - \mu$  получается *обычное* гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при } y \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.72)$$

Здесь обозначения те же, что и в формулах (2.70) и (2.71).

Интегральная функция гамма-распределения удовлетворяет уравнению

$$P(Y \leq y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx.$$

Теоретические значения этой функции непосредственно не табулированы и определяются обычно косвенным путем\*. Для эмпирических гистограмм значения кумуляты, характеризующие вероятность  $P^*(Y \leq y)$ , вычисляются аналогично тому, как это было показано для нормального распределения, — по формуле (2.64). Сходным образом вычисляются для гамма-распределения значения интеграла вероятностей:

$$P^*(a \leq Y \leq b) = \sum_{a-0,5\lambda}^{b+0,5\lambda} P^*(y) - 0,5[P^*(a) + P^*(b)].$$

Здесь  $P^*(a \leq Y \leq b)$  — вероятность случайной величины  $Y$  принять значения на конечном отрезке  $< a \div b >$ , где  $a$  и  $b$  — средние значения интервалов группировки  $\lambda$ ;  $P^*(y)$  — вероятность появления значений  $y$  на интервале  $\lambda$ ;  $P^*(a)$  и  $P^*(b)$  — вероятности появления значений  $y$  на интервалах со средними значениями  $a$  и  $b$  соответственно.

При графическом изображении интегральной функции искомая вероятность  $P^*(a \leq Y \leq b)$  для гамма-распределения, как и для других распределений, непосредственно «снимается» с графика в виде

$$P^*(a \leq Y \leq b) = P^*(Y \leq b) - P^*(Y \leq a). \quad (2.73)$$

Гамма-распределение находит в психологии все более широкое применение благодаря тому, что большинство случайных временных интервалов, так или иначе характеризующих психическую активность, подчиняется именно этому распределению. В частности, время многих реакций человека подчинено гамма-распределению. Ему следуют также общие (суммарные) затраты времени на последовательность рабочих действий, слабо зависящие (или

\*См., напр.: Шори Я.Б., Кузьмин Ф.И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М., 1968.



не зависящие) друг от друга, причем величина этих затрат для разных действий может значительно варьироваться.

**Пример 2.9.** Человек-оператор, взаимодействуя с одной из подсистем обслуживаемой им системы контроля и управления, выполняет разнообразные действия: включение и выключение подсистемы, настройку и переключение рабочих режимов и др. Путем хронометража в натурных условиях получены оценки общих затрат времени на действия оператора с указанной подсистемой, которые в зависимости от числа и специфики действий варьируются от нескольких секунд до нескольких минут. Эмпирический ряд распределения этих затрат времени приведен в первых двух столбцах табл. 2.16. Поскольку длительность некоторых действий человека с подсистемой значительно превышает длительность большинства остальных действий, можно ожидать, что случайные затраты рабочего времени подчиняются гамма-распределению. Об этом же может свидетельствовать и скошенность ряда распределения влево (положительная асимметрия).

Таблица 2.16

Расчет вероятностей по гамма-распределению к примеру 2.9:

$$P^*(t) = 3,16 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 \cdot e^{-5,3 \cdot 10^{-3} t}$$

$t, c$	$P(t)$	$\lg t$	$3 \lg t$	$0,023 t$	$\lg P^*(t)$	$P^*(t)$
12	0,016	1,0792	3,2376	0,2760	-1,5387	0,029
36	0,216	1,5563	4,6689	0,8280	-0,6594	0,219
60	0,278	1,7782	5,3346	1,3800	-0,5457	0,285
84	0,236	1,9243	5,7729	1,9320	-0,6594	0,219
108	0,129	2,0334	6,1002	2,4840	-0,8841	0,131
132	0,070	2,1206	6,3618	3,0360	-1,1745	0,067
156	0,035	2,1931	6,5793	3,5880	-1,5090	0,031
180	0,015	2,2553	6,7659	4,1400	-1,8744	0,012
204	0,005	2,3096	6,9288	4,6920	-2,2635	0,005
228	0,005	2,3579	7,0737	5,2440	-2,6706	0,002

Так как минимальные затраты времени асимптотически стремятся к нулю\*, примем в качестве исходной для расчета двухпараметрическую форму гамма-распределения (2.72), согласно которой вероятность затрат времени

$$P^*(t_i \leq T \leq t_i + \lambda) = \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t_i^{\alpha-1} e^{-\beta t_i}, \quad (2.74)$$

где  $\lambda \approx 24$  с — интервал группировки;  $T$  — рабочее время;  $t_i$  — среднее значение затрат времени на  $i$ -м интервале  $\lambda$ .

\*Например, отдельный взгляд на средства контроля может длиться десятые доли секунды, что по сравнению с интервалом группировки  $\lambda \approx 24$  с является исчезающе малой величиной.

Вычислив по методу произведений среднее арифметическое

$$M[X] = 76,7$$

и дисперсию затрат времени

$$D[X] = 1425 \text{ с}^2,$$

определим по формуле (2.71) значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\alpha = \frac{76,7^2}{1425} \approx 4,13$$

(учитывая, что при целых  $\alpha$   $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ , округлим  $\alpha$  до 4, очевидно, без большой потери точности);

$$\beta = \frac{76,7}{1425} \approx 0,053 \left( \frac{1}{\text{с}} \right).$$

Заметим, что параметр  $\beta$  в отличие от  $\alpha$  имеет размерность скорости и характеризует интенсивность (производительность) действий человека-оператора. Подставляя найденные значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , а также  $\lambda$  в формулу (2.74) и обозначая для краткости искомую вероятность  $P^*(t_i \leq T \leq t_i + \lambda) \equiv P^*(t)$ , получаем уравнение

$$P^*(t) = \frac{24(5,3 \cdot 10^{-2})^4}{4!} t^3 e^{-5,3 \cdot 10^{-2} t}.$$

Осуществляя преобразование коэффициента при неизвестном,

$$\frac{24(5,3 \cdot 10^{-2})^4}{4!} \approx 3,16 \cdot 10^{-5},$$

окончательно получаем расчетное уравнение

$$P^*(t) = 3,16 \cdot 10^{-5} t^3 e^{-5,3 \cdot 10^{-2} t}.$$

Вычисление вероятностей по этому уравнению проще всего осуществляется через логарифмы. Логарифмируя функцию вероятности гамма-распределения, получаем:  $\lg P^*(t) = \lg(3,16 \cdot 10^{-5}) + 3 \lg t - 5,3 \cdot 10^{-2} t \lg e = -4,5003 + 3 \lg t - 0,023t$ . Следовательно, каждое значение  $\lg P^*(t)$  получено суммированием значений  $3 \lg t$ ,  $0,023t$  и константы  $-4,5003$ . Сопоставляя частоты  $p(t)$  с вероятностями  $P^*(t)$  из табл. 2.16, можно убедиться в неплохом согласии результатов. Гамма-распределение вероятностей общих затрат времени показано на рис. 2.9.

Определим далее, пользуясь формулой (2.64) и данными из табл. 2.16, значения кумуляты  $P^*(T \leq t)$ , они приведены в табл. 2.17. Заметим, что значения кумуляты, соответствующие средним значениям интервалов, определяются по формуле (2.64), а соответствующие граничным значениям — по формуле (1.40).

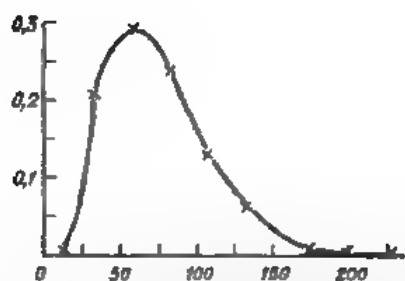


Рис. 2.9. Гамма-распределение вероятностей общих затрат времени к примеру 2.9.

По оси абсцисс — время,  $s$ ; по оси ординат — вероятности. Крестиками отмечены частоты.

Можно, конечно, ограничиться одним из способов, но тогда окажется затрудненным практическое использование кумуляты для определения вероятности  $P^*(T \leq t)$  при любом  $t \neq w_i$  или  $t \neq g_i$ . Кумулята, представленная удвоенным числом значений  $P^*(T \leq t)$ , как в табл. 2.17, может быть легко сглажена от руки на графике.

Таблица 2.17

Значения кумуляты, вычисленные по значениям вероятностей из табл. 2.16

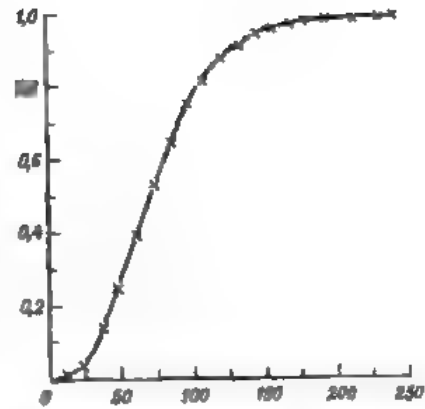
$t, с$	$P^*(T \leq w_i)$	$P^*(T \leq g_i)$	$P^*(T \leq t)$
0		0,000	0,000
12 <sup>x</sup>	0,014		0,014
24		0,028	0,029
36 <sup>x</sup>	0,139		0,139
48		0,248	0,248
60 <sup>x</sup>	0,390		0,390
72		0,533	0,533
84 <sup>x</sup>	0,643		0,643
96		0,752	0,752
108 <sup>x</sup>	0,818		0,818
120		0,883	0,883
132 <sup>x</sup>	0,917		0,917
144		0,950	0,950
156 <sup>x</sup>	0,966		0,966
168		0,981	0,981
180 <sup>x</sup>	0,987		0,987
192		0,993	0,993
204 <sup>x</sup>	0,996		0,996
216		0,998	0,998
228 <sup>x</sup>	0,999		0,999
240		1,000	1,000

Примечание. Крестиками отмечены средние значения  $w_i$  интервалов группировки,  $g_i$  — граничные значения интервалов.

Сглаженная кумулята (рис. 2.10) является хорошим приближением к истинной интегральной функции и позволяет непосредственно с графика определять интересующие исследователя оценки вероятностей. Например, по рис. 2.10 легко определить, что вероятность затрат времени на действия с подсистемой не более

Рис. 2.10. Интегральная функция гамма-распределения вероятностей затрат времени к примеру 2.9.

По оси абсцисс — время, с; по оси ординат — интегральные вероятности. Крестики — значения кумуляты, полученные сглаживанием с от руки.



минуты составляет почти 0,4, а вероятность затрат времени в пределах одной—двух минут по формуле (2.73) составляет

$$P^*(60 \leq T \leq 120) = P^*(T \leq 120) - P^*(T \leq 60) \approx 0,885 - 0,385 = 0,5$$

Следовательно, половина всех затрат времени на обслуживание лежит в этих пределах.

Комбинации трех параметров ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ) обеспечивают значительное разнообразие кривых, в которых реализуется гамма-распределение. При больших  $\alpha$  гамма-распределение приближается к симметричному, почти нормальному виду (например, уже при  $\alpha \geq 10$ ). Наоборот, при  $\alpha \leq 1$  гамма-распределение крайне асимметрично (модой является  $y=0$ ). Частным случаем гамма-распределения при  $\alpha=1$  является так называемое экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение. Оно имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{при } x \geq 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь  $\beta = \frac{M[X]}{D[X]}$  и  $M[X]$  — математическое ожидание, а  $D[X]$  — дисперсия случайной величины  $X$ .

Интегральная функция экспоненциального распределения определяется как

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x},$$

а интеграл вероятности равен

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\beta(a)} - e^{-\beta(b)}.$$

Для эмпирического ряда показателем того, что его распределение экспоненциальное, служит помимо крайней асимметрии часто-

стей равенство среднего арифметического значения и стандартного отклонения

$$M[X] = \sigma[X].$$

Наиболее широко экспоненциальный закон распределения используется в психологических приложениях теории надежности и теории массового обслуживания. В частности, ему следует распределение времени между различными ошибочными действиями человека, выполняющего некоторую работу. В этой связи параметр  $\beta$  называют интенсивностью отказов (ошибок) человека.

**Пример 2.10.** В экспериментах по изучению надежности элементарных вычислительных операций, выполняемых человеком, установлено, что при сложении чисел интенсивность ошибок, остающихся незамеченными и приводящих к неверному результату, составляет 0,42 операции в минуту и является постоянной в течение 10 минут вычислений\*. Считая, что распределение времени между ошибками ( $t$ ) экспоненциально, можем записать:

$$f(t) = 0,42e^{-0,42t}$$

и

$$F(t) = 1 - e^{-0,42t}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами для вычисления вероятностей, требуются таблицы функций  $e^{-x}$  либо логарифмов. Логарифмируя плотность, получаем

$$\lg f(t) = \lg 0,42 - 0,42 \lg e t = -0,3768 - 0,42 \cdot 0,4343t.$$

Например, требуется определить вероятность того, что на интервале  $1 \pm 0,02$  мин появится незамеченная ошибка. Так как  $\lambda \approx 1$ , то

$$P(0 \leq T \leq 1 \pm 0,02) \approx f(t),$$

$$\lg f(t) = -0,3768 - 0,1824 = -0,5592.$$

Потенцируя, определяем  $f(1) = 0,276$ .

Пусть далее требуется оценить вероятность того, что скрытая ошибка появится не позже, чем через 1 мин после начала сложения. Преобразуя интегральную функцию, логарифмируем ее:

$$\lg[1 - F(t)] = -\beta t \lg e = -0,4343\beta t,$$

и подставляем  $\beta = 0,42$  и  $t = 1$ :

$$\lg[1 - F(t = 1)] = -0,4343 \cdot 0,42 \cdot 1 = -0,1824 = \bar{1},8176,$$

---

\*Кандарацкова Н.М., Суходольский Г.В. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций // Экспериментальная и прикладная психология / Под ред. Б.Ф. Ломова. Вып. 1. Л., 1968

откуда

$$\text{antilg}(1,8176) = 1 - F(t = 1) = 0,658.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P(T \leq 1 \text{ мин}) = F(t = 1 \text{ мин}) = 1 - 0,658 = 0,342.$$

**Биномиальное распределение.** Пусть выполняется  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых может появиться некоторое случайное событие  $A$ , безусловная вероятность появления которого постоянна и равна  $P$ , а вероятность его не появления равна  $1 - P$ . Последовательность событий, полученная таким образом, называется последовательностью Бернулли (она рассматривалась выше).

Вероятность  $P_{n,m}$  того, что в последовательности Бернулли длиной в  $n$  испытаний некоторое событие  $A$  появится ровно  $m$  раз, равна коэффициенту при неизвестном  $x^m$  в разложении бинома  $[Px + (1 - P)]^n$  по степеням  $x$ :

$$P_{n,m} = C_n^m P^m (1 - P)^{n-m},$$

где  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ .

Математическое ожидание числа благоприятных исходов ( $m$ ) определяется величиной

$$M[m] = nP,$$

а дисперсия — произведением

$$D[m] = nP(1 - P)$$

Учитывая, что  $m$  — натуральное число или нуль, очевидно, следует округлять значения обоих параметров до целой части<sup>\*</sup>:

$$M[m] = \text{ant}\{nP\}$$

и

$$D[m] = \text{ant}\{nP(1 - P)\}.$$

В психологической практике биномиальное распределение используется всегда, когда требуется определить априорную вероятность появления изучаемого события в серии независимых испытаний известной длины. В частности, попытки «доказать» существование телепатической связи основываются на сравнении

<sup>\*</sup>Приято считать биномиальный закон распределением существенно дискретной переменной, что, очевидно, связано с его преимущественным использованием в схеме Бернулли. Но биномиальное распределение можно использовать и для любых неотрицательных  $n$  и  $m$  (при  $m \leq n$ ), заменяя факториалы первого сомножителя на гамма-функции:

$$P_{n,m} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)} P^m (1 - P)^{n-m},$$

где параметры  $m$  и  $n$  могут иметь смысл времени.

вероятности ответов перцепиента с априорной вероятностью случайного угадывания, вычисляемой по биномиальному распределению. Аналогичное сравнение проводится в исследованиях обнаружения пороговых стимулов и вообще там, где требуется установить зависимость (или независимость) возможности появления какого-либо события от определенных факторов

Пусть, например, имеется алфавит (полная группа) из десяти событий  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), причем вероятность одного из них, события  $A_3$ , составляет 0,1. Очевидно, вероятность неоявления этого события (что эквивалентно появлению любого из остальных девяти событий) равна 0,9. Определим, считая появление событий в последовательности испытаний независимым, вероятности  $P_{10,m}$  событию  $A_3$  появиться ровно  $m$  раз из  $n$ , где  $n = 10$ , а  $m = 1, 2, \dots, 10$

$$P_{10,1} = \frac{10!}{1!9!} 0,1^1 \cdot 0,9^9 \approx 10 \cdot 0,1 \cdot 0,387 \approx 0,39,$$

$$P_{10,2} = \frac{10!}{2!8!} 0,1^2 \cdot 0,9^8 \approx 45 \cdot 0,01 \cdot 0,43 \approx 0,19,$$

$$P_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} 0,1^3 \cdot 0,9^7 \approx 120 \cdot 0,001 \cdot 0,478 \approx 0,06,$$

$$P_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} 0,1^4 \cdot 0,9^6 \approx 210 \cdot 0,0001 \cdot 0,531 \approx 0,01,$$

$$P_{10,5} = \frac{10!}{5!5!} 0,1^5 \cdot 0,9^5 \approx 252 \cdot 0,00001 \cdot 0,59 \approx 0,002$$

$$P_{10,6} = \frac{10!}{6!4!} 0,1^6 \cdot 0,9^4 \approx 210 \cdot 0,000001 \cdot 0,656 \approx 0,0001$$

Можно видеть, что вероятность независимого последовательного появления в серии из 10 испытаний одного из десяти событий, имеющего фиксированную вероятность осуществления 0,1, быстро уменьшается, так что уже шестикратное появление  $A_3$  можно практически рассматривать как событие невозможное. Если бы теперь в некоторых условиях, от опыта к опыту, событие  $A_3$  появлялось бы более чем 6 раз из 10 испытаний, то это свидетельствовало бы о том, что появление  $A_3$  зависит от условий опыта и схема Бернулли неадекватна

Различные комбинации значений параметров  $n$  и  $m$  приводят к большому разнообразию форм биномиального распределения. При  $n < 20$  асимметрия распределения обычно ярко выражена; она положительна при  $P \ll 0,5$ , отрицательна при  $P \gg 0,5$ ; при  $P = 0,5$  распределение симметрично. При  $n > 20$  биномиальное распределение для любых, но не очень малых  $P$  симметрично и асимптотически приближается к нормальному с параметрами  $M[X] = nP$  и  $\sigma^2[X] = nP(1 - P)$ .

## ГЛАВА 3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### 3.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

#### 3.1.1. Система из двух случайных величин

Две случайные величины, рассматриваемые вместе, образуют систему. Пусть случайная величина  $X$  задана совокупностью своих значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а случайная величина  $Y$  — совокупностью значений  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Каждую из случайных величин можно изобразить совокупностью точек на числовой оси, как делали раньше. Но две случайные величины, рассматриваемые вместе, условимся изображать на двух взаимно перпендикулярных осях — горизонтальной оси  $X$  и вертикальной оси  $Y$ . Тогда событие, состоящее в совместном появлении какой-либо пары значений  $x_i, y_j$  этих величин, изображается на плоскости в системе прямоугольных координат точкой  $A_{ij}$ . Так как величины  $X$  и  $Y$  случайным образом принимают свои значения, то появление любой пары значений  $x_i, y_j$  — это случайное событие. Поэтому точка  $A_{ij}$  случайным образом располагается на плоскости  $XOY$  и называется случайной точкой. Следовательно, множеству из  $n$  пар значений  $x_i, y_j$  случайных величин  $X$  и  $Y$  соответствует  $n$  случайных точек на плоскости  $XOY$  (рис. 3.1, а). Соединяя точку  $A_{ij}$  с началом координат, получим вектор  $\vec{OA}_{ij}$ , длина и направление которого случайны (рис. 3.1, б). Поэтому систему из двух случайных величин называют случайным вектором на плоскости. А так как плоскость имеет два измерения, то говорят о двумерной системе случайных величин.

Совместное рассмотрение двух случайных величин в психологических приложениях может означать, во-первых, их принадлежность одному и тому же индивиду, во-вторых, одновременную принадлежность совокупности индивидов и, в-третьих, принадлежность этих величин совокупности индивидов, рассматриваемой в течение двух различных периодов времени. Так, попарное изучение возрастных особенностей психических качеств личности



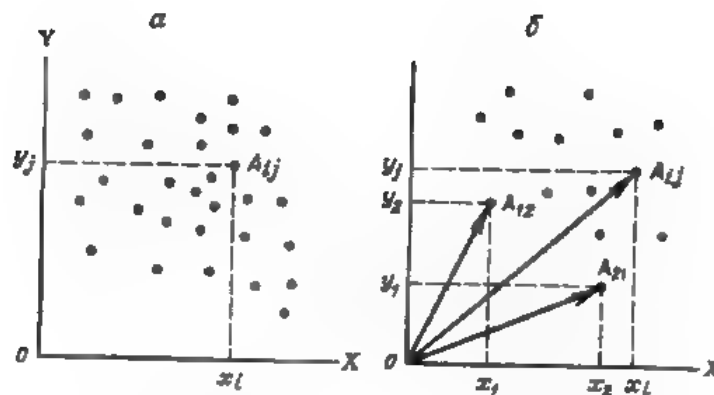


Рис. 3.1. Случайная точка (а) и случайный вектор (б), изображающие систему из двух случайных величин  $X$  и  $Y$ .

приводит к тому, что на протяжении длительного исследования у одного и того же индивида для каждой пары  $X$  и  $Y$  определяется совокупность числовых значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), которые характеризуют возрастные уровни проявления изучаемых качеств личности. Например, раз в полугодие, на протяжении всего периода дошкольного, школьного и вузовского обучения ( $\approx 20$  лет) у индивида измеряются объем непосредственного запоминания ( $X$ ) и объем внимания ( $Y$ ). Тогда обе случайные величины  $X$  и  $Y$  оказываются заданными сорока парами значений  $x, y$ . Попарное изучение психических качеств людей может осуществляться на протяжении сравнительно небольшого периода времени у группы людей числом  $n$ . В результате снова для любой пары качеств, измеримой в виде случайных величин  $X$  и  $Y$ , получается совокупность из  $n$  пар значений  $x, y$ . К двумерной системе случайных величин приводит также изучение у группы из  $n$  людей одного и того же психического явления (количественно определяемого в виде случайной величины), но измеряемого в течение двух разных периодов времени или, что то же самое, при двух разных комплексах условий.

Случайные величины в системе характеризуются теми же свойствами, что и отдельная случайная величина. Это — положение и рассеивание значений на числовой оси, а также скошенность и крутость. Однако свойства системы не исчерпываются свойствами образующих ее величин. В системе появляются новые свойства: ее положение и рассеивание на плоскости (рис. 3.2), ее асим-

метрии и крутость, а также связь между отдельными случайными величинами. Таким образом, количественные характеристики двумерной системы должны охватывать как систему в целом, так и отдельные составляющие ее случайные величины.

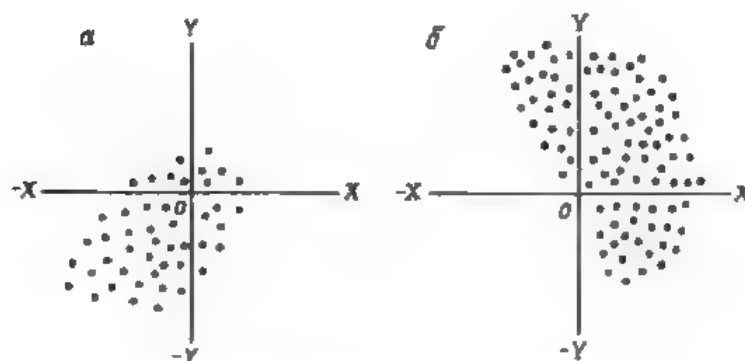


Рис. 3.2. Положение и рассеивание в системе из двух случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Совокупности случайных точек схематически изображают возможные различия этих свойств:  $a$ —система расположена в квадранте III;  $b$ —система расположена в квадранте I, здесь рассеивание больше, чем в случае  $a$ , так как точки занимают большую площадь.

Все количественные характеристики двумерной системы, так же как и одной случайной величины, принято делить на функции распределения и на числовые характеристики, являющиеся параметрами функций распределения. Двумерная система случайных величин характеризуется тремя видами распределений

- 1) *совмещенным (совместным) безусловным* распределением вероятностей значений  $x, y$ , случайных величин  $X$  и  $Y$  (двумерное распределение, или распределение на плоскости),
- 2) двумя *безусловными частными* распределениями — соответственно величины  $X$  и величины  $Y$ ;
- 3) совокупностью *условных частных* распределений вероятностей значений одной из случайных величин при условии, что другая приняла фиксированное (конкретное) значение.

### § 1.1 Совместное распределение двух случайных величин

Полной количественной характеристикой двумерной системы является совместное распределение вероятностей значений  $x, y$ , случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Если  $X$  и  $Y$  — дискретные переменные, то вероятность совместного появления пары значений  $x, y_j$  — обозначим ее  $P(x, y_j)$  — может быть изображена в виде перпендикуляра, восстановленного в точке плоскости  $XOY$ , имеющей координаты  $(x, y_j)$ . Высота перпендикуляра равна  $P(x, y_j)$ . Совокупность таких вероятностей, сопоставленная совокупности возможных пар значений дискретных случайных величин, образует совместное распределение этих величин в виде мультимножества, аналогичного дифференциальной функции распределения:

$$P(XY) = (P_{ij} x_i y_j), \quad (3.1)$$

где вероятности  $P_{ij} x_i y_j \equiv P[(X = x_i)(Y = y_j)]$  характеризуют конъюнкцию событий, состоящих в том, что дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  совместно приняли конкретные значения  $x_i$  и  $y_j$ .

Другая форма совместного распределения двух дискретных случайных величин (аналогичная интегральной функции), задается совокупностью вероятностей

$$P[(X \leq x_i)(Y \leq y_j)],$$

сопоставленных всевозможным парам значений этих величин

$$P[(X \leq x_i)(Y \leq y_j)] = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y P[(X = x_i)(Y = y_j)],$$

где суммирование выполняется для всех  $X \leq x_i$  и  $Y \leq y_j$ . Считая, что совокупность всех возможных пар значений  $x_i y_j$  образует полную группу, очевидно, имеем:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P[(X = x_i)(Y = y_j)] = 1,$$

поэтому

$$0 \leq P[(X \leq x_i)(Y \leq y_j)] \leq 1.$$

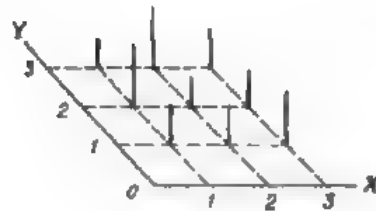
Обе формы совместного распределения вероятностей могут быть заданы таблицей (напр., табл. 3.1, где для простоты мы ограничились тем, что случайные величины  $X$  и  $Y$  принимают только три значения, вероятности которых произвольно заданы) и графически (рис. 3.3) а также аналитически в виде формулы.

Таблица 3.1

Дифференциальная и интегральная функции совместного распределения двух дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$

		$P[(X = x_i)(Y = y_j)]$			$P[(X \leq x_i)(Y \leq y_j)]$		
		Значения $x_i$ величины $X$			Значения $x_i$ величины $X$		
		1	2	3	1	2	3
Значения $y_j$ величины $Y$	1	0,10	0,10	0,13	0,10	0,20	0,33
	2	0,18	0,07	0,10	0,28	0,43	0,66
	3	0,07	0,16	0,10	0,33	0,66	0,99

а



б

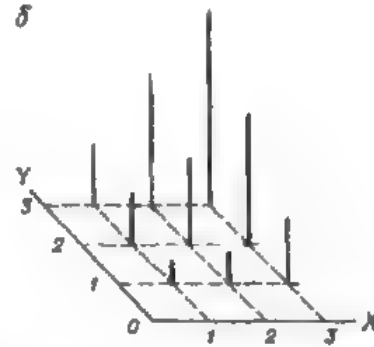


Рис. 3.3. Пространственные столбиковые диаграммы, соответствующие вероятностям из табл. 3.1.

а —  $P[(X = x_i)(Y = y_j)]$ , б —  $P[(X \leq x_i)(Y \leq y_j)]$  (вертикальный масштаб уменьшен вдвое)

Для квантованных непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ , принимающих значения на интервалах  $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$  соответственно, можем рассматривать вероятность  $P[(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_X) \times (y_j \leq Y \leq y_j + \lambda_Y)]$  совместного появления пары значений  $x_i, y_j$  на прямоугольном участке площади со сторонами  $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$ . Эта вероятность геометрически может быть определена объемом прямоугольной призмы с высотой  $f(x_i, y_j)$  и основанием  $\lambda_X \lambda_Y$ :

$$P[(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_X)(y_j \leq Y \leq y_j + \lambda_Y)] = P_{ij} = f(x_i, y_j) \lambda_X \lambda_Y. \quad (3.2)$$

Совокупность таких вероятностей ( $P_{ij}$ ), сопоставленная совокупности пар интервалов  $\lambda_X \lambda_Y$ , образует двумерную дифференциальную функцию распределения вероятностей значений  $x_i, y_j$ ; кванто-

ванных непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$P(XY) = (P_{ij}x_iy_j),$$

где  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , и геометрически изображается в виде призмogramмы (рис. 3.4, а).

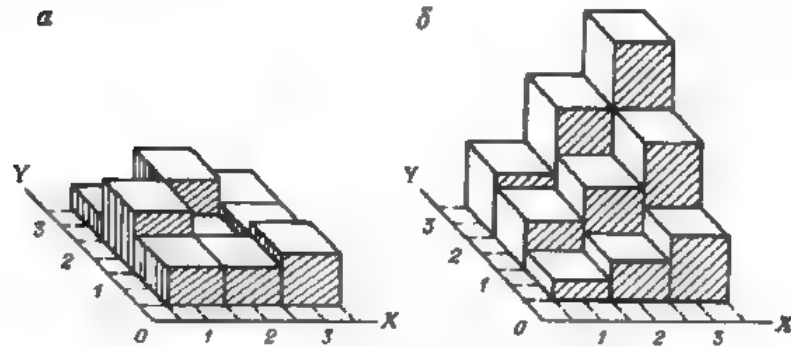


Рис. 3.4. Призмogramма (а) и кумулятивная призмogramма (б, вертикальный масштаб уменьшен вдвое), соответствующие вероятностям из табл. 3.2.

Суммируя вероятности (3.2) по  $x_i$  и по  $y_j$ , определяем вероятность совместного выполнения неравенств  $X \leq x_i$  и  $Y \leq y_j$

$$P[(X \leq x_i)(Y \leq y_j)] = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y P_{ij}. \quad (3.3)$$

Очевидно, как и для дискретной величины,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1,$$

где  $n$  — количество интервалов квантования  $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$ . Совокупность вероятностей (3.3), сопоставленная совокупности пар интервалов  $\lambda_X \lambda_Y$ , образует «интегральную» форму распределения и геометрически изображается в виде кумулятивной призмogramмы (рис. 3.4, б).

Значения вероятностей (3.2) и (3.3), по которым построены призмogramмы на рис. 3.4, приведены в табл. 3.2.

Величина  $f(x, y)$  в уравнении (3.2) называется *двумерной плотностью вероятности*. Она характеризует как бы «массу» вероятности, приходящейся на «единичный» прямоугольный элемент

площади  $XOY$ , и численно равна высоте элементарной призмы на призмোগрамме (см. рис. 3.4, а)

Таблица 3.2

Дифференциальные и интегральные функции распределений  
квантованных случайных величин:

а) Вероятности  $P_{ij} = P\{(x_i \leq X \leq x_i + \lambda_x)(y_j \leq Y \leq y_j + \lambda_y)\}$   
призмোগраммы (рис. 3.4, а)

$y_j \leq Y \leq y_j + \lambda_y$	$x_i \leq X \leq x_i + \lambda_x$			$\sum_{j=1}^n P_{ij} = P_i$
	$0,5 \div 1,5$	$1,5 \div 2,5$	$2,5 \div 3,5$	
$0,5 \div 1,5$	0,10	0,10	0,13	0,33
$1,5 \div 2,5$	0,16	0,07	0,10	0,33
$2,5 \div 3,5$	0,07	0,16	0,10	0,33
$\sum_{i=1}^n P_{ij} = P_j$	0,33	0,33	0,33	0,99

б) Вероятности  $P\{(X \leq x_i)(Y \leq y_j)\}$ ,  
кумулятивной призмোগраммы (рис. 3.4, б)

$Y \leq y$	$X \leq x_i$		
	1	2	3
1	0,10	0,20	0,33
2	0,26	0,33	0,66
3	0,33	0,66	0,99

Если рассматривать бесконечно малые значения интервалов квантования  $dx$  и  $dy$ , то вероятность непрерывным случайным величинам  $X$  и  $Y$  принять значения на элементарном прямоугольнике площадью  $dx \cdot dy$  записывается так:

$$P\{(x \leq X < x + dx) \times (y \leq Y < y + dy)\} = f(x, y) dx dy,$$

где  $f(x, y)$  — теоретическая функция двумерной плотности  $dx > 0$  и  $dy > 0$ . Функция двумерной плотности геометрически представляет собой некоторую поверхность, рельеф которой может быть любым (так же как и рельеф местности). Наиболее изученными являются выпуклые симметричные функции двумерной плотности, подчиняющиеся закону Гаусса.

Интегрируя плотность  $f(x, y)$  по  $x$  и по  $y$ , получаем (интегральную) функцию двумерного распределения:

$$F(x, y) = \int_{x_{\min}}^x \int_{y_{\min}}^y f(x, y) dx dy.$$

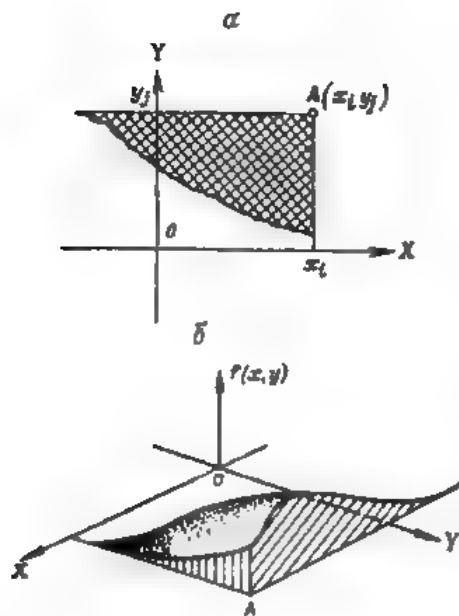


Рис. 3.5. Геометрическая интерпретация функции двумерного распределения.

а — заштрихована площадь фигуры, удовлетворяющая совместному решению неравенств  $X \leq x_i$  и  $Y \leq y_j$ ;

б — объем пространства, соответствующий вероятности  $P[(X < x)(Y < y)] = P(xy)$ , где  $x$  и  $y$  — координаты точки А.

где

$$F(x, y) = P[(X < x)(Y < y)]$$

Геометрически  $F(x, y)$  — это объем пространства, ограниченного сверху поверхностью распределения  $f(x, y)$ , а снизу — площадью фигуры, образованной совместно выполняемыми неравенствами  $X < x$  и  $Y < y$  (рис. 3.5).

### § 3. Частные безусловные и условные эмпирические распределения и взаимосвязь случайных величин в двумерной системе

Как и для случайных событий, совместное распределение вероятностей двух случайных величин количественно полностью характеризует систему из этих величин. Поэтому, суммируя двумерную дифференциальную функцию распределения по одной из случайных переменных, получаем частное (одномерное) безусловное распределение оценок вероятностей другой случайной переменной:

$$\sum_X \mathcal{P}(XY) = \mathcal{P}(Y), \quad \sum_Y \mathcal{P}(XY) = \mathcal{P}(X), \quad (3.4)$$

где  $\mathcal{P}(XY)$  определена выше уравнением (3.1),  $\mathcal{P}(Y) = (P_j y_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и  $\mathcal{P}(X) = (P_i x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), причем в скалярном

выражении безусловные частоты составляют

$$P_j = \sum_{i=1}^k P_{ij} \quad \text{и} \quad P_i = \sum_{j=1}^m P_{ij},$$

где  $P_{ij}$  — совместная частота как элемент совмещенного распределения.

Совокупность частот (вероятностей)  $P_i$ , сопоставленная совокупности интервалов  $\lambda_x$ , на которых случайная величина  $X$  принимает свои значения  $x_i$ , образует эмпирический ряд безусловного распределения вероятностей случайной величины  $X$  в двумерной системе. Точно так же совокупность частот (вероятностей)  $P_j$ , сопоставленная совокупности интервалов  $\lambda_y$ , образует эмпирический ряд безусловного распределения вероятностей случайной величины  $Y$  в той же системе. Оба ряда представлены, например, в последней строке и столбце табл. 3.2а.

Кроме безусловных (совмещенного и частных) распределений в двумерной системе существуют и условные распределения, которые образованы условными вероятностями (частотами) появления значений одной из величин при условии, что другая величина приняла значение на каком-либо из «своих» интервалов квантования.

Совокупность условных вероятностей (частот), сопоставленная совокупности интервалов квантования одной случайной величины, соответствующих как условию некоторому интервалу значений другой случайной величины, образует ряд условного распределения. Записывая такие ряды в виде мультимножества, получаем две группы (дифференциальных функций) условных распределений в двумерной системе:

$$\mathcal{P}(X/y_j) = (P_{ij} \cdot x_i / y_j), \quad \mathcal{P}(Y/x_i) = (P_{ij} \cdot y_j / x_i).$$

Каждая из случайных величин имеет столько условных распределений, на сколько интервалов квантована другая случайная величина. Поэтому отдельные условные распределения ассоциируются в матрицы условных распределений аналогично тому, как это было в системе случайных событий:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X/Y) &= [\mathcal{P}(X/y_1); \quad \mathcal{P}(X/y_2); \quad \dots; \mathcal{P}(X/y_m)], \\ \mathcal{P}(Y/X) &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}(Y/x_1), \\ \mathcal{P}(Y/x_2), \\ \dots \\ \mathcal{P}(Y/x_k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что, транспонируя  $\mathcal{P}(Y/X)$ , можем записать эту матрицу как мультимножество условных распределений:

$$\mathcal{P}^T(Y/X) = [\mathcal{P}^T(Y/x_1); \quad \mathcal{P}^T(Y/x_2); \quad \dots; \mathcal{P}^T(Y/x_k)].$$



Как и для случайных событий, вероятность (частость) совместного появления пары значений  $x_i, y_j$  определяется произведением безусловной вероятности появления одного из значений на условную вероятность значения другой величины при условии, что первое произошло:

$$P_{ij}x_iy_j = P_i x_i \cdot P_{j|i}y_j/x_i = P_j y_j \cdot P_{i|j}x_i/y_j,$$

или короче.

$$P_{ij} = P_i \cdot P_{j|i} = P_j \cdot P_{i|j}, \quad (3.6)$$

где  $P_{ij}$  — вероятность совмещения любой пары значений на элементе плоскости со сторонами  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$ ;  $P_i$  и  $P_j$  — безусловные вероятности появления значений  $x_i$  и  $y_j$  на «своих» интервалах;  $P_{j|i}$  или  $P_{i|j}$  — условные вероятности (условных) событий  $x_i/y_j$  или  $y_j/x_i$ , которые состоят в том, что  $x_i$  появилось при условии появления  $y_j$  или что  $y_j$  появилось при условии появления  $x_i$ .

Из (3.6) следует, что условные вероятности определяются делением совместных вероятностей на вероятности условий:

$$P_{i|j} = P_{ij} : P_j, \quad P_{j|i} = P_{ij} : P_i. \quad (3.7)$$

Обобщая скалярные уравнения (3.6) и (3.7) можем, как и для систем событий, записать матричные уравнения распределений вероятностей (частостей) в двумерной системе случайных величин:

$$P(XY) = P(X) \circ P(Y/X) = P(Y) \circ P(X/Y), \quad (3.8)$$

$$P(Y/X) = P(XY) \oslash P(X), \quad P(X/Y) = P(XY) \oslash P(Y), \quad (3.9)$$

которыми удобно пользоваться для практических расчетов.

Основываясь на условиях независимости случайных событий (1.26), можно сформулировать условия *стохастической* независимости двух случайных величин.

$$P(X/y_j) = P(X) \text{ и } P(Y/x_i) = P(Y) \quad (3.10)$$

для всех  $j = 1, 2, \dots, m$  и  $i = 1, 2, \dots, k$ . При нарушении этих равенств имеет место *стохастическая связь* — зависимость между случайными величинами  $X$  и  $Y$ .

Для иллюстрации уравнений (3.4), (3.9) и (3.10) рассмотрим несложный пример. Пусть случайная величина  $X$  квантована на два интервала, причем  $x_1, x_2$  — средние значения этих интервалов; аналогично для  $Y$   $y_1, y_2, y_3$  — средние значения трех интервалов квантования. Совмещенное распределение частостей декартова произведения указанных интервалов такое:  $P(XY) = \{0,06x_1y_1, 0,10x_1y_2, 0,04x_1y_3, 0,24x_2y_1, 0,40x_2y_2, 0,16x_2y_3\}$ . Суммируя «по  $Y$ », находим частное распределение для  $X$ :  $P(X) = [(0,06x_1y_1 + 0,10x_1y_2 + 0,04x_1y_3), (0,24x_2y_1 + 0,40x_2y_2 + 0,16x_2y_3)] =$

$(0,2x_1, 0,8x_2)$ . Точно так же, суммируя «по  $X$ », находим частное распределение для  $Y$ :  $P(Y) = [(0,06x_1y_1 + 0,24x_2y_1), (0,10x_1y_2 + 0,40x_2y_2), (0,04x_1y_3 + 0,16x_2y_3)] = (0,3y_1, 0,5y_2, 0,2y_3)$ . Дальше, пользуясь уравнениями (3.9), вычисляем матрицы условных распределений, которые записываем на мультимножествах:

$$\begin{aligned} P(X/Y) &= [(0,06x_1y_1, 0,24x_2y_1) : 0,3y_1; (0,10x_1y_2, 0,40x_2y_2) : 0,5y_2; \\ &\quad (0,04x_1y_3, 0,16x_2y_3) : 0,2y_3] = \\ &= (0,2x_1/y_1, 0,8x_2/y_1; 0,2x_1/y_2, 0,8x_2/y_2; 0,2x_1/y_3, 0,8x_2/y_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y/X) &= [(0,06x_1y_1, 0,10x_1y_2, 0,04x_1y_3) : 0,2x_1; \\ &\quad (0,24x_2y_1, 0,40x_2y_2, 0,16x_2y_3) : 0,8x_2] = \\ &= (0,3y_1/x_1, 0,5y_2/x_1, 0,2y_3/x_1; 0,3y_1/x_2, 0,5y_2/x_2, 0,2y_3/x_2) \end{aligned}$$

Можно видеть, что все условные распределения равны «своим» безусловным, и, следовательно, по (3.10)  $X$  и  $Y$  — независимые случайные переменные.

## 1.1.1 Числовые характеристики положения и рассеивания

Каждое из распределений, имеющих место в двумерной системе, характеризуется теми же общими свойствами, что и распределение одной случайной величины. Однако чаще всего используют симметричные двумерные распределения, нормальные либо близкие к нормальному. И по этой причине рассматривают преимущественно характеристики положения, рассеивания и связи между величинами. Характеристики положения и рассеивания делятся на числовые и функциональные.

В качестве числовых характеристик (мер) положения используются главным образом средние арифметические значения.

Положение совместного распределения на плоскости  $XOY$  характеризуется точкой с координатами  $(M[X], M[Y])$ , где  $M[X]$  — безусловное среднее арифметическое значение, характеризующее положение безусловного распределения случайной величины  $X$  на числовой оси  $x$ ;  $M[Y]$  — безусловное среднее арифметическое значение, характеризующее положение безусловного распределения случайной величины  $Y$  на числовой оси  $y$ . В дальнейшем для краткости будем называть  $M[X]$  безусловным средним от  $X$ , а  $M[Y]$  — безусловным средним от  $Y$ .

Положение условного распределения  $x/y_j$  на плоскости  $XOY$  характеризуется точкой с координатами  $(M[x/y_j], y_j)$ , где  $y_j$  — фиксированное значение случайной величины  $Y$ , относительно которого рассматривается условное распределение величины  $X$ ;  $M[x/y_j]$  — *условное среднее* арифметическое значение величины  $X$  при фиксированном значении  $y_j$  (сокращенно: *условное среднее «X по  $y_j$ »*). Положение условного распределения  $y/x_i$  на плоскости  $XOY$  также определяется точкой с координатами  $(x_i, M[y/x_i])$ , где  $x_i$  — фиксированное значение случайной величины  $X$ , относительно которого рассматривается условное распределение величины  $Y$ ;  $M[y/x_i]$  — *условное среднее* арифметическое значение случайной величины  $Y$  при фиксированном значении  $x_i$ . Это условное среднее « $Y$  по  $x_i$ » и определяет положение условного распределения относительно оси  $y$ . Условных средних  $M[x/y_j]$  и  $M[y/x_i]$  в двумерной системе столько же, сколько условных распределений рассматривается.

Безусловные и условные средние арифметические значения аналитически определяются по тем же «понятийным» формулам, которые были рассмотрены для отдельной случайной величины. Расчетные формулы будут даны ниже.

В качестве числовых характеристик (мер) рассеивания для каждого из рассмотренных распределений преимущественно используются дисперсии и стандартные отклонения.

Рассеивание двумерного распределения характеризуется двумя дисперсиями и соответственно двумя стандартными отклонениями.

$$D[X] \text{ и } \sigma[X] = \sqrt{D[X]},$$

$$D[Y] \text{ и } \sigma[Y] = \sqrt{D[Y]},$$

где  $D[X]$  — безусловная (общая) дисперсия случайной величины  $X$  (при всех значениях величины  $Y$ );  $\sigma[X]$  — безусловное стандартное отклонение случайной величины  $X$ ;  $D[Y]$  — безусловная (общая) дисперсия случайной величины  $Y$  (при всех значениях величины  $X$ );  $\sigma[Y]$  — безусловное стандартное отклонение  $Y$ .

Рассеивание любого условного распределения характеризуется условной дисперсией и условным стандартным отклонением. Будем обозначать:  $D[x/y_j]$  — (условную) дисперсию условного распределения  $x/y_j$ ;  $\sigma[x/y_j] = \sqrt{D[x/y_j]}$  — соответствующее стандартное отклонение;  $D[y/x_i]$  — (условную) дисперсию условного распределения  $y/x_i$ ;  $\sigma[y/x_i] = \sqrt{D[y/x_i]}$  — соответствующее стандартное отклонение.

Безусловные и условные дисперсии аналитически определяются теми же «понятийными» формулами, что и дисперсия отдельной случайной величины. Расчетные формулы рассмотрим ниже.

### 1.1.1. Простые регрессии

Функцию, связывающую какой-либо параметр условных распределений одной случайной величины со значениями другой случайной величины, будем называть (простой) *регрессией*. В двумерной системе различают регрессии « $Y$  на  $X$ » и регрессии « $X$  на  $Y$ ».

Обычно рассматривают только параметр положения — условные средние арифметические одной величины в функции от значений другой. Тогда регрессия « $Y$  на  $X$ » (или  $y/x_i$ ) — это геометрическое место условных средних  $M[y/x_i]$ , соответствующих значениям  $x_i$ , которые принимает случайная величина  $X$  на интервалах квантования  $\lambda_X$  (рис. 3.6, а). Будем обозначать эту регрессию  $u_X = \psi(x_i)$ . Другая регрессия —  $x_Y = \varphi(y_j)$  — это геометрическое место условных средних  $M[x/y_j]$ , соответствующих значениям  $y_j$ , которые случайная величина  $Y$  принимает на «своих» интервалах квантования  $\lambda_Y$  (рис. 3.6, б).

В психологических исследованиях наряду с регрессиями условных средних существенное значение могут иметь регрессии других параметров условных распределений: дисперсий, стандартных отклонений, размахов, коэффициентов асимметрии и т. д. Например, для условных стандартных отклонений это будут регрессии

$$\sigma[y/x_i] = \psi(x_i) \text{ и } \sigma[x/y_j] = \varphi(y_j)$$

Здесь в общем виде рассмотрим простую регрессию  $u = \xi(z)$ , в которой  $u$  — некоторый параметр одной из случайных величин (условное среднее, условная дисперсия, условное стандартное отклонение и т. д.),  $z$  — значения другой случайной величины в рассматриваемой системе, а  $\xi$  — функция, устанавливающая соответствие между  $z$  как независимой и  $u$  как зависимой переменными. По виду функции  $\xi$  все регрессии подразделяются на два класса: линейных и нелинейных регрессий.

Линейная регрессия в системе прямоугольных координат имеет вид прямой линии (рис. 3.6, б). Она описывается уравнением

$$u = az + b,$$

где  $b$  — свободный член, характеризующий значение  $u$  при условии  $z = 0$ ;  $a$  — (угловой) коэффициент регрессии, характеризующий скорость изменения переменной  $u$  в зависимости от изменения аргумента  $z$ . Коэффициент регрессии численно равен тангенсу угла наклона  $\alpha$  линии регрессии относительно оси аргумента:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta u}{\Delta z}, \quad (3.11)$$

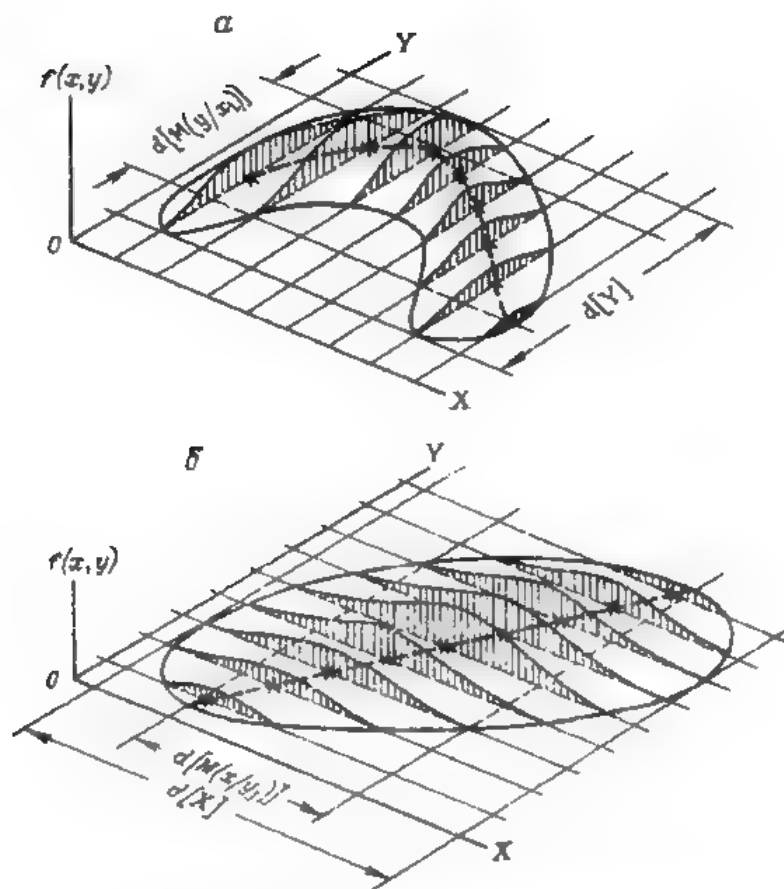


Рис. 3.6. Простые регрессии

а — нелинейная регрессия, б — линейная регрессия. Заштрихованы условные плотности вероятностей  $f(y/x_i)(a)$  и  $f(x/y_j)(b)$ . Крестиками обозначены условные средние  $M(y/x_i)(a)$  и  $M(x/y_j)(b)$ . Остальные обозначения в тексте.

где  $\Delta u = u_{i+1} - u_i$  — изменение зависимой переменной  $u$ , соответствующее  $\Delta z = z_{i+1} - z_i$  — изменению аргумента  $z$ ;  $\alpha \geq 0$  при  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  и  $\alpha < 0$  при  $\alpha > 90^\circ$ , как показано на рис. 3.7.

Нелинейные регрессии (рис. 3.6, а) могут быть любой криволинейной формы: монотонные — возрастающие или убывающие, периодические — простые и сложные.

Монотонные нелинейные регрессии во многих случаях могут быть аналитически выражены некоторой комбинацией членов по-

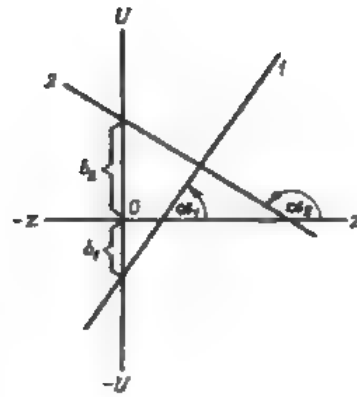


Рис. 9.7. Геометрическая интерпретация линии регрессии  $u = az + b$ .  
 $1 - a > 0, b < 0$ ;  $2 - a < 0, b > 0$ .

линома (параболы)  $h$ -й степени:

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{h-1} z^{h-1} + a_h z^h, \quad (3.12)$$

где  $h$  принимает целочисленные значения от 0 до любого заданного  $n$ ;  $a_h$  — коэффициенты полинома — любые действительные числа. Нетрудно видеть, что при  $h = 0; 1$  и всех  $a_h \geq 0$  полином 1-й степени — это прямая линия ( $u = a_0 + a_1 z$ ), которая, таким образом, является частным случаем нелинейной регрессии. При  $h = 0; 1; 2$  и всех  $a_h \geq 0$  имеем обычную параболу ( $u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ ).

Расширяя область значений показателя степени  $h$  до всех действительных, отличных от нуля, чисел и используя замену переменных, можем из полинома (3.12) получить ряд других, важных для психологических приложений функций: степенную —  $u = a_h z^h$  при  $h > 0$ ; гиперболу —  $u = a_h z^{-h} = \frac{a_h}{z^h}$  или  $u = a_0 + a_h z^{-h}$ ; показательную —  $u = a_h h^z$ , где  $h$  — константа; и, в частности, экспоненциальную —  $u = a_h e^{bz}$ , где  $h \equiv e$  — основание натуральных логарифмов, константа  $b$  — действительное число; логарифмическую —  $u = a_h \log \theta + a_0$ , где  $z \equiv \log \theta$  — логарифм (по любому основанию) нового аргумента  $\theta$  (в частном случае  $a_0 = 0$ ).

Простые периодические функции — это обычно  $\sin z$ ,  $\cos z$ , а также  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{ctg} z$ . Они находят свое применение при анализе амплитудно-частотных характеристик и при изучении моторной активности человека в разных отраслях психологии и физиологии труда и спорта.

Чаще, однако, встречаются сложные периодические функции, которые представляют собой комбинации (суммы и/или произведения) периодических и монотонных функций. В качестве примеров можно привести следующие функции.

### 1. «Затухающий синус» (по Ф. Кликсу)\*:

$$D_L = K e^{-at} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $D_L$  — зависящее от времени ( $t$ ) положение феноменального пространственного направления;  $K$  и  $a$  — константы, зависящие от условий опыта;  $\omega$  — круговая частота колебаний;  $\varphi_0$  — фазовый сдвиг, обусловленный запаздыванием реакции анализаторных систем человеческого организма.

2. «Затухающий косинус», широко используемый при корреляционном анализе случайных психических и физиологических процессов\*\*, в также процессов поведения человека-оператора при слежении\*\*\*:

$$R(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau,$$

где  $R(\tau)$  — корреляционная функция, зависящая от  $\tau$  — интервала времени, в течение которого существует связь между значениями исследуемого процесса;  $\beta$  — круговая частота,  $A$  и  $\alpha$  — масштабные параметры

3. Комбинация косинуса и параболы, характеризующая дисперсию ( $u$ ) эффективности восприятия некоторых заглавных букв человеком в зависимости от средней эффективности ( $z$ ), т. е. регрессия дисперсии на среднее арифметическое\*\*\*\*:

$$u = a(z - 1,5)(26 - z)$$

при

$$a = 0,07 + 0,038 \cos(13,85z), \quad 1,5 \leq z \leq 24.$$

### 3.2.3. Корреляция и ее свойства

Согласно условиям (3.10) случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы в стохастическом (вероятностном) смысле лишь тогда, когда все условные распределения тождественно равны безусловным. В противном случае величины  $X$  и  $Y$  считаются стохастически связанными. Таким образом, в общем случае стохастическая связь имеется тогда, когда каждому из значений одной случайной

\*Кликс Ф. Проблемы психофизики восприятия пространства. М., 1965. С. 136

\*\*Сергеев Г.А., Павлова Л.П., Романенко А.Ф. Статистические методы исследования электроэнцефалограммы человека. М., 1968.

\*\*\*Сергеев Г.А., Суходольский Г.В., Водкозаров В.М. Исследование статистических характеристик человека-оператора при нестабильных входных воздействиях // Система человек и автомат / Под ред. Д.А. Ошанина. М., 1965.

\*\*\*\*Суходольский Г.В. К проблеме надежности человека // Вопросы инженерной психологии в автоматизированных системах управления / Под ред. С.Н. Сафарова. Л., 1972.

величины соответствует специфическое (условное) распределение вероятностей значений другой величины и, наоборот, когда каждому из значений этой другой величины соответствует специфическое (условное) распределение вероятностей значений первой случайной величины.

Специфичность условных распределений по сравнению с «однородными» безусловными распределениями может состоять:

- в отличии условных средних от безусловных,
- в отличии условных дисперсий от безусловных,
- в отличии коэффициентов асимметрии (или эксцесса) условных распределений от этих коэффициентов безусловного распределения,
- в сочетании перечисленных отличий.

Частным случаем стохастической связи является *корреляция*. Корреляция состоит в том, что условные средние каждой случайной величины отличаются от «своих» безусловных средних, а по этой причине, как будет показано, и условные дисперсии отличаются от безусловных дисперсий. Из такого определения корреляции следует, что наличие корреляции не исчерпывает возможных видов стохастической связи (зависимости) между двумя случайными величинами, а отсутствие корреляции не означает еще отсутствия других проявлений зависимости. Лишь для двумерного нормального распределения стохастическая связь исчерпывается корреляцией.

Можно выделить четыре основных свойства корреляции: направленность, тесноту, форму и направление.

*Направленность*, как и в случае сопряженности, характеризует одностороннюю обусловленность изменения значений одной из случайных величин изменениями значений другой случайной величины. В общем случае возможна как односторонняя направленность:  $X$  обусловлено  $Y$ , но не наоборот, или  $Y$  обусловлено  $X$ , но не наоборот, так и двусторонняя (взаимная) направленность:  $X$  обуславливает  $Y$ , а  $Y$  обуславливает  $X$ . В частном случае двумерного нормального распределения корреляция всегда взаимна. Но при этом могут оказаться различными степени корреляции. В этой связи будем различать корреляцию  $x$  по  $y$  ( $x/y$ ) и корреляцию  $y$  по  $x$  ( $y/x$ ).

*Теснота* (сила, высота и т.п.) корреляции — это степень обусловленности изменений  $X$  значениями  $Y$  или, наоборот,  $Y$  значениями  $X$ . Поскольку эта обусловленность проявляется в отличии условных средних от «своих» безусловных средних, то теснота корреляции ( $x/y$ ) характеризуется степенью отличия условных средних  $M[x/y_i]$  от  $M[X]$ , а теснота корреляции ( $y/x$ ) характеризуется степенью отличия условных средних  $M[y/x_i]$  от  $M[Y]$ .

*Форма* корреляции определяется линейностью или нелинейностью регрессий  $M[y/x] = \psi(x)$  и  $M[x/y] = \varphi(y)$ . Соответственно принято различать линейную и нелинейную корреляции. Линейной корреляция является тогда, когда обе регрессии линейны. Если хотя бы одна из регрессий нелинейна, то и корреляция является нелинейной. Иногда нелинейностями регрессий можно пренебречь. Тогда их приближенно заменяют прямыми линиями и корреляцию считают квазилинейной. Следует подчеркнуть, что в психологической практике чаще встречаются нелинейная и квазилинейная корреляции.

*Направление* корреляции выражается направлением регрессии. Если регрессия есть возрастающая функция своего аргумента ( $a > 0$ ), то направление считают положительным (см. рис. 3.8, б, з, е). Если регрессия есть убывающая функция своего аргумента ( $a < 0$ ), то направление считают отрицательным (см. рис. 3.8, в, д, жс).

### 3.3.4. Меры корреляции



Универсальной мерой тесноты связи является коэффициент детерминации, который представляет собой отношение дисперсии условных средних к безусловной дисперсии.

На рис. 3.6 можно видеть, что общий размах безусловного распределения каждой случайной величины есть сумма

$$d[Y] = d[M(y/x_i)] + d_0[y/x_i]$$

и

$$d[X] = d[M(x/y_j)] + d_0[x/y_j],$$

где  $d[M(y/x_i)]$  — размах, характеризующий рассеивание условных средних  $M(y/x_i)$ ;  $d[M(x/y_j)]$  — размах, характеризующий рассеивание условных средних  $M(x/y_j)$ ;  $d_0[y/x_i]$  — часть общего размаха случайной величины  $Y$ , определяемая рассеиванием условных распределений  $y/x_i$ ;  $d_0[x/y_j]$  — часть общего размаха случайной величины  $X$ , определяемая рассеиванием условных распределений  $x/y_j$ .

Если вместо размаха воспользоваться более точной мерой рассеивания — дисперсией, то можно записать аналогичные равенства и для дисперсий.

$$\begin{aligned} D[Y] &= D[M(y/x_i)] + D_0[y/x_i] \\ \text{и} \quad D[X] &= D[M(x/y_j)] + D_0[x/y_j], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $D[Y]$  и  $D[X]$  — безусловные дисперсии;  $D[M(y/x_i)]$  и  $D[M(x/y_j)]$  — дисперсии условных средних относительно «своих» безусловных средних;  $D_0[y/x_i]$  и  $D_0[x/y_j]$  — средние из условных

дисперсий\*. Все эти дисперсии вычисляются различными способами, которые рассматриваются ниже. Здесь ограничимся «понятными» формулами для дисперсий условных средних:

$$D[M(y/x_i)] = \sum_{i=1}^n \{M(y/x_i) - M[Y]\}^2 P_i,$$

$$D[M(x/y_j)] = \sum_{j=1}^n \{M(x/y_j) - M[X]\}^2 P_j,$$

и для средних из условных дисперсий:

$$D_o[y/x_i] = \sum_{i=1}^n D[y/x_i] P_i,$$

$$D_o[x/y_j] = \sum_{j=1}^n D[x/y_j] P_j,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  — номера условных распределений  $y/x_i$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  — номера условных распределений  $x/y_j$ ;  $P_i$  и  $P_j$  — безусловные вероятности для  $X$  и  $Y$ .

Из уравнений (3.13) после простых преобразований следуют формулы, определяющие в общем виде коэффициент детерминации величины  $Y$  величиной  $X$ :

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{D[M(y/x_i)]}{D[Y]} = 1 - \frac{D_o[y/x_i]}{D[Y]} \quad (3.14a)$$

и коэффициент детерминации величины  $X$  величиной  $Y$ :

$$\eta_{x/y}^2 = \frac{D[M(x/y_j)]}{D[X]} = 1 - \frac{D_o[x/y_j]}{D[X]}. \quad (3.14b)$$

Таким образом, коэффициенты детерминации показывают относительную долю отличия условных средних от безусловных, причем мерой отличия являются дисперсии условных средних.

Анализируя уравнения (3.14), можно видеть, что

$$0 \leq \eta_{y/x}^2 \leq 1, \quad 0 \leq \eta_{x/y}^2 \leq 1.$$

Следовательно, максимально тесная корреляция имеет место тогда, когда вся безусловная дисперсия исчерпывается дисперсией условных средних. Например,

$$D[M(y/x_i)] = D[Y],$$

\*При этом предполагается, что условные дисперсии  $D[y/x_i]$  не зависят от  $X$ , а условные дисперсии  $D[x/y_j]$  не зависят от  $Y$ .

как показано для линейного случая на рис. 3.8, е и ж. Здесь мы имеем дело с частным случаем стохастической связи — с функциональной зависимостью. Заметим, что при функциональной зависимости обе регрессии сливаются в одну и оба коэффициента детерминации оказываются равными единице.

Наоборот, корреляция отсутствует, если вся безусловная дисперсия исчерпывается средним из условных дисперсий. Например,

$$D_0[y/x_i] = D[Y],$$

как показано на рис. 3.8, а. Поскольку по смыслу отношения

$$\frac{D_0[y/x_i]}{D[Y]} \quad \text{и} \quad \frac{D_0[x/y_j]}{D[X]}$$

противоположны коэффициентам детерминации, их иногда используют как меры необусловленности изменений средних одной случайной величины изменениями другой и называют *коэффициентами акорреляции* (индетерминации). Коэффициент акорреляции, таким образом, показывает долю изменчивости, обусловленную посторонними факторами, которые находятся за пределами рассматриваемой двумерной системы  $X$  и  $Y$ .

Наряду с коэффициентами детерминации для измерения тесноты однонаправленной связи применяются *корреляционные отношения*

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\eta_{y/x}^2}, \quad \eta_{x/y} = \sqrt{\eta_{x/y}^2}. \quad (3.15)$$

Распространенными мерами тесноты и направления линейной взаимной связи являются ковариация и коэффициент корреляции.

*Ковариация* (COV) — это среднее произведение центральных отклонений:

$$\text{COV} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_i - M[X]) (y_j - M[Y]) P_{ij}, \quad (3.16)$$

где  $P_{ij}$  — вероятности (частоты) совместного появления пар значений  $x, y$ .

Важно понять и запомнить основные свойства ковариации как меры тесноты и направления корреляции.

1. Ковариация случайной величины с самой собой есть дисперсия:

$$\text{COV}[XX] = D[X], \quad \text{COV}[YY] = D[Y].$$

2. Ковариация максимальна по абсолютной величине и равна дисперсии  $D[X] = D[Y]$  при функциональной зависимости, когда прямая  $y = ax + b$  располагается к оси абсцисс под углом  $45^\circ$  или  $135^\circ$  (рис. 3.8, е и ж).

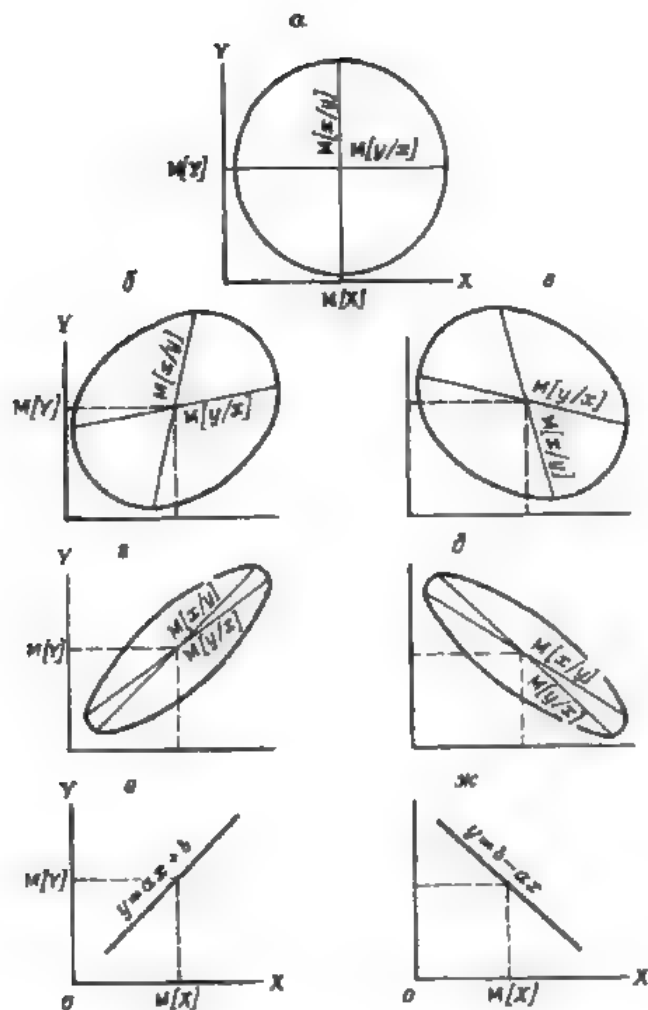


Рис. 3.6. Свойства линейной корреляции.  
 а — корреляция отсутствует. Слабая корреляция: б — положительная, в — отрицательная. Сильная корреляция: д — положительная, е — отрицательная. Полная корреляция (функциональная зависимость): ф — положительная, ж — отрицательная.  $M[Y]$  и  $M[X]$  — безусловные средние;  $M[y/x]$  и  $M[x/y]$  — регрессии условных средних.

3. Ковариация по абсолютной величине равна нулю при горизонтальном расположении линии регрессии  $y/x_i$  и вертикальном расположении линии регрессии  $x/y_i$  (рис. 3.8, а), а также стремится к нулю при нелинейной регрессии параболического вида (как на рис. 3.6, а). Таким образом, модуль ковариации заключен в пределах

$$0 \leq |\text{COV}| \leq D[X] = D[Y].$$

4. Ковариация положительна при положительной и отрицательна при отрицательной корреляции. Знак ковариации определяется тем, что при положительной связи все центральные отклонения в формуле (3.16) положительны (рис. 3.8, б, з, е), а при отрицательной связи положительное центральное отклонение одной величины всегда умножается на отрицательное центральное отклонение другой величины (рис. 3.8, в, д, ж).

Коэффициент (линейной) корреляции ( $r$ ) можно определить несколькими способами

Во-первых, при строго линейной корреляции теоретически связь полностью взаимна, в результате

$$\eta_{y/x}^2 = \eta_{x/y}^2 = r^2, \quad (3.17)$$

откуда получается, что

$$r = \eta_{y/x} = \eta_{x/y}. \quad (3.18)$$

Практически, однако, всегда имеются отличия эмпирических регрессий от линейных и равенства (3.17) и (3.18) не выполняются. Но коэффициент корреляции всегда меньше хотя бы одного из корреляционных отношений.

Во-вторых, можно определить коэффициент корреляции как ковариацию, нормированную произведением стандартных отклонений.

$$r = \frac{\text{COV}}{\sigma[X]\sigma[Y]}. \quad (3.19)$$

При этом, учитывая свойства ковариации, запомним:

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ и } 0 \leq |r| \leq 1,$$

т. е. знак коэффициента корреляции характеризует направление связи, а модуль  $|r|$  — ее тесноту.

В-третьих, можно определить коэффициент корреляции как среднее геометрическое из коэффициентов регрессии

$$r = \sqrt{a_{y/x} a_{x/y}}, \quad (3.20)$$

где  $a_{y/x}$  — угловой коэффициент прямой регрессии  $y/x$  и  $a_{x/y}$  — угловой коэффициент прямой регрессии  $x/y$ .

Из уравнений (3.19) и (3.20) нетрудно определить

$$a_{y/x} = r \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} = \frac{\text{COV}}{D[X]} \quad (3.21a)$$

и

$$a_{x/y} = r \frac{\sigma[X]}{\sigma[Y]} = \frac{\text{COV}}{D[Y]}. \quad (3.21b)$$

В-четвертых, из равенств (3.19)–(3.21) следует, что коэффициент корреляции — это *стандартизованный коэффициент регрессии*:

$$r = a_{y/x} \frac{\sigma[X]}{\sigma[Y]} = a_{x/y} \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}. \quad (3.22)$$

На практике для вычисления  $r$  используются преимущественно последние три способа, а первый служит для проверки степени отличия регрессий от линейных, а также для оценки доли взаимовлияния переменных по сравнению с долями их одностороннего влияния. В этой связи заметим, что взаимная линейная корреляция двух случайных величин может быть на самом деле обусловлена влиянием на эти величины некоторой другой неизвестной величины (или нескольких величин, см. главу 7).

### § 1 § Совокупные характеристики положения рассеивания и связи

Отдельные меры положения, рассеивания и связи для двумерной случайной величины  $XY$  можно представить в матричном виде. При этом в целом положение системы  $XY$  на плоскости характеризуется *вектором безусловных средних*:

$$M_{XY} = (M_X, M_Y),$$

где  $M_X, M_Y$  — координаты центра рассеивания значений  $x, y$ , в области совмещения  $XY$  на плоскости. Аналогично этому совокупности условных средних удобно записывать в виде *векторов условных средних*:

$$M_{X/Y} = (M_{X/y_1}, M_{X/y_2}, \dots, M_{X/y_m}),$$

$$M_{Y/X} = (M_{Y/x_1}, M_{Y/x_2}, \dots, M_{Y/x_k}),$$

которые перечисляют координаты простых регрессий « $X$  по  $Y$ » и « $Y$  по  $X$ », характеризующих изменение « $X$  в среднем» при изменениях  $Y$  и соответственно изменения « $Y$  в среднем» при изменениях  $X$ . Заметим при этом, что *безусловные средние суть математические ожидания условных средних*:

$$M_x = M[M_{X/Y}] = P_{y_1} M_{X/y_1} + P_{y_2} M_{X/y_2} + \dots + P_{y_m} M_{X/y_m},$$

$$M_y = M[M_{Y/X}] = P_{x_1} M_{Y/x_1} + P_{x_2} M_{Y/x_2} + \dots + P_{x_k} M_{Y/x_k}.$$

чем следует пользоваться для проверки вычислений.

Рассеивание и связь (связность) в системе  $XU$  количественно характеризует *ковариационная матрица*.

$$K_{XU} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} D_X & \text{COV}_{XY} \\ \text{COV}_{YX} & D_Y \end{pmatrix} \end{matrix},$$

в которой на главной диагонали записаны безусловные дисперсии, а внедиагональные элементы — ковариации; причем из-за перестановочности умножения  $\text{COV}_{YX} = \text{COV}_{XY}$ , что подчеркнуто в матрице одинаковым порядком индексов ковариаций.

Безусловные дисперсии в ковариационной матрице при небольшом числе значащих цифр в данных можно вычислять по множествам безусловных распределений:

$$D_X = \sum_X \mathcal{P}(X^2) - M_X^2, \quad D_Y = \sum_Y \mathcal{P}(Y^2) - M_Y^2,$$

а ковариации — по мультимножеству (или матрице) совмещенного распределения:

$$\text{COV}_{XY} = \sum_X \sum_Y \mathcal{P}(XY) - M_X M_Y.$$

Вектор безусловных средних и ковариационная матрица определяют основные параметры системы  $XU$  в *натуральном масштабе*, т. е. в единицах производственных измерений. Но при нормализации распределений в психодиагностических или других целях необходимо избавиться от качественной специфики измерявшихся величин. Это достигается (линейным) преобразованием из *натурального* в *стандартный* (безразмерный) масштаб.

$$\begin{aligned} (X - M_X) : \sigma_X &= \{(x - M_X) : \sigma_X\}, \\ (Y - M_Y) : \sigma_Y &= \{(y - M_Y) : \sigma_Y\}, \end{aligned}$$

где слева записаны матричные, а справа — скалярные формы представления случайных величин  $X$  и  $Y$ .

В стандартном масштабе вектор безусловных средних становится нулевым, так как величины *центрируются* — начало отсчета переносится в центр рассеивания. Дисперсии в этом масштабе становятся равными единицам, а ковариация преобразуется в коэффициент линейной корреляции по формуле (3.19). Таким образом ковариационная матрица преобразуется в корреляционную матрицу:

$$R_{XU} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,0 & r_{XY} \\ r_{XY} & 1,0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

которая в стандартном масштабе оказывается единственной характеристикой двумерной случайной величины  $XU$ , правда, характеристикой линейной, так как обе регрессии независимо от их реальной формы изображаются прямыми линиями, пересекающимися в точке центра рассеивания под углом, пропорциональным коэффициенту корреляции как стандартизованному угловому коэффициенту регрессии — формула (3.22). Заметим, что корреляционную матрицу в практических расчетах легко получить из ковариационной матрицы, которая нормируется соответствующими произведениями стандартных отклонений:

$$R = K: \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \sigma_Y \\ \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} & X & Y \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 = D_X: \sigma_X^2 & r_{XY} = \text{COV}_{XY}: \sigma_X \sigma_Y \\ r_{XY} = \text{COV}_{XY}: \sigma_X \sigma_Y & 1 = D_Y: \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

При существенно нелинейных регрессиях (см., напр., рис. 3.6, а) коэффициенты равны (или приближены) нулю, а связь между тем может быть значительной. Тогда корреляционная матрица должна быть заменена *псевдокорреляционной матрицей*, в которой записаны корреляционные отношения (3.15)

$$R_{\text{пс}} = \begin{matrix} & X & Y \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} D_X & \eta_{X/Y} \\ \eta_{Y/X} & D_Y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

и которая уже не симметрична, так как, согласно формулам (3.14) и (3.15), корреляционные отношения не только не перестановочны, но одно может близиться к единице, а другое — к нулю.

Корреляционные отношения тоже можно определять на мультимножествах по распределениям. Сначала по условным распределениям рассчитываются векторы условных средних, приведенные выше, и векторы *условных дисперсий*:

$$\mathcal{Z}_{X/Y} = (D_{X/y_1}, D_{X/y_2}, \dots, D_{X/y_m}),$$

$$\mathcal{Z}_{Y/X} = (D_{Y/x_1}, D_{Y/x_2}, \dots, D_{Y/x_k}).$$

Затем по векторам безусловных средних рассчитываются *дисперсии условных средних*:

$$\begin{aligned} D[M_{Y/X}] &= M[\mathcal{M}_{Y/X}^2] - M_Y^2 = \\ &= P_{y_1} M_{Y/y_1}^2 + P_{y_2} M_{Y/y_2}^2 + \dots + P_{y_m} M_{Y/y_m}^2 - M_Y^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[M_{X/Y}] &= M[\mathcal{M}_{X/Y}^2] - M_X^2 = \\ &= P_{x_1} M_{X/x_1}^2 + P_{x_2} M_{X/x_2}^2 + \dots + P_{x_k} M_{X/x_k}^2 - M_X^2 \end{aligned}$$

и *средние из условных дисперсий*:

$$D_0[Y/x_i] = M[\mathcal{Z}_{Y/X}] = P_{y_1} D_{Y/y_1} + P_{y_2} D_{Y/y_2} + \dots + P_{y_m} D_{Y/y_m},$$

$$D_0[X/y_j] = M[\mathcal{Z}_{X/Y}] = P_{x_1} D_{X/x_1} + P_{x_2} D_{X/x_2} + \dots + P_{x_k} D_{X/x_k}.$$

После этого проверяется выполнение равенств (3.13), и по уравнениям (3.14) вычисляются коэффициенты детерминации, а по уравнениям (3.15) — корреляционные отношения.

## 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 1.1.1. Аппроксимация простой регрессии



Одной из важнейших задач при обработке данных психологического эксперимента является аппроксимация регрессий. Аппроксимация регрессии означает приближенное аналитическое (формульное) выражение регрессии по ряду пар значений  $u_i$  и  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), полученных в эксперименте. Благодаря аналитическому выражению, во-первых, становится возможной интерполяция, т. е. определение значений исследуемой величины, не изучавшихся экспериментально, а во-вторых, и это главное, научные законы приобретают законченную математическую формулировку.

Можно выделить три этапа аппроксимации простой регрессии: выбор функции  $\xi$ , вычисление неизвестных коэффициентов, проверка удовлетворительности аппроксимации опытных данных функцией  $\xi$ .

1. Выбор аппроксимирующей функции во многом определяется знаниями и навыками исследователя и представляет собой своего рода искусство. Могут быть два гипотетических основания для выбора функции  $\xi$  определенного вида. Первое — это априорные сведения о законе, которому подчиняется изучаемая величина (или аналогичные величины). Например, латентный период времени реакции для большинства разновидностей реакций подчиняется закону Пьерона (закону силы), что аналитически выражается гиперболой\*, интенсивность ощущений по закону Вебера — Фехнера (логарифмическая функция), либо по закону Стивенса (степенная функция)\*\*.

\*Ломов Б. Ф. Человек и техника. М., 1966. С. 43; Войко Е. И. Время реакции человека. М., 1964; Шошоль Р. Время реакции // Экспериментальная психология / Под ред. П. Фрессы и Ж. Пиаже. М., 1966.

\*\*Пьерон А. Психофизика. Там же.

(выравненной) от руки кривой на графике, где в координатах  $ZOU$  представлены эмпирические значения  $u_i$  (см. рис. 3.7).

Гипотезу о том, что выбранная функция пригодна для аппроксимации, целесообразно попытаться проверить, прежде чем переходить к вычислению неизвестных коэффициентов. Простейший способ проверки — приведение функции к линейному виду. Если регрессия в действительности линейна, то экспериментальные точки на графике располагаются примерно по прямой линии (см. рис. 3.12). Если регрессия удовлетворяет логарифмическому закону, то в полулогарифмических координатах  $(\log z)OU$  экспериментальные точки снова образуют прямую (с заменой переменной):

$$u = a\theta + b,$$

где  $\theta = \log z$ .

При логарифмировании значений  $z_i$  и  $u_i$  и обозначении их на графике в координатах  $(\log z)O(\log u)$  преобразуются в прямую линию, рассмотренную выше

— степенная функция

$$\log u = \log a_h + h \log z,$$

откуда, обозначая  $\log u = t$ ,  $\log a_h = c$  и  $\log z = \theta$ , получаем

$$t = c + h\theta,$$

— гипербола

$$\log u = \log a_h - h \log z$$

(см. рис. 3.9);

— показательная функция

$$\log u = \log a_h + z \log h;$$

— экспоненциальная функция

$$\log u = \log a_h + z \log e.$$

Аналогичным путем проверяется пригодность и более сложных функций\*. Но для парабол  $h$ -й степени, включающих в себя не менее двух слагаемых при  $h \geq 2$ , этот путь не подходит.

Чтобы определить степень  $h$  полинома (3.12), необходимую и достаточную для аппроксимации эмпирических данных, последовательно вычисляют для равноотстоящих значений независимой переменной ( $Z$ ) конечные разности:  $\Delta u_{i+1}$  — первой степени,  $\Delta^2 u_{i+2}$  — второй и так далее до  $\Delta^h u_{i+h}$  —  $h$ -й степени, как в общем виде показано в табл. 3.3. Как только  $\Delta^h u_{i+h}$  для некоторого  $h$

\*Семенов К. А. Эмпирические формулы. М.: Л., 1933.

Конечные разности  $h$ -й степени

$\Delta x_{i+1} = \text{const}$	$u_i$	$\Delta u_{i+1}$	$\Delta^2 u_{i+2}$	$\dots$	$\Delta^h u_{i+h}$
$x_1$	$u_1$	—	—	...	—
$x_2$	$u_2$	$\Delta u_2 = u_2 - u_1$	—	...	—
$x_3$	$u_3$	$\Delta u_3 = u_3 - u_2$	$\Delta^2 u_3 = \Delta u_3 - \Delta u_2$	...	—
$x_4$	$u_4$	$\Delta u_4 = u_4 - u_3$	$\Delta^2 u_4 = \Delta u_4 - \Delta u_3$	...	$\Delta^h u_{i+h} = \Delta^{h-1} u_{i+h} - \Delta^{h-1} u_{i+h-1}$
$\vdots$	$\vdots$				$\dots$
$x_{i-2}$	$u_{i-2}$	...	...	...	...
$x_{i-1}$	$u_{i-1}$	$\Delta u_{i-1} = u_{i-1} - u_{i-2}$	...	..	...
$x_i$	$u_i$	$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$	$\Delta^2 u_i = \Delta u_i - \Delta u_{i-1}$	...	...
$x_{i+1}$	$u_{i+1}$	$\Delta u_{i+1} = u_{i+1} - u_i$	$\Delta^2 u_{i+1} = \Delta u_{i+1} - \Delta u_i$	.	$\Delta^h u_{i+1} = \Delta^{h-1} u_{i+1} - \Delta^{h-1} u_i$
$\vdots$	$\vdots$		$\dots$	...	...
$x_{n-3}$	$u_{n-3}$	...	...	...	...
$x_{n-2}$	$u_{n-2}$	$\Delta u_{n-2} = u_{n-2} - u_{n-3}$	...	..	...
$x_{n-1}$	$u_{n-1}$	$\Delta u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}$	$\Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2}$	.	...
$x_n$	$u_n$	$\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$	$\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$	...	$\Delta^h u_n = \Delta^{h-1} u_n - \Delta^{h-1} u_{n-1}$

при всех  $i$  становятся одинаковы\*, эту степень и принимают для аппроксимации полиномом.

2. Вычисление неизвестных коэффициентов регрессии можно осуществить несколькими способами. В частном случае линейной (либо приведенной к линейному виду) регрессии можно провести «на глаз» прямую линию через экспериментальные точки на графике так, чтобы расстояния до всех точек были по возможности малыми. Затем непосредственно с графика (см. рис. 3.7) определяют свободный член и значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , причем пара координат  $x_i, y_i$  выбирается произвольно. Далее по формуле (3.11) вычисляют угловой коэффициент  $a$ . Этот способ можно назвать графо-аналитическим. При некотором навыке он обеспечивает хорошую точность аппроксимации.

В общем случае используют способ (метод) наименьших квадратов, который основывается на том, что сумма квадратов отклонений от среднего арифметического значения меньше, чем от другой величины, сколь угодно мало отличающейся от среднего арифметического:

$$\sum_{i=1}^n (u_i - u_i^*)^2 = \min,$$

где  $u_i$  —  $i$ -е условное среднее, полученное эмпирически;  $u_i^*$  — теоретическое значение условного среднего;  $i = 1, 2, \dots, n$  — количество условных средних, полученных в эксперименте\*\*

Чтобы вычислить  $h+1$  неизвестных коэффициентов регрессии  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, h$ , включая свободный член), необходимо составить систему из  $h+1$  нормальных уравнений. Для этого существует mnemonic способ, который заключается в  $h+1$ -кратном повторении следующей процедуры.

Пусть в общем случае для аппроксимации выбран полином

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{h-1} z^{h-1} + a_h z^h.$$

Каждый  $i$ -й цикл ( $i = 0, 1, 2, \dots, h$ ) процедуры состоит из двух шагов.

**Первый шаг.** Исходное уравнение умножить на  $i$ -ю степень аргумента:

$$u z^i = a_0 z^i + a_1 z z^i + a_2 z^2 z^i + \dots + a_{h-1} z^{h-1} z^i + a_h z^h z^i.$$

\* На практике  $\Delta u_{i,h}$  не бывают одинаковыми. Будучи нанесены на график, они флуктуируют вокруг горизонтальной прямой тогда, когда  $h$  достаточна для аппроксимации, но если, флуктуируя, они возрастают или убывают, значит,  $h$  еще не достаточна для аппроксимации.

\*\* При малом количестве наблюдений условные средние нельзя вычислять. Тогда  $u_i$  — это сами наблюдаемые значения переменной  $U$ , а  $n$  — количество всех наблюдений.

В результате преобразований получаем

$$uz^i = a_0 z^i + a_1 z^{i+1} + a_2 z^{i+2} + \dots + a_{h-1} z^{i+h-1} + a_h z^{i+h}. \quad (3.23)$$

**Второй шаг.** Результат первого шага (3.23) почленно подвести под знаки сумм (так как такие уравнения можно записать для каждого из  $n$  условных средних  $u_i$ ), вынося неизвестные коэффициенты за знаки сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n uz^i = a_0 \sum_{i=1}^n z^i + a_1 \sum_{i=1}^n z^{i+1} + a_2 \sum_{i=1}^n z^{i+2} + \dots + \\ + a_{h-1} \sum_{i=1}^n z^{i+h-1} + a_h \sum_{i=1}^n z^{i+h} \end{aligned}$$

Например, при  $h = 2$  и  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  имеем обычную параболу, уравнение которой

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2.$$

В результате трехкратного применения изложенной процедуры получаем систему из трех нормальных уравнений (так как при  $i = 0$   $z^i = 1$ , то  $\sum_{i=1}^n z^i = n$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n z + a_2 \sum_{i=1}^n z^2, \\ \sum_{i=1}^n uz = a_0 \sum_{i=1}^n z + a_1 \sum_{i=1}^n z^2 + a_2 \sum_{i=1}^n z^3, \\ \sum_{i=1}^n uz^2 = a_0 \sum_{i=1}^n z^2 + a_1 \sum_{i=1}^n z^3 + a_2 \sum_{i=1}^n z^4 \end{aligned}$$

3 Проверка удовлетворительности аппроксимации опытных данных выбранным уравнением осуществляется путем вычисления коэффициента линейной корреляции между рядами эмпирических ( $u_i$ ) и теоретических ( $u_i^*$ ) значений регрессии.

$$r(u, u^*) = \frac{\sum_{i=1}^n u_i u_i^* - n M[u_i] M[u_i^*]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \{M[u_i]\}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^*)^2 - n \{M[u_i^*]\}^2}}. \quad (3.24)$$

Если величина коэффициента корреляции оказывается недостаточной, то следует выбрать другое аппроксимирующее уравнение.

**Пример 3.1.** В экспериментах по изучению слежения с преследованием, выполняемого человеком, измерялось латентное время реакции в зависимости от скорости движения цели\*. Результаты приведены в первых двух столбцах табл. 3.4.

\*Цель начинала движение мгновенно и двигалась равномерно с некоторой скоростью (Суходольский Г.В. О характеристиках человека при слежении: Автореф. канд. дис. Л., 1968).

Таблица 3.4

Данные для расчета регрессии к примеру 3.1

$z_i$	$u_i$	$\lg z_i$	$\lg u_i$	$(\lg z_i)^2$	$\lg z_i \lg u_i$	$u_i^*$
0,1	1,05	-1,00	0,02	1,000	-0,020	1,27
0,2	1,08	-0,70	0,03	0,490	-0,021	0,89
0,4	0,57	-0,40	-0,24	0,160	0,096	0,63
0,6	0,56	-0,22	-0,25	0,048	0,055	0,52
0,8	0,52	-0,10	-0,28	0,010	0,028	0,45
2	0,22	0,30	-0,66	0,090	-0,198	0,28
4	0,24	0,60	-0,62	0,360	-0,372	0,20
6	0,26	0,78	-0,58	0,608	-0,452	0,16
8	0,15	0,90	-0,83	0,810	-0,747	0,14
10	0,16	1,00	-0,80	1,000	-0,800	0,13
15	0,08	1,18	-1,10	1,392	-1,298	0,10
20	0,10	1,30	-1,00	1,690	-1,300	0,09
25	0,07	1,40	-1,16	1,960	-1,624	0,08
30	0,03	1,48	-1,52	2,190	-2,250	0,073
35	0,08	1,54	-1,10	2,372	-1,694	0,068
40	0,08	1,60	-1,10	2,560	-1,760	0,063
45	0,05	1,65	-1,30	2,722	-2,145	0,060
50	0,12	1,70	-0,92	2,890	-1,564	0,056
100	0,06	2,00	-1,22	4,000	-2,440	0,040
200	0,03	2,30	-1,52	5,290	-3,496	0,020
$\sum_{i=1}^{20}$	5,51	17,31	-16,15	31,64	-22,00	5,32

Примечание:  $u_i$  — эмпирические,  $u_i^*$  — теоретические средние арифметические значения латентного времени реакции, с;  $z_i$  — скорости движения цели, мм/с.

Предположив, что величина скорости движения цели действует на реакцию испытуемого аналогично тому, как действуют величины стимулов других модальностей, можно думать, что искомая зависимость аналогична закону Пьерона. Следовательно, аппроксимирующая функция должна быть гиперболой. Такое предположение верно, если логарифмы латентного времени реакции в зависимости от логарифмов скорости образуют на графике ряд точек, флуктуирующих около прямой линии. Действительно, на рис. 3.9 точки с координатами  $(\lg z_i, \lg u_i)$  — см. табл. 3.4 — группируются около прямой линии. Таким образом, исходной аппроксимирующей функцией может быть гипербола.

Остается разобраться еще в одном вопросе. В формуле закона Пьерона

$$\tau = \frac{a}{f^n} + \tau_0$$

имеется свободный член ( $\tau_0$ ), который выражает «несократимый» компонент латентного времени реакции. Это означает, что даже

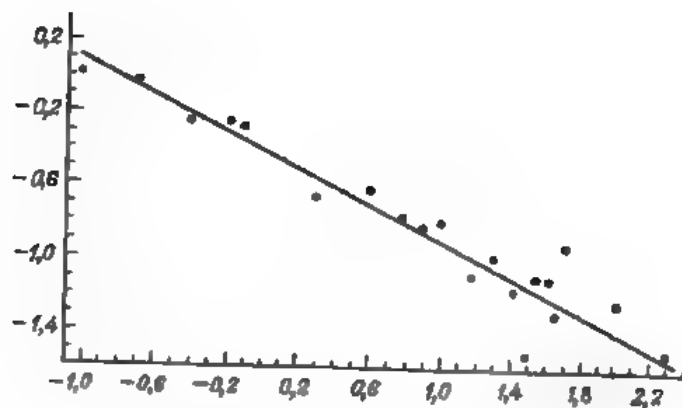


Рис. 3.2. Зависимость латентного времени реакции  $u$ , с, от скорости движения цели  $z$ , мм/с. По оси абсцисс —  $\lg z$ , по оси ординат —  $\lg u$ . Точками обозначены экспериментальные данные

при «бесконечно большой» интенсивности ( $I$ ) стимула  $\tau = \tau_0 > 0$ . При классической методике измерения латентного времени реакции, когда отсутствует возможность антиципации момента появления стимула, это в действительности так. Но в условиях периодичности предъявления стимула имеется возможность обучиться антиципации момента появления стимула, в результате  $\tau_0$  может быть нулевым и даже отрицательным\*. В нашем случае эта ситуация как раз и имела место. В частности, при бесконечно большой скорости движения цели\*\* латентное время реакции в среднем составляло 0,03 с. Таким образом, для наших экспериментальных условий аппроксимирующая гипербола должна быть без свободного члена.

$$u = \frac{a}{z^h},$$

где  $u$  — среднее арифметическое значение латентного времени реакции, с;  $z$  — скорость движения, мм/с;  $h$  и  $a$  — неизвестные коэффициенты, которые и следует вычислить по данным эксперимента.

Для вычисления коэффициентов используем метод наименьших квадратов. Логарифмируя исходную гиперболу, получаем уравнение прямой

$$\lg u = \lg a - h \lg z.$$

\*Бойко Е. И. Время реакции человека. М., 1964. С. 17.

\*\*Это достигалось экспериментально одновременным исчезновением цели в одном месте и ее появлением в другом.

В соответствии с рассмотренной процедурой составляем систему из двух (по числу неизвестных коэффициентов) нормальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{20} \lg u_i = 20 \lg a - h \sum_{i=1}^{20} \lg z_i,$$

$$\sum_{i=1}^{20} (\lg u_i \lg z_i) = \lg a \sum_{i=1}^{20} \lg z_i - h \sum_{i=1}^{20} (\lg z_i)^2.$$

Необходимые значения  $\lg z_i$ ,  $\lg u_i$ ,  $\lg u_i \lg z_i$ ,  $(\lg z_i)^2$ , а также всех сумм, входящих в нормальные уравнения, представлены в табл. 3.4.

Записав систему уравнений в явном виде, решим ее способом исключения переменной (умножим первое уравнение на 17,31, второе — на -20 и сложим почленно):

$$\begin{array}{rcl} -16,15 = 20 \lg a & -17,31h & | \quad 17,31 \\ -22,00 = 17,31 \lg a - 31,64h & & | \quad -20 \\ \hline -279,5565 = 346,2 \lg a - 299,6361h \\ + \quad 440,0000 = -346,2 \lg a + 632,8000h \\ \hline 160,4435 = & +333,1639h & \end{array}$$

$$h \approx \frac{160,4435}{333,16} \approx 0,481,$$

$$20 \lg a = 17,31 \cdot 0,481 - 16,15 \approx -7,82,$$

$$\lg a = \frac{-7,82}{20} \approx -0,391.$$

Учитывая значительное рассеивание экспериментальных точек и по соображениям удобства, округлим:  $h \approx 0,5$  и  $\lg a \approx -0,4$ . Тогда искомое уравнение регрессии в логарифмической форме имеет вид (рис. 3.9):

$$\lg u^* = -0,4 - 0,5 \lg z.$$

Потенцируя, окончательно получаем

$$u^* = \frac{0,4}{\sqrt{z}} \quad \text{при} \quad 0,1 \leq z \leq 200 \text{ (мм/с)}.$$

Для проверки удовлетворительности аппроксимации вычислим по формуле (3.24) коэффициент корреляции  $r(u, u^*)$  (промежуточные величины представлены в табл. 3.4 и 3.5):

$$\begin{aligned} r(u, u^*) &= \frac{3,4199 - 20 \cdot \frac{5,51}{20} \cdot \frac{5,32}{20}}{\sqrt{3,4559 - 20 \cdot \frac{5,51^2}{20^2}} \cdot \sqrt{3,5025 - 20 \cdot \frac{5,32^2}{20^2}}} \approx \\ &\approx \frac{1,9542}{\sqrt{1,9379 \cdot 2,0875}} \approx 0,97. \end{aligned}$$



Таблица 3.5

Промежуточные величины для расчета коэффициента корреляции к примеру 3.1

$i$	$u_i^2$	$(u_i^*)^2$	$u_i u_i^*$
1	1,1025	1,6129	1,3335
2	1,1664	0,7921	0,9612
3	0,3249	0,3969	0,3591
4	0,3136	0,2704	0,2912
5	0,2704	0,2025	0,2340
6	0,0484	0,0784	0,0616
7	0,0576	0,0400	0,0480
8	0,0676	0,0256	0,0416
9	0,0225	0,0196	0,0210
10	0,0256	0,0169	0,0208
11	0,0064	0,0100	0,0080
12	0,0100	0,0081	0,0090
13	0,0049	0,0064	0,0056
14	0,0009	0,0054	0,0022
15	0,0064	0,0046	0,0054
16	0,0064	0,0040	0,0050
17	0,0025	0,0036	0,0030
18	0,0144	0,0031	0,0067
19	0,0036	0,0016	0,0024
20	0,0009	0,0004	0,0006
$\sum_{i=1}^{20}$	3,4559	3,5028	3,4199

Итак, уравнение  $u^* = 0,4 \cdot z^{-0,5}$  можно рассматривать в качестве реализации закона Пьерона для нашей экспериментальной ситуации.

**Пример 3.2.** При изучении эффективности вычислений, осуществляемых человеком вручную, было установлено, что затраты времени на вычисления определяются не спецификой арифметических действий, а количеством элементарных операций (суммирование, вычитание, умножение и деление в пределах одного десятичного разряда, а также переход из разряда в разряд)\*. В экспериментах с опытным вычислителем, который суммировал на счетах столбцы специально подобранных чисел, были получены оценки среднего времени суммирования, соответствующие переменному количеству элементарных операций ( $z_i$ ) сложения и перехода из «младших» десятичных разрядов в «старшие». Результа-

\*Кандарацкова Н.М., Суходольский Г.В. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций // Экспериментальная и прикладная психология / Под ред. В.Ф. Ломова. Вып. 1. Л., 1968.

ты представлены в табл. 3.6. В нижней строке таблицы приведены условные средние значения времени суммирования ( $M[u/z_i]$ ).

Таблица 3.6

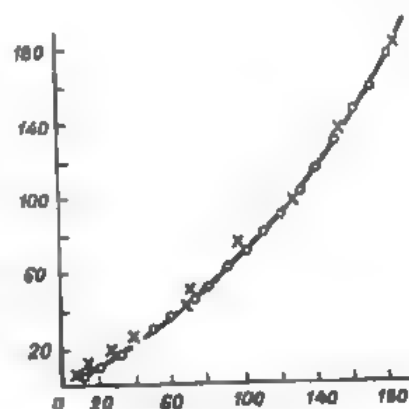
Время суммирования ( $u$ , с), к примеру 3.2

№ измерения	Количество элементарных операций ( $z_i$ )										
	8	13	27	42	59	71	96	121	129	152	183
1	7	11	15	35	50	70	85	90	90	150	210
2	8	13	16	25	45	55	75	105	105	150	180
3	8	12	17	25	45	50	90	85	105	125	190
4	—	—	20	20	50	55	75	90	110	150	150
5	—	—	20	20	45	50	75	—	105	115	160
6	—	—	17	35	40	45	70	—	105	—	210
Сумма	21	36	105	160	275	325	470	370	620	690	1100
$M[u/z_i]$	7	12	18	27	46	54	78	92	103	138	183

Примечание. Хронометраж выполнен с точностью до секунды, поэтому условные средние округлены до целых  $\text{ant}\{M[u/z_i]\}$ .

Чтобы выбрать аппроксимирующую функцию, нанесем значения ( $M[u/z_i], z_i$ ) на график и от руки проведем монотонную кривую, лежащую, по возможности, вблизи всех экспериментальных точек (рис. 3.10). Заметим, что при этом естественно считать  $u = 0$  при  $z = 0$ .

Рис. 3.10. Регрессия среднего времени суммирования, полученная сглаживанием «от руки». По оси абсцисс — количество элементарных операций суммирования; по оси ординат — время, с. Крестиками обозначены эмпирические данные, кружками — выраженные значения среднего времени.



По внешнему виду полученная кривая напоминает параболу  $h$ -й степени. Проверив это предположение, определим конечные разности  $h$ -го порядка (см. табл. 3.3). Непосредственно по эмпирическим данным этого сделать нельзя, так как разности значений аргумента ( $\Delta z_i$ ) неодинаковы по величине. Поэтому выберем новые значения  $z_i$  и соответствующие им «выравненные»  $u_i$ , которые снимем непосредственно со сглаженной кривой (рис. 3.10, кружки). Эти значения, а также вычисленные по ним конечные разности представлены в табл. 3.7. Можно видеть, что разности второй степени группируются вокруг горизонтали. Таким образом, в качестве исходной аппроксимирующей функции подходит обычная парабола без свободного члена:

$$u_i = bz_i + az_i^2,$$

где  $u_i$  и  $z_i$  определены экспериментально ( $i = 1, 2, \dots, 11$ ), а  $b$  и  $a$  — неизвестные коэффициенты, которые следует вычислить.

Таблица 3.7

Приращения  $h$ -го порядка при определении степени полинома, необходимой и достаточной для аппроксимации эмпирических значений среднего времени суммирования

Количество элементарных операций ( $z_i$ )	«Выравненные» значения среднего времени суммирования ( $u_i$ )	$\Delta u_i$	$\Delta^2 u_i$
0	0	—	—
10	5	5	—
20	10	5	0
30	16	6	1
40	24	8	2
50	30	6	-2
60	38	8	2
70	46	8	0
80	55	9	1
90	64	9	0
100	73	9	0
110	83	10	1
120	92	9	-1
130	105	13	4
140	118	13	0
150	132	14	1
160	146	14	0
170	160	14	0
180	178	18	4

Система нормальных уравнений для вычисления  $a$  и  $b$  по методу наименьших квадратов получается применением рассмотренной процедуры:

$$\sum_{i=1}^{11} u_i = b \sum_{i=1}^{11} x_i + a \sum_{i=1}^{11} x_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i u_i = b \sum_{i=1}^{11} x_i^2 + a \sum_{i=1}^{11} x_i^3$$

Промежуточные величины и их суммы представлены в табл. 3.8. Подставляя их в уравнения, запишем систему в явном виде:

$$759 = 911b + 109619a,$$

$$95333 = 109619b + 15226181a.$$

Таблица 3.8

Данные для расчета регрессии к примеру 3.2

$i$	$x_i$	$u_i$	$x_i u_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$u_i^2$
1	8	7	56	64	512	5
2	13	12	156	169	2197	8
3	27	18	486	729	19683	18
4	42	27	1134	1764	74088	29
5	69	46	3174	4761	328509	51
6	71	54	3834	5041	357911	53
7	96	78	7488	9216	884736	76
8	121	93	11253	14641	1771561	102
9	129	103	13287	16641	2146689	111
10	152	138	20976	23104	3511808	137
11	183	183	33489	33489	6128487	176
$\sum_{i=1}^{11}$	911	759	95333	109619	15226181	—

Решение проведем способом подстановки. Из первого уравнения находим

$$b = \frac{1}{911}(759 - 109619a)$$

и подставляем во второе уравнение:

$$95333 = \frac{1}{911}109619(759 - 109619a) + 15226181a;$$

$$911 \cdot 95333 = 15226181 \cdot 911a + 109619 \cdot 759 - 109619^2 a;$$

$$86848363 = 13871050891a + 83200821 - 12016325161a;$$

$$a = \frac{3647542}{1854725730} \approx 0,002;$$

$$b = \frac{1}{911}(759 - 109619 \cdot 0,002) \approx 0,6.$$

Следовательно, искомая регрессия выражается уравнением параболы:

$$u^* = 0,6x + 0,002x^2.$$

Так как измерения времени выполнены с точностью до 1 с, то теоретические значения среднего времени на суммирование округлим до целой части  $u_i^* = \text{ant} \{u^*\}$ . Определив по формуле (3.24), что  $r(u, u^*) \approx 0,97$ , можно говорить об удовлетворительной аппроксимации. Отметим, что при  $z = 1$  (имеется всего одна элементарная операция сложения) полученная регрессия дает средние затраты времени 0,6 с. Это совпадает с результатами измерений в других опытах\*.

В психологической практике нередко количество пар значений  $x, y$ , изучаемых случайных величин  $X$  и  $Y$ , наблюдавшихся в эксперименте, составляет несколько десятков. При таком небольшом количестве экспериментальных данных нельзя определить эмпирические функции распределений, но можно вычислить оценки всех числовых характеристик двумерной системы, что оказывается полезным для планирования фундаментальных исследований.

Можно выделить два случая. Первый — количество наблюдений  $n < 30$ , при этом можно вычислить только безусловные средние арифметические и дисперсии, а также коэффициент линейной корреляции и через него — коэффициенты регрессии. Здесь, однако, невозможно решить, линейна или нелинейна корреляция, а потому использование линейных корреляционных мер не обосновано и может дезинформировать исследователя, если величина  $r_{xy}$  окажется близкой к нулю.

Расчет перечисленных мер при  $n < 30$  (а при необходимости — при любом  $n$ ) осуществляется последовательно. Сначала вычя-

---

\*Калдарацкова И. М., Суходольский Г. В. Об эффективности и надежности элементарных вычислительных операций // Экспериментальная и прикладная психология / Под ред. Б. Ф. Ломова. Вып. 1. Л., 1988.

сдаются безусловные средние арифметические

$$M[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

и

$$M[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Далее вычисляются безусловные дисперсии и стандартные отклонения:

$$D[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (M[X])^2, \quad \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

и

$$D[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (M[Y])^2, \quad \sigma[Y] = \sqrt{D[Y]}.$$

Ковариация здесь определяется по формуле

$$\text{COV}[XY] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - M[X]M[Y], \quad (3.25)$$

после чего по формуле (3.19) рассчитывается коэффициент корреляции и по формулам (3.22) — коэффициенты линий регрессии

Второй случай — количество наблюдений в пределах  $30 \leq n < 200^*$ . Здесь уже можно осуществить простейшую группировку данных, что позволит решить вопрос о форме корреляции и определить в явном виде регрессии и корреляционные отношения.

Группировка в этом случае состоит в том, что области наблюдения переменных  $X$  и  $Y$  квантуются на произвольной величины интервалы  $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$ , число которых должно быть не меньше 4–5. Экспериментальные данные разносятся в таблицу (см. табл. 3.11), после чего подсчитываются частоты  $f_i$  — переменной  $X$  принять значение на  $i$ -м интервале  $\lambda_X$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и  $f_j$  — переменной  $Y$  принять значения на  $j$ -м интервале  $\lambda_Y$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Далее осуществляются вычисления:

— условных средних арифметических

$$M(y/x_i) = \frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^{f_j} y_{ij}, \quad M(x/y_j) = \frac{1}{f_j} \sum_{i=1}^{f_i} x_{ij}, \quad (3.26)$$

\*При  $n \geq 200$  можно осуществлять обычную группировку и вычислять распределения (см. 3.3.3).

где  $i$  — номера значений  $y_j$ , наблюдавшихся совместно со значениями  $x_i$  на  $i$ -м интервале  $\lambda_X$ ;  $j$  — номера значений  $x_i$ , наблюдавшихся совместно со значениями  $y_j$  на  $j$ -м интервале  $\lambda_Y$ ;  $f_i$  и  $f_j$  определены выше;

— координат «привязки» для условных средних арифметических

$$E(x_i) = \frac{1}{f_i} \sum_{i=1}^{f_i} x_{i,1}, \quad E(y_j) = \frac{1}{f_j} \sum_{j=1}^{f_j} y_{j,1}, \quad (3.27)$$

где  $E(x_i)$  — среднее арифметическое значение величины  $X$  на  $i$ -м интервале  $\lambda_X$ , которому соответствует условное среднее  $M(y/x_i)$ ;  $E(y_j)$  — то же для каждого условного среднего  $M(x/y_j)$ .

Полученные точки с координатами  $\{E(x_i), M(y/x_i)\}$  служат основой для определения регрессии « $Y$  по  $X$ », а точки с координатами  $\{M(x/y_j), E(y_j)\}$  — для определения регрессии  $X$  по  $Y$ , которые далее подлежат аппроксимации. После определения  $a_{Y/X}$  и  $a_{X/Y}$  (в линейном случае) коэффициент корреляции вычисляется через них по формуле (3.20).

Вычисление безусловных средних арифметических можно теперь осуществить через условные средние

$$\begin{aligned} M[Y] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m M(y/x_i) f_i, \\ M[X] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k M(x/y_j) f_j, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Далее вычисляются все необходимые дисперсии.

- безусловные, как и в первом случае,
- дисперсии условных средних

$$\begin{aligned} D[M(y/x_i)] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \{M(y/x_i) - M[Y]\}^2 f_i, \\ D[M(x/y_j)] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \{M(x/y_j) - M[X]\}^2 f_j; \end{aligned} \quad (3.29)$$

— остаточные дисперсии:

$$\begin{aligned} D_0[y/x_i] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m D[y/x_i] f_i, \\ D_0[x/y_j] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k D[x/y_j] f_j, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $n = \sum_{i=1}^m f_i = \sum_{j=1}^k f_j$ ;  $D[y/x_i] = \frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^k y_{ij}^2 - [M(y/x_i)]^2$  — условные дисперсии  $Y$  по  $X$ ;  $D[x/y_j] = \frac{1}{f_j} \sum_{i=1}^m x_{ij}^2 - [M(x/y_j)]^2$  — условные дисперсии  $X$  по  $Y$ .

В итоге по формулам (3.14) вычисляются корреляционные отношения, а по формуле (3.17) — коэффициент детерминации.

**Пример 3.3.** В плане комплексного исследования личности у студентов психологического факультета определялся социометрический статус на курсе ( $Y$ ) и в своей учебной группе ( $X$ ). Результаты представлены в табл. 3.9. Определим количественные характеристики двумя способами.

Таблица 3.9

Исходные данные к примеру 3.3  
 $Y$  — социометрический статус на курсе,  
 $X$  — социометрический статус в своей группе, %

$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$
48	1	45	9	8	4
-9	-9	23	8	73	19
100	22	64	15	23	2
-1	-11	11	4	23	6
14	-6	-18	-8	15	17
14	-0,5	14	-0,7	1	7
14	5	-11	-15	26	8
11	9	60	8	14	4
-28	0	34	8	81	7
46	2	11	-2	23	9
42	11	-47	-28	11	4
27	16	40	2	49	0,5
19	-8	31	15	26	8
63	0	20	-10	11	9

Для вычисления безусловных средних, дисперсий и ковариации по формуле (3.25) необходимы квадраты  $X^2$  и  $Y^2$ , произведения  $XY$ , а также их суммы и суммы исходных данных. Эти величины приведены в табл. 3.10; по ним вычисляем:

$$M[Y] = \frac{1041}{42} \approx 25, \quad M[X] = \frac{140,3}{42} \approx 3,34;$$

$$D[Y] = \frac{61155}{42} - 25^2 \approx 631, \quad D[X] = \frac{4289,99}{42} - 3,34^2 \approx 91;$$

$$\sigma[Y] \approx 28,8, \quad \sigma[X] \approx 9,54;$$



$$\text{COV}[XY] = \frac{10\,780,3}{42} - 25 \cdot 3,34 \approx 173,2;$$

$$r = \frac{173,2}{28,8 \cdot 9,54} \approx 0,63.$$

По формулам (3.21)

$$a_{Y/X} = \frac{173,2}{91} \approx 1,9, \quad a_{X/Y} = \frac{173,2}{831} \approx 0,21.$$

Таблица 3.10

К расчету коэффициента линейной корреляции  
по несгруппированным данным

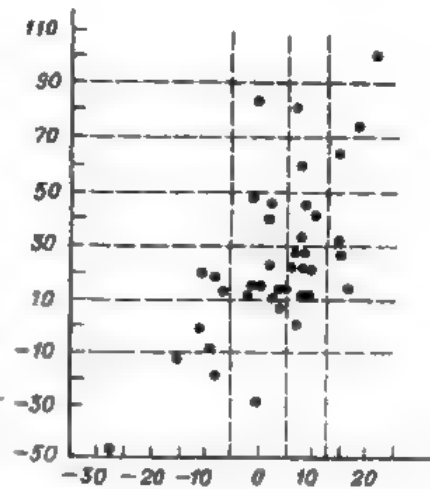
Y	X	Y <sup>2</sup>	X <sup>2</sup>	YX	Y	X	Y <sup>2</sup>	X <sup>2</sup>	YX
48	1	2304	1	48	60	8	3600	64	480
-9	-9	81	81	81	34	8	1156	64	272
100	22	10000	484	2200	13	-2	121	4	-22
-1	-11	1	121	11	-47	-28	2209	784	1316
14	-6	196	36	-84	40	2	1600	4	80
14	-0,5	196	0,25	-7	31	15	961	225	465
14	5	196	25	70	20	-10	400	100	-200
11	9	121	81	99	8	4	64	16	32
-28	0	784	0	0	73	19	5329	361	1387
46	2	2116	4	92	23	2	529	4	46
42	11	1764	121	462	23	6	529	36	132
27	15	729	225	405	15	17	225	289	255
19	-8	361	64	-152	1	7	1	49	7
83	0	6889	0	0	26	8	676	64	208
45	9	2025	81	405	24	4	196	16	56
23	8	529	64	184	81	7	6561	49	567
64	15	4096	225	960	23	9	529	81	207
11	4	121	16	44	11	4	121	16	44
-18	-8	324	64	144	49	0,5	2401	0,25	24,5
14	-0,7	196	0,49	-9,8	26	8	676	64	208
-11	-15	121	225	165	11	9	121	81	99
Суммы					1041	140,3	61 155	4289,99	10 780,3

Прежде чем группировать экспериментальные данные, построим на графике поле корреляции, а затем, как это сделано на рис. 3.11, расчленим его на интервалы, по возможности соблюдая два условия: 1) границы проходят между точками, 2) в каждом интервале оказываются два и более значений (иногда крайнюю

точку можно оставить и одну). Значения границ интервалов снимаются прямо с графика и записываются, как показано в «шапке» табл. 3.11. Таким образом, поле корреляции в нашем примере оказывается расчленено на  $m = 4$  интервала  $\lambda_X$  и на  $k = 7$  интервалов  $\lambda_Y$ .

Рис. 3.11. Поле корреляции к примеру 3.3.

По оси абсцисс — значения социометрического статуса в своей группе ( $x_i$ ), по оси ординат — значения социометрического статуса на курсе ( $y_j$ ). Точками обозначено совместное появление пар значений  $x, y_j$ . Интервалы группировки, выделенные пунктиром, как в табл. 3.11.



Группировку данных производят так. Из табл. 3.9 последовательно выбирают пары значений  $y_j x_i$  и записывают в табл. 3.11 на пересечении соответствующих интервалов  $\lambda_Y \lambda_X$ : значение  $y_j$  — в нижнем треугольнике, а значение  $x_i$  — в верхнем треугольнике. Окончив разноску, подсчитывают частоты  $f_i$  по столбцам и  $f_j$  по строкам. По столбцам и строкам табл. 3.11 определяются и условные средние, и соответствующие им координаты «привязки». Например, по первой строке и формулам (3.26) и (3.27) вычисляем

$$M(x/y_1) = \frac{1}{4}[(-8) + (-15) + (-28) + (0)] \approx -13,$$

$$E(y_1) = \frac{1}{4}[(-18) + (-11) + (-47) + (-28)] = -26.$$

Нанесем значения условных средних на график с координатами  $E(y_j)$  и  $E(x_i)$  (рис. 3.12) и определим коэффициенты регрессий графоаналитическим способом. По линейке проведем прямые на графике так, чтобы расстояния от экспериментальных точек были по возможности наименьшими. В частности, регрессия  $Y$  по  $X$  (сплошная линия на рис. 3.12) проводится через три крестика, а регрессия  $X$  по  $Y$  (пунктир на рис. 3.12) — через кружок с координатами  $(0, -2)$  и через середину расстояния между кружками с

Таблица 9.11

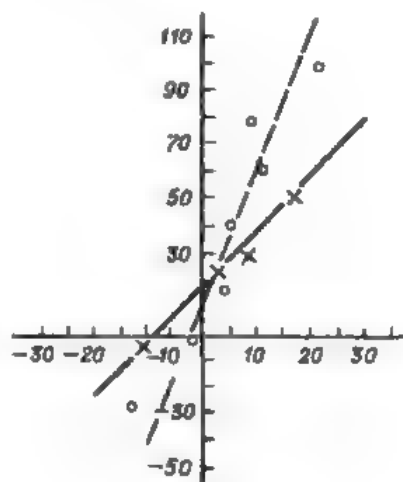
Двумерная группировка и условные средние при небольшом числе наблюдений ( $40 \div 200$ )

$x_i \backslash y_j$	$-28 \div -5$	$5 \div 5,5$	$5,5 \div 13$	$13 \div 22$	$E(y_j)$	$M(x/y_j)$	$f_j$
$-47 \div -10$	$-8, -15, -28$ $-18, -11, -47$	$-28$			$-26$	$-13$	$4$
$-10 \div 10$	$9, -11$ $-9, -1$	$4$ $8$	$7$ $1$		$0$	$-2$	$4$
$10 \div 30$	$6, 8, -10$ $14, 19, 20$	$-0,5, 5, 4, -0,7, -2, 2, 4, 4$ $14, 14, 14, 11, 14, 11, 11, 23$	$9, 8, 6, 8, 9, 8, 9$ $11, 23, 26, 23, 23, 26, 11$	$15, 17$ $27, 15$	$17,5$	$4$	$20$
$30 \div 50$		$1, 2, 2, 0,5$ $48, 40, 46, 49$	$11, 9, 8$ $42, 45, 34$	$15$ $31$	$42$	$6$	$8$
$50 \div 70$			$8$ $60$	$15$ $64$	$62$	$11,5$	$2$
$70 \div 90$		$0$ $83$	$7$ $81$	$19$ $73$	$79$	$9$	$9$
$100$				$22$ $100$	$100$	$22$	$1$
$E(x_i)$	$-12$	$2$	$8$	$17$			
$M(y/x_i)$	$-4$	$24$	$31$	$52$			
$f_i$	$8$	$15$	$13$	$8$			

координатами (79, 9) и (100, 22). Теперь по графику можно с приемлемой точностью определить коэффициенты регрессий:  $b_Y = 18$  для регрессии  $Y$  по  $X$ , так как в этой точке сплошная линия пересекает ось ординат;  $b_X = -2$  для регрессии  $X$  по  $Y$ , так как в этой точке пунктирная линия пересекает ось абсцисс.

Рис. 3.12. Линии регрессии к примеру 3.3.

По оси абсцисс — значения социометрического статуса в своей группе ( $x_i$ ), по оси ординат — значения социометрического статуса на курсе ( $y_i$ ). Крестиками обозначены условные средние  $M(x/y_j)$ , кружками — условные средние  $M(y/x_i)$ . Сплошная линия — регрессия  $y = 2x + 18$ , пунктирная — регрессия  $x = 0,2y - 2$ .



Можно видеть, что значения угловых коэффициентов

$$a_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70 - 30}{26 - 6} = 2,$$

$$a_{x/y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{12 - 4}{70 - 30} = 0,2,$$

полученные графоаналитическим способом, мало отличаются от вычисленных через корреляцию:

$$r = \sqrt{a_{y/x} a_{x/y}} = \sqrt{0,2 \cdot 2} \approx 0,63.$$

Необходимо отметить, что графоаналитический способ не следует применять для точных расчетов при значительном разбросе эмпирических условных средних и при нелинейностях.

Итак, аппроксимированные регрессии имеют вид

$$y^* = 2x + 18 \quad \text{и} \quad x^* = 0,2y - 2,$$

где  $y^*$  — теоретическое среднее значение статуса на курсе при условии, что статус в группе имеет значение  $x$ ;  $x^*$  — теоретическое среднее значение статуса в учебной группе при значении статуса на курсе  $y$ .

Займемся вычислением коэффициентов детерминации. Для расчета  $\eta_{y/x}^2$  и  $\eta_{x/y}^2$  необходимы значения  $M\{Y\}$  и  $M\{X\}$ , которые определим по формулам (3.28) и данным табл. 3.11:

$$M\{Y\} = \frac{1}{42}[(-4) \cdot 8 + 24 \cdot 15 + 31 \cdot 13 + 52 \cdot 6] \approx 25,$$

$$M\{X\} = \frac{1}{42}[(-13) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 8 + 11,5 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 22 \cdot 1] \approx 3,3,$$

что совпадает с ранее вычисленными значениями. Безусловные дисперсии получены выше:  $D\{Y\} = 831$  и  $D\{X\} = 91$ . Используя формулы (3.29), рассчитаем дисперсии условных средних (промежуточные величины приведены в табл. 3.12 и 3.13):

$$D\{M(y/x_i)\} = \frac{11585}{42} \approx 275,83$$

и

$$D\{M(x/y_j)\} = \frac{1824,88}{42} \approx 43,45.$$

Затем по уравнениям (3.14) вычислим и коэффициенты детерминации, и корреляционные отношения

Коэффициент детерминации статуса на курсе статусом в своей группе составляет

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{275,83}{831} \approx 0,33,$$

откуда соответствующее корреляционное отношение  $\eta_{y/x} \approx 0,57$ .

Коэффициент детерминации статуса в группе статусом на курсе составляет

$$\eta_{x/y}^2 = \frac{43,45}{91} \approx 0,477,$$

откуда корреляционное отношение  $\eta_{x/y} \approx 0,69$ .

Осуществим проверку найденных значений, вычислив коэффициенты детерминации через остаточные дисперсии (формулы 3.30)

$$D_0[y/x_i] \approx 563,47, \quad \text{тогда} \quad \eta_{y/x}^2 = 1 - \frac{563,47}{831} \approx 0,32;$$

$$D_0[x/y_j] \approx 47, \quad \text{тогда} \quad \eta_{x/y}^2 = 1 - \frac{47}{91} \approx 0,48.$$

Следовательно, результаты вычисления правильны.

Сопоставляя ранее вычисленное значение коэффициента корреляции ( $r = 0,63$ ) с корреляционными отношениями, можно видеть, что в рассматриваемом случае

$$r = 0,5 (\eta_{y/x} + \eta_{x/y}).$$

Таблица 3.12

Промежуточные величины к расчету  $\eta_{y/x}^2$ 

$f_i$	$\Delta M$	$\{\Delta M\}^2$	$\{\Delta M\}^2 f_i$
8	-29	841	6728
15	-1	1	15
13	6	36	468
6	27	729	4374
Сумма			11585

Примечание.  $\Delta M = M(y/x_i) - M[Y]$ 

Таблица 3.13

Промежуточные величины к расчету  $\eta_{x/y}^2$ 

$f_j$	$\Delta M$	$\{\Delta M\}^2$	$\{\Delta M\}^2 f_j$
4	-16,3	265,69	1062,76
4	-5,3	28,09	112,36
20	0,7	0,49	9,80
8	2,7	7,29	58,32
2	8,2	67,24	134,48
3	5,7	32,49	97,47
1	18,7	349,69	349,69
Сумма			1824,88

Примечание  $\Delta M = M(x/y_j) - M[X]$ .

Это свидетельствует о случайности различий между коэффициентами детерминации и о хорошем приближении корреляции к линейной

В заключение, интерпретируя полученные результаты, подчеркнем различия между коэффициентом детерминации как мерой тесноты связи и коэффициентами регрессии, характеризующими скорость изменения средних значений одной случайной величины при изменении другой. Так как односторонней обусловленностью из-за недостоверности различий  $\eta_{y/x}^2$  и  $\eta_{x/y}^2$  можно пренебречь, то можно считать, что между статусом студента на курсе и в группе существует взаимосвязь почти в половине случаев:

$$\eta_{y/x}^2 = 0,33 \leq r^2 \leq \eta_{x/y}^2 = 0,48.$$

Однако для этой доли случаев относительное (в единицах стандартного отклонения) изменение среднего статуса на курсе при из-

менении статуса в группе осуществляется в десять раз ( $a_{y/x}: a_{x/y} = 10$ ) интенсивнее, чем относительное изменение среднего статуса в группе при изменении статуса на курсе. Разумеется, эта предположительная интерпретация требует дополнительной экспериментальной проверки.

||| Полный расчет количественных характеристик двумерной системы

Чтобы полностью количественно охарактеризовать систему из двух случайных величин  $X$  и  $Y$ , необходимо иметь большое число экспериментальных данных: минимально  $n \geq 200$  пар значений  $x, y_j$ . Для вычисления характеристик распределения требуется осуществить двумерную группировку данных, которая в принципе выполняется по тем же правилам, что и одномерная группировка. Для каждой из величин определяют интервалы квантования ( $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$ ), причем нужно, чтобы количество интервалов ( $k$ ) было одинаковым для  $X$  и  $Y$ ; обычно  $k = 8 \div 12$ . Затем определяют отдельно для  $X$  и  $Y$  границы и средние значения интервалов, которые записывают в «шапку» группировочной таблицы (см. табл. 3.14). Желательно выбирать границы так, чтобы среди экспериментальных данных «граничные» значения отсутствовали.

Факт появления пары значений совместно на интервалах  $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$  кодируют в пятеричной системе, как это делалось прежде. Окончив кодирование, подсчитывают частоты совместного появления ( $f_{ij}$ ), затем — количество сгруппированных наблюдений\*:

$$N = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f_{ij}, \quad i \text{ и } j = 1, 2, \dots, k,$$

и частоты совместного появления значений  $x_i y_j$  на любой паре интервалов  $\lambda_X$  и  $\lambda_Y$ , где  $f_{ij} > 0$ :

$$P_{ij} = \frac{f_{ij}}{N}.$$

Далее определяют безусловные эмпирические вероятности распределений  $Y$  и  $X$ :

$$P_j = \sum_{i=1}^k P_{ij}, \quad P_i = \sum_{j=1}^k P_{ij},$$

---

\*В ходе кодирования несколько значений может быть потеряно или ошибочно приписано, поэтому  $n \neq N$ .

а после этого — условные эмпирические вероятности распределений  $x/y_j$  и  $y/x_i$ :

$$P_{i/j} = \frac{P_{ij}}{P_j}, \quad P_{j/i} = \frac{P_{ij}}{P_i}.$$

Совокупности перечисленных вероятностей, сопоставленные соответствующим значениям переменных, образуют эмпирические распределения, полностью характеризующие двумерную систему\*.

Для расчета числовых характеристик по распределениям используют упрощенные методы, основанные на линейном преобразовании исходных величин  $X$  и  $Y$ :

$$x_i'' = \frac{x_i - A_X}{\lambda_X} \quad \text{и} \quad y_j'' = \frac{y_j - A_Y}{\lambda_Y}, \quad (3.31)$$

где  $A_X$  и  $A_Y$  — условные начала отсчета, выбранные вблизи предполагаемого центра рассеивания. С учетом преобразований (3.31) расчетные формулы можно представить следующим образом

Для безусловных средних:

$$M[X] = A_X + \lambda_X m_X'', \quad (3.32a)$$

где величина  $m_X''$  определяется тремя способами:

$$m_X'' = \sum_{i=1}^k x_i'' P_i = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k x_i'' P_{ij} = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k x_i'' \frac{P_{ij}}{P_j} \right) P_j, \quad (3.32b)$$

$$M[Y] = A_Y + \lambda_Y m_Y'', \quad (3.33a)$$

где также

$$m_Y'' = \sum_{j=1}^k y_j'' P_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_j'' P_{ij} = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^k y_j'' \frac{P_{ij}}{P_i} \right) P_i. \quad (3.33b)$$

Для условных средних:

$$M(x/y_j) = A_X + \lambda_X \sum_{i=1}^k x_i'' \frac{P_{ij}}{P_j} \quad (3.34a)$$

и

$$M(y/x_i) = A_Y + \lambda_Y \sum_{j=1}^k y_j'' \frac{P_{ij}}{P_i}. \quad (3.34b)$$

\*В дальнейшем все эти эмпирические данные должны аппроксимироваться теоретическими функциями распределения, что в принципе аналогично одномерному случаю, но выходит за рамки нашего изложения.



Для безусловных дисперсий:

$$D[Y] = \lambda_Y^2 D'[Y], \quad (3.35a)$$

где

$$D'[Y] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (y_j'')^2 P_{ij} - (m_Y'')^2$$

и

$$D[X] = \lambda_X^2 D'[X], \quad (3.35b)$$

где

$$D'[X] = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k (x_i'')^2 P_{ij} - (m_X'')^2.$$

Для дисперсий условных средних

$$D[M(x/y_j)] = \lambda_X^2 D'[M(x/y_j)], \quad (3.36a)$$

где

$$D'[M(x/y_j)] = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k x_i'' \frac{P_{ij}}{P_j} \right)^2 P_j - (m_X'')^2,$$

и

$$D[M(y/x_i)] = \lambda_Y^2 D'[M(y/x_i)], \quad (3.36b)$$

где

$$D'[M(y/x_i)] = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^k y_j'' \frac{P_{ij}}{P_i} \right)^2 P_i - (m_Y'')^2.$$

Для остаточных дисперсий:

$$D_o[x/y_j] = \lambda_X^2 D'[x/y_j], \quad (3.37a)$$

где

$$D_o[x/y_j] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (X_i'')^2 P_{ij} - \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k x_i'' \frac{P_{ij}}{P_j} \right)^2 P_j,$$

и

$$D_o[y/x_i] = \lambda_Y^2 D'[y/x_i], \quad (3.37b)$$

где

$$D_o[y/x_i] = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k (y_j'')^2 P_{ij} - \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^k y_j'' \frac{P_{ij}}{P_i} \right)^2 P_i.$$

При сопоставлении уравнений (3.35) — (3.37) можно видеть, что выполняются равенства:

$$D'[X] = D'[M(x/y_j)] + D_o[x/y_j]$$

и

$$D'[Y] = D'[M(y/x_i)] + D'_o[y/x_i],$$

поэтому коэффициенты детерминации равны

$$\eta_{x/y}^2 = \frac{D'[M(x/y_j)]}{D'[X]} = 1 - \frac{D'_o[x/y_j]}{D'[X]},$$

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{D'[M(y/x_i)]}{D'[Y]} = 1 - \frac{D'_o[y/x_i]}{D'[Y]}.$$

Аналогично в преобразованных величинах выражается коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\text{COV}'[XY]}{\sqrt{D'[X]D'[Y]}}, \quad (3.38)$$

где

$$\text{COV}'[XY] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i'' y_j'' p_{ij} - m_X'' m_Y'', \quad (3.39)$$

и коэффициенты регрессии:

$$a_{y/x} = \frac{\lambda_Y \text{COV}'[XY]}{\lambda_X D'[X]},$$

$$a_{x/y} = \frac{\lambda_X \text{COV}'[XY]}{\lambda_Y D'[Y]} \quad (3.40)$$

**Пример 3.4.** При изучении амплитудно-частотных характеристик руки человека в условиях направленного уменьшения и увеличения амплитуды совместно регистрировались значения полупериодов ( $Y$ ) и амплитуд ( $X$ ) колебаний руки. Результаты одного из испытуемых сгруппированы в табл. 3.14. Обработку экспериментальных данных начнем с вычисления частотей совместного распределения значений полупериодов ( $Y$ ) и амплитуд ( $X$ ), безусловных распределений, средних арифметических, дисперсий и коэффициента корреляции.

Частоты совместного распределения ( $p_{ij}$ ), представленные в табл. 3.15, вычислены с округлением до одной тысячной так, чтобы выполнялось условие  $\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} p_{ij} = 1$ . Суммируя  $p_{ij}$  по строкам (по  $i$ ), определим безусловные частоты  $p_j$ , совокупность которых в сопоставлении совокупности интервалов группировки  $\lambda_Y$  образует ряд безусловного распределения значений полупериодов  $Y$ ; заметим, что  $\sum_{j=1}^{12} p_j = 1$ . Суммируя частоты  $p_{ij}$  по столбцам (по  $j$ ) табл. 3.15, определим безусловные частоты  $p_i$ , вместе с совокупностью интервалов группировки  $\lambda_X$  образующие ряд безусловного распределения значений амплитуд  $X$ ; очевидно, что  $\sum_{i=1}^{12} p_i = 1$ .

Таблица 3.14

## Исходные данные к примеру 3.4

$x_i$  — границы интервалов группировки амплитуд, мм,  $\lambda_X = 15$ ;  
 $y_j$  — границы интервалов группировки полупериодов, мм,  $\lambda_Y = 0,7$  мм;  $N = 213$

$x_i$	7,5 ÷ 22,5	22,5 ÷ 37,5	37,5 ÷ 52,5	52,5 ÷ 67,5	67,5 ÷ 82,5	82,5 ÷ 97,5	97,5 ÷ 112,5	112,5 ÷ 127,5	127,5 ÷ 142,5	142,5 ÷ 157,5	157,5 ÷ 172,5	172,5 ÷ 187,5
$y_j$												
2,95 ÷ 3,65	1	1	1									
3,65 ÷ 4,35	1	14	1	1								
4,35 ÷ 5,05		5	17	7	4	2						
5,05 ÷ 5,75			2	9	4	5	1					
5,75 ÷ 6,45			1	8	7	5	3	3	1			
6,45 ÷ 7,15				—	3	5	7	6	3	3		
7,15 ÷ 7,85				1	2	3	2	—	4	4	3	
7,85 ÷ 8,55					1	1	1	4	1	9	11	1
8,55 ÷ 9,25								1	1	3	11	3
9,25 ÷ 9,95									2	1	1	1
9,95 ÷ 10,65										2	2	2
10,65 ÷ 11,35										1	2	1

Таблица 3.15

Частоты совместного распределения значений ( $p_{ij}$ ) полупериодов ( $y$ ) и амплитуд ( $x$ )  
и промежуточные величины к расчету безусловных средних,  
дисперсий и коэффициента корреляции

	$x_i$	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	$p_i$	$y_j'' p_j$	$\sum_{j=1}^{12} (x_i'')^2 p_{ij}$
$y_j$	$x_i''$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6			
3,3	-5	0,005	0,005	0,005										0,015	-0,075	0,250
4,0	-4	0,005	0,066	0,005	0,005									0,081	-0,324	1,246
4,7	-3		0,023	0,080	0,033	0,019	0,009							0,164	-0,492	1,239
5,4	-2			0,009	0,042	0,019	0,023	0,005						0,098	-0,196	0,273
6,1	-1			0,005	0,037	0,033	0,023	0,014	0,014	0,005				0,131	-0,131	0,341
6,8	0				—	0,014	0,023	0,033	0,028	0,014	0,014			0,126	0,000	0,509
7,5	1				0,005	0,009	0,014	0,009	—	0,019	0,019	0,014		0,089	0,089	0,863
8,2	2					0,005	0,005	0,005	0,019	0,005	0,042	0,051	0,005	0,137	0,274	2,258
8,9	3								0,005	0,005	0,014	0,051	0,014	0,089	0,267	2,068
9,6	4									0,009	0,005	0,005	0,005	0,024	0,096	0,466
10,3	5										0,009	0,009	0,009	0,027	0,135	0,893
11,0	6										0,005	0,009	0,005	0,019	0,114	0,485
$p_i$		0,010	0,094	0,104	0,122	0,099	0,097	0,066	0,066	0,057	0,108	0,139	0,038	1,000	-0,243	10,691
$x_i'' p_i$		-0,050	-0,376	-0,312	-0,244	-0,099	0,000	0,066	0,132	0,171	0,432	0,695	0,228	0,643	$\lambda_Y = 15$ мм	
$\sum_{j=1}^{12} (y_j'')^2 p_{ij}$		0,205	1,388	0,966	0,587	0,309	0,230	0,063	0,135	0,233	0,789	1,306	0,631	6,851	$\lambda_Y = 0,7$ мм	
$\sum_{j=1}^{12} x_i'' y_j'' p_{ij}$		0,225	1,432	0,924	0,470	0,109	0,000	-0,005	0,078	0,225	0,960	1,940	0,882	7,240	$\lambda_X = 90$ мм	
															$\lambda_Y = 6,8$ мм	

Пользуясь методом, рассмотренным в параграфе 3.1, можем определить частоты кумулятивной призмogramмы совместного распределения  $p_{ij} (X \leq x_i, Y \leq y_j)$ , суммируя для любой пары значений  $x_i, y_j$  все частоты  $p_{ij}$ , расположенные слева и сверху от иско- мой и на ее месте. Например, по данным табл. 3.15

$$p_{ij} (X \leq 45, Y \leq 4) = \\ = 0,005 + 0,005 + 0,005 + 0,005 + 0,006 + 0,005 = 0,091.$$

«Граничные» слева и снизу частоты

$$p_{ij} (X \leq x_i, Y \leq y_j) \equiv p_i (X \leq x_i),$$

а «граничные» справа и сверху частоты

$$p_{ij} (X \leq x_i, Y \leq y_j) \equiv p_j (Y \leq y_j),$$

как показано в табл. 3.16.

Безусловные средние арифметические значения определим, вы- числяя  $m''_X$  и  $m''_Y$  по способу произведений через безусловные эм- пирические вероятности (табл. 3.15):

$$m''_X = \sum_{i=1}^{12} x'_i p_i = 0,643, \\ m''_Y = \sum_{j=1}^{12} y'_j p_j = -0,243$$

Проверка другим способом по формулам (3.326) и (3.336) показы- вает, что вычисления правильны. Тогда по формулам (3.32а) и (3.33а)

$$M[X] = 90 + 15 \cdot 0,643 \approx 99,6 \text{ (мм)}$$

и

$$M[Y] = 6,8 - 0,7 \cdot 0,243 \approx 6,6 \text{ (мм)}.$$

Безусловные дисперсии определим по формулам (3.35), исполь- зуя суммы квадратов отклонений, приведенные в последнем столб- це и предпоследней строке табл. 3.15:

$$D'[X] = 10,691 - 0,643^2 \approx 10,278, \\ D[X] = 15^2 \cdot 10,278 \approx 2312,55,$$

откуда  $\sigma[X] \approx 48,1$ ;

$$D'[Y] = 6,851 - (-0,243)^2 \approx 6,792, \\ D[Y] = 0,7^2 \cdot 6,792 \approx 3,33,$$

откуда  $\sigma[Y] \approx 1,8$ .

Таблица 3.16

Частоты кумулятивной призмোগраммы совместного распределения  
и кумулятивных гистограмм безусловных распределений к примеру 3.4

$x_i$ $y_j$	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	$p_2(Y \leq y_j)$
3,3	0,005	0,010	0,015										0,015
4,0	0,010	0,081	0,091	0,096									0,096
4,7		0,104	0,194	0,232	0,251	0,260							0,260
5,4			0,203	0,283	0,321	0,353	0,358						0,358
6,1			0,208	0,325	0,396	0,451	0,470	0,484	0,489				0,489
6,8				0,325	0,410	0,488	0,540	0,582	0,601	0,615			0,615
7,5				0,330	0,424	0,516	0,577	0,619	0,657	0,690	0,704		0,704
8,2					0,429	0,526	0,592	0,653	0,696	0,771	0,836	0,841	0,841
8,9								0,658	0,706	0,795	0,911	0,930	0,930
9,6									0,715	0,809	0,930	0,954	0,954
10,3										0,818	0,948	0,981	0,981
11,0										0,823	0,962	1,000	1,000
$p_1(X \leq x_i)$	0,010	0,104	0,208	0,330	0,429	0,526	0,592	0,658	0,715	0,823	0,962	1,000	

В последней строке табл. 3.15 приведены суммы  $\sum_{j=1}^{12} x_i'' y_j' p_{ij}$ , используя которые, по формуле (3.30) вычислим

$$\text{COV}'[XY] = 7,24 - 0,643(-0,243) \approx 7,396.$$

Тогда коэффициент корреляции определится по формуле (3.29):

$$r = \frac{7,396}{\sqrt{10,278 \cdot 6,792}} \approx 0,885,$$

отсюда «линейная» оценка коэффициента детерминации:  $r^2 \approx 0,783$ . По формулам (3.31) вычислим оценки коэффициентов линейной регрессии:

$$a_{y/x} = \frac{0,7 \cdot 7,396}{15 \cdot 10,278} \approx 0,034,$$

$$a_{x/y} = \frac{15 \cdot 7,396}{0,7 \cdot 6,792} \approx 23,3.$$

Теперь займемся вычислением частот условных распределений, условных средних, линий регрессии и корреляционных отношений. Условные распределения  $Y$  по  $X$ , заданные частотами  $\xi_{y_i}$ , представлены в табл. 3.17. Условные распределения  $X$  по  $Y$ , заданные частотами  $\xi_{x_i}$ , представлены в табл. 3.18. В этих же таблицах приведены промежуточные величины, необходимые для расчета условных средних, дисперсий условных средних и остаточных дисперсий. По формулам (3.34) и табл. 3.17 и 3.18 вычислены условные средние  $M(x/y_i)$  и  $M(y/x_i)$ , которые сопоставлены значениям  $y_i$  и  $x_i$  в табл. 3.19 и на рис. 3.13.

Определим коэффициенты линии регрессии  $Y$  по  $X$  графоаналитическим способом. При  $X = 0$  с графика (рис. 3.13) получаем  $b_Y \approx 3,1$ . Отсюда

$$a_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9,5 - 3,1}{180} \approx 0,035.$$

Совпадение с  $a_{y/x}$ , вычисленным через ковариацию, хорошее. Можно принять уравнение  $y = 0,035x + 3,1$  в качестве оценки теоретической зависимости средних полупериодов от амплитуды колебаний.

Так как точки  $M(x/y_i)$  на рис. 3.13 не образуют «хорошей» прямой линии, коэффициенты линий регрессии  $X$  по  $Y$  вычислим по методу наименьших квадратов. Нормальные уравнения в явном виде следующие:

$$1292 = 85,8a_{x/y} + 12b_X,$$

$$10650,4 = 683,54a_{x/y} + 85,8b_X.$$

Таблица 3.17

Условные частоты  $\frac{p_{ij}}{p_i}$  значений  $y$ , при условии, что появились значения  $x_i$ , и промежуточные величины к расчету  $\eta_{y/x}^2$

$x_i$		15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
$y_j$	$y_j'' x_i''$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
3,3	-5	0,500	0,053	0,048									
4,0	-4	0,500	0,702	0,048	0,041								
4,7	-3		0,244	0,769	0,270	0,192	0,093						
5,4	-2			0,087	0,344	0,192	0,237	0,076					
6,1	-1			0,048	0,303	0,333	0,237	0,212	0,212	0,088			
6,8	0				-	0,141	0,237	0,500	0,424	0,246	0,130		
7,5	1				0,041	0,091	0,144	0,136	-	0,333	0,176	0,101	
8,2	2					0,050	0,052	0,076	0,288	0,088	0,388	0,367	0,132
8,9	3								0,076	0,088	0,130	0,367	0,368
9,6	4									0,158	0,046	0,036	0,132
10,3	5										0,083	0,065	0,237
11,0	6										0,046	0,065	0,132
$\sum_{j=1}^{12} y_j'' \frac{p_{ij}}{p_i} = S$		-4,500	-3,805	-2,961	-1,924	-1,102	-0,742	-0,076	0,592	1,317	2,217	2,795	3,873
$S^2$		20,250	14,478	8,768	3,702	1,214	0,551	0,006	0,350	1,734	4,915	7,812	15,000
$p_i$		0,010	0,094	0,104	0,122	0,099	0,097	0,066	0,066	0,057	0,108	0,139	0,038
$S^2 p_i$		0,202	1,361	0,912	0,452	0,120	0,053	0,000	0,023	0,099	0,531	1,086	0,570

Таблица 3.18

Условные частоты  $\frac{p_{ij}}{p_j}$  значений  $x_i$ , при условии, что появились значения  $y_j$ , и промежуточные величины к расчету  $\eta_{x/y}^2$

$y_j$		3,3	4,0	4,7	5,4	6,1	6,8	7,5	8,2	8,9	9,6	10,3	11,0
$x_i$	$x_i'' y_j''$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
15	-5	0,333	0,061										
30	-4	0,333	0,815	0,140									
45	-3	0,333	0,062	0,488	0,092	0,038							
60	-2		0,062	0,201	0,429	0,282		0,056					
75	-1			0,118	0,194	0,252	0,111	0,101	0,036				
90	0			0,055	0,234	0,176	0,183	0,157	0,036				
105	1				0,051	0,107	0,262	0,101	0,037				
120	2					0,106	0,222	-	0,139	0,056			
135	3					0,038	0,111	0,214	0,037	0,056	0,375		
150	4						0,111	0,214	0,306	0,157	0,208	0,333	0,263
165	5							0,157	0,372	0,573	0,208	0,333	0,474
180	6								0,037	0,157	0,208	0,333	0,263
$\sum_{i=1}^{12} x_i'' \frac{p_{ij}}{p_j} = S$		-3,996	-3,875	-2,542	-1,277	-0,497	1,372	2,171	3,696	4,715	4,245	4,995	5,000
$S^2$		15,968	15,013	6,462	1,631	0,247	1,882	4,713	13,660	22,231	18,020	24,950	25,000
$p_j$		0,015	0,081	0,164	0,098	0,131	0,126	0,089	0,137	0,089	0,024	0,027	0,019
$S^2 p_j$		0,240	1,216	1,060	0,160	0,032	0,237	0,419	1,871	1,979	0,432	0,674	0,475

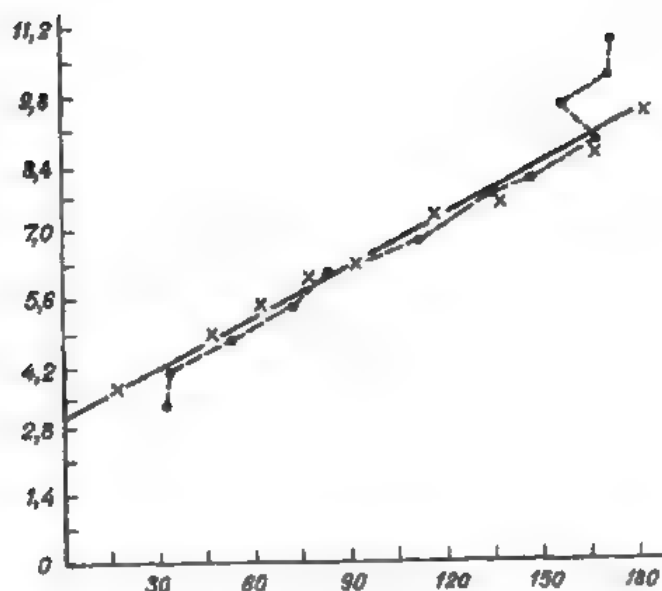


Рис. 3.13. Регрессии условных средних к примеру 3.4.

По оси ординат — значения полупериодов ( $y$ ), по ось абсцисс — значения амплитуды ( $x$ ). Крестиками обозначены условные средние  $M(y/x_i)$ , точками — условные средние  $M(x/y_j)$  (см. табл. 3.18). Сплошная линия — регрессия  $y = 0,035x + 3,1$ .

Приближенные вычисления дают такое решение системы —  $a_{x/y} \approx 21$ ;  $b_x \approx -42$ , которое удовлетворительным образом соответствует вычисленному через ковариацию значению  $a_{x/y}$ . Однако следует считать значение  $a_{x/y} \approx 23,3$  более точным\* и заново определить  $b_x$ :

$$b_x = \frac{1}{12}(1292 - 85,8 \cdot 23,3) \approx -59.$$

Таким образом, в качестве линейной оценки теоретической зависимости амплитуды колебаний руки от полупериода принимается уравнение  $x = 23,3y - 59$ .

Остается вычислить коэффициенты детерминации  $X$  по  $Y$  и  $Y$  по  $X$  и корреляционные отношения. Сначала по формулам (3.36–3.37) и промежуточным величинам из табл. 3.15, 3.17–3.19 рассчитаем

\*Оно получено в результате более короткой цепочки вычислений.



## Условные средние арифметические значения

Регрессия $Y$ по $X$		Регрессия $X$ по $Y$	
$x_i$	$M(y/x_i)$	$y_j$	$M(x/y_j)$
15	3,6	3,3	31
30	4,1	4,0	32
45	4,7	4,7	52
60	5,4	5,4	71
75	6,0	6,1	82
90	6,3	6,8	111
105	6,7	7,5	123
120	7,2	8,2	145
135	7,7	8,9	161
150	8,4	9,6	154
165	8,7	10,3	165
180	9,5	11,0	165

Примечание. Значения  $M(y/x_i)$  округлены до десятых, а  $M(x/y_j)$  — до целых в соответствии с точностью измерения периодов и амплитуд

необходимые дисперсии:

$$D' [M(x/y_j)] = 8,795 - 0,413 = 8,382,$$

$$D'_o [x/y_j] = 10,691 - 8,795 = 1,896;$$

$$D' [M(y/x_i)] = 5,409 - 0,059 = 5,350,$$

$$D'_o [y/x_i] = 6,851 - 5,409 = 1,442$$

Проверяя равенства

$$D'[X] = D' [M(x/y_j)] + D'_o [x/y_j] = 10,278$$

и

$$D'[Y] = D' [M(y/x_i)] + D'_o [y/x_i] = 6,792,$$

убеждаемся в правильности вычислений. Окончательно находим

$$\eta_{x/y}^2 = \frac{8,382}{10,278} = 1 - \frac{1,896}{10,278} \approx 0,816, \quad \eta_{x/y} = 0,903;$$

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{5,350}{6,792} = 1 - \frac{1,442}{6,792} \approx 0,788, \quad \eta_{y/x} = 0,888.$$

Сопоставляя эти результаты с  $r^2 = 0,783$ , приходим к выводу, что корреляция в рассматриваемом случае почти не отличается от линейной.

### ||| Расчет совокупных характеристик двумерной системы

Если эмпирические данные содержат одну-две значащие цифры, удобно рассчитывать векторы безусловных и условных средних, ковариационные и корреляционные матрицы, пользуясь матричными уравнениями. Пусть, например, имеется двумерное распределение частот средних значений интервалов квантованных случайных величин  $XY$ , где  $X = (2, 4, 7)$ ,  $Y = (2, 3, 5, 8)$ :

$$P(XY) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,01 & 0,03 & 0,05 & 0,11 \\ 0,02 & 0,08 & 0,10 & 0,10 \\ 0,07 & 0,09 & 0,15 & 0,19 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

1. Вычисляем безусловные частные распределения, суммируя полное распределение «по другой» переменной:

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_Y P(XY) = \\ &= [(0,01 + 0,03 + 0,05 + 0,11), (0,02 + 0,08 + 0,10 + 0,10), \\ &\quad (0,07 + 0,09 + 0,15 + 0,19)] = (0,2 \cdot 2, 0,3 \cdot 4, 0,5 \cdot 7); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y) &= \sum_X P(XY) = \\ &= [(0,01 + 0,02 + 0,07), (0,03 + 0,08 + 0,09), (0,05 + 0,10 + 0,15), \\ &\quad (0,11 + 0,10 + 0,19)] = (0,1 \cdot 2, 0,2 \cdot 3, 0,3 \cdot 5, 0,4 \cdot 8). \end{aligned}$$

2. Вычисляем компоненты вектора безусловных средних, суммируя полученные распределения «по своей» переменной:

$$\begin{aligned} M_X &= \sum_X P(X) = 0,2 \cdot 2 + 0,3 \cdot 4 + 0,5 \cdot 7 = 5,1; \\ M_Y &= \sum_Y P(Y) = 0,1 \cdot 2 + 0,2 \cdot 3 + 0,3 \cdot 5 + 0,4 \cdot 8 = 5,5; \\ M_{XY} &= (M_X; M_Y) = (5,1; 5,5). \end{aligned}$$

3. Вычисляем элементы ковариационной матрицы. Сначала рассчитываем ковариацию по полному распределению, суммируя произведения совместных частот на значения  $x_i y_j$  и вычитая

из суммы произведение безусловных средних:

$$\begin{aligned}\text{COV}_{XY} &= \sum_X \sum_Y \mathcal{P}(XY) - M_X M_Y = \\ &= 0,01 \cdot 2 \cdot 2 + 0,03 \cdot 2 \cdot 3 + 0,05 \cdot 2 \cdot 5 + 0,11 \cdot 2 \cdot 8 + \\ &+ 0,02 \cdot 4 \cdot 2 + 0,08 \cdot 4 \cdot 3 + 0,10 \cdot 4 \cdot 5 + 0,10 \cdot 4 \cdot 8 + \\ &+ 0,07 \cdot 7 \cdot 2 + 0,09 \cdot 7 \cdot 3 + 0,15 \cdot 7 \cdot 5 + 0,19 \cdot 7 \cdot 8 - \\ &- 5,1 \cdot 5,5 = 27,56 - 28,05 = -0,49.\end{aligned}$$

Затем по уравнениям (3.35) вычисляем безусловные дисперсии по частным распределениям, суммируя произведения безусловных частот на квадраты значений и вычитая из суммы квадрат безусловного среднего:

$$\begin{aligned}D_X &= \sum_X \mathcal{P}(X^2) - M_X^2 = 0,2 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 4^2 + 0,5 \cdot 7^2 - 5,1^2 = 4,09; \\ D_Y &= \sum_Y \mathcal{P}(Y^2) - M_Y^2 = \\ &= 0,1 \cdot 2^2 + 0,2 \cdot 3^2 + 0,3 \cdot 5^2 + 0,4 \cdot 8^2 - 5,5^2 = 5,05.\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{K}_{XY} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} D_X & \text{COV}_{XY} \\ \text{COV}_{XY} & D_Y \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4,09 & -0,49 \\ -0,49 & 5,05 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем коэффициент корреляции и записываем корреляционную матрицу:

$$r_{XY} = \text{COV}_{XY} : \sqrt{D_X D_Y} = -0,49 : \sqrt{4,09 \cdot 5,05} \approx -0,107 \approx -0,11;$$

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,00 & -0,11 \\ -0,11 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

5. Вычисляем матрицы условных распределений:

$$\mathcal{P}(X/Y) = \mathcal{P}(XY) \mathcal{P}(Y) =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,02 \\ 0,07 \end{pmatrix} : 0,1; & \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,08 \\ 0,09 \end{pmatrix} : 0,2; & \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,15 \end{pmatrix} : 0,3; & \begin{pmatrix} 0,11 \\ 0,10 \\ 0,19 \end{pmatrix} : 0,4 \end{matrix} \right] \approx$$

$$\approx \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} & \left( \begin{matrix} 0,1 & 0,15 & 0,17 & 0,275 \\ 0,2 & 0,40 & 0,33 & 0,250 \\ 0,7 & 0,45 & 0,50 & 0,475 \end{matrix} \right);$$

$$\mathcal{P}(Y/X) = \mathcal{P}(XY) \mathcal{P}(X) =$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} (0,01 & 0,03 & 0,05 & 0,11) : 0,2 \\ (0,02 & 0,08 & 0,10 & 0,10) : 0,3 \\ (0,07 & 0,09 & 0,15 & 0,19) : 0,5 \end{matrix} \right] \approx$$

$$\approx \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} & \left( \begin{matrix} 0,05 & 0,15 & 0,25 & 0,55 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0,07 & 0,27 & 0,33 & 0,33 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0,14 & 0,18 & 0,30 & 0,38 \end{matrix} \right).$$

Здесь по-прежнему условные распределения отделены друг от друга пунктиром.

6. Вычисляем по полученным матрицам векторы условных средних:

$$M_{X/Y=2} = 0,1 \cdot 2 + 0,2 \cdot 4 + 0,7 \cdot 7 = 5,9,$$

$$M_{X/Y=3} = 0,15 \cdot 2 + 0,40 \cdot 4 + 0,45 \cdot 7 = 5,05,$$

$$M_{X/Y=5} = 0,17 \cdot 2 + 0,33 \cdot 4 + 0,50 \cdot 7 = 5,16,$$

$$M_{X/Y=8} = 0,275 \cdot 2 + 0,250 \cdot 4 + 0,475 \cdot 7 = 4,875;$$

$$M_{X/Y} = (M_{X/2}; M_{X/3}; M_{X/5}; M_{X/8}) = (5,9; 5,05; 5,16; 4,875);$$

$$M_{Y/X=2} = 0,05 \cdot 2 + 0,15 \cdot 3 + 0,25 \cdot 5 + 0,55 \cdot 8 = 6,20,$$

$$M_{Y/X=4} = 0,07 \cdot 2 + 0,27 \cdot 3 + 0,33 \cdot 5 + 0,33 \cdot 8 = 5,24,$$

$$M_{Y/X=7} = 0,14 \cdot 2 + 0,18 \cdot 3 + 0,30 \cdot 5 + 0,38 \cdot 8 = 5,36;$$

$$M_{Y/X} = (M_{Y/2}; M_{Y/4}; M_{Y/7}) = (6,20; 5,24; 5,36).$$

Проверим:

$$\begin{aligned} M_X &= M[M_{X/Y}] = \\ &= 0,1 \cdot 5,9 + 0,2 \cdot 5,05 + 0,3 \cdot 5,16 + 0,4 \cdot 4,875 \approx 5,1; \\ M_Y &= M[M_{Y/X}] = 0,2 \cdot 6,20 + 0,3 \cdot 5,24 + 0,5 \cdot 5,36 \approx 5,5 \end{aligned}$$

условные средние рассчитаны правильно.

7. Вычисляем векторы условных дисперсий по матрицам условных распределений:

$$\begin{aligned} D_{X/Y=2} &= 0,1 \cdot 2^2 + 0,2 \cdot 4^2 + 0,7 \cdot 7^2 - 5,9^2 = 3,09, \\ D_{X/Y=3} &= 0,15 \cdot 2^2 + 0,40 \cdot 4^2 + 0,45 \cdot 7^2 - 5,05^2 = 3,55, \\ D_{X/Y=5} &= 0,17 \cdot 2^2 + 0,33 \cdot 4^2 + 0,50 \cdot 7^2 - 5,16^2 = 3,84, \\ D_{X/Y=8} &= 0,275 \cdot 2^2 + 0,250 \cdot 4^2 + 0,475 \cdot 7^2 - 4,875^2 = 4,60; \\ \mathcal{D}_{X/Y} &= (3,09/y=2, 3,55/y=3, 3,84/y=5, 4,60/y=8); \\ D_{Y/X=2} &= 0,05 \cdot 2^2 + 0,15 \cdot 3^2 + 0,25 \cdot 5^2 + 0,55 \cdot 8^2 - 6,2^2 \approx 4,56, \\ D_{Y/X=4} &= 0,07 \cdot 2^2 + 0,27 \cdot 3^2 + 0,33 \cdot 5^2 + 0,33 \cdot 8^2 - 5,24^2 \approx 4,62, \\ D_{Y/X=7} &= 0,14 \cdot 2^2 + 0,18 \cdot 3^2 + 0,30 \cdot 5^2 + 0,38 \cdot 8^2 - 5,36^2 \approx 5,27; \\ \mathcal{D}_{Y/X} &= (4,56/x=2, 4,62/x=4, 5,27/x=7). \end{aligned}$$

8. Вычисляем средние из условных дисперсий — так называемые остаточные, или случайные, дисперсии — по полученным векторам условных дисперсий.

$$\begin{aligned} D_o[y/x_i] &= 0,2 \cdot 4,56 + 0,3 \cdot 4,62 + 0,5 \cdot 5,27 = 4,933, \\ D_o[x/y_i] &= 0,1 \cdot 3,09 + 0,2 \cdot 3,55 + 0,3 \cdot 3,84 + 0,4 \cdot 4,60 = 4,011. \end{aligned}$$

9. Вычисляем дисперсии условных средних — так называемые факторные дисперсии:

$$\begin{aligned} D(M_{X/Y}) &= \sum_Y P_Y M_{X/Y}^2 - M_X^2 = \\ &= 0,1 \cdot 5,9^2 + 0,2 \cdot 5,05^2 + 0,3 \cdot 5,16^2 + 0,4 \cdot 4,875^2 - 5,1^2 \approx 0,065; \\ D(M_{Y/X}) &= \sum_X P_X M_{Y/X}^2 - M_Y^2 = \\ &= 0,2 \cdot 6,20^2 + 0,3 \cdot 5,24^2 + 0,5 \cdot 5,36^2 - 5,5^2 \approx 0,041. \end{aligned}$$

Проверим, сопоставляя с вычисленными ранее безусловными дисперсиями, по уравнениям (3.13).

$$D_Y = D[M_{Y/X}] + D_o[y/x_i] = 0,041 + 4,933 = 4,974$$

— против 5,05, так что ошибка составляет около 1,5% от исходного результата; аналогично:  $D_X = 0,065 + 4,011 = 4,076$  — против 4,09, так что ошибка меньше 1%. Следовательно, результаты расчета остаточных и факторных дисперсий приемлемы.

10. Вычисляем коэффициенты детерминации (3.14) и корреляционные отношения (3.15):

$$\eta_{Y/X}^2 = D[M_{Y/X}] : D_Y = 0,041 : 5,05 \approx 0,0081, \quad \eta_{Y/X} \approx 0,09;$$

$$\eta_{X/Y}^2 = D[M_{X/Y}] : D_X = 0,065 : 4,09 \approx 0,0159, \quad \eta_{X/Y} \approx 0,13.$$

Теперь можно записать псевдокорреляционную матрицу\*

$$R_{\text{пс}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y \end{matrix} \\ \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,00 & 0,13 \\ 0,09 & 1,00 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Сравнивая корреляционные отношения с полученным выше коэффициентом линейной корреляции  $r_{XY} \approx -0,11$ , можно видеть, что в данном случае  $r_{XY}^2 \approx 0,5 (\eta_{X/Y}^2 + \eta_{Y/X}^2)$ , т. е. нелинейности простых регрессий «X по Y» и «Y по X» небольшие и линейная аппроксимация вполне приемлема. Любопытный читатель может самостоятельно по векторам условных средних построить график, по формулам (3.21) или (3.22) вычислить угловые коэффициенты регрессий и графоаналитическим способом найти свободные члены для уравнений этих регрессий.

## ГЛАВА I КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### I.1. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

#### I.1.1. Понятие о многомерной системе

$N$  случайных величин, рассматриваемых совместно, образуют  $N$ -мерную систему случайных величин. При  $N > 2$  обычно говорят о многомерных системах.

Пусть случайные величины  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_{N-1}, X_N$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) образуют систему. Тогда в каждом испытании совместно реализуются (или рассматриваются)  $N$  значений:  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{N-1}, x_N$ , каждое из области определения соответствующей случайной величины  $X_i$ . Такую совокупность из  $N$  значений  $x_i$  можно рассматривать как координаты реализации случайной точки  $A$  в  $N$ -мерном декартовом пространстве. Если соединить точку  $A$  с началом координат, то совокупность значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) может рассматриваться как совокупность координат проекций реализации случайного вектора  $\vec{OA}$  на координатные оси.

Таким образом,  $N$ -мерная система случайных величин интерпретируется как случайная точка в гиперпространстве\* либо как случайный  $N$ -мерный вектор и задается списком своих реализаций\*\*, каждая из которых определена совокупностью из  $N$  проекций  $x_1, x_2, \dots, x_N$  на координатные оси. Пример реализации случайной точки и случайного вектора в геометрической интерпретации для трехмерной системы дан на рис. 4.1. Заметим, что рассмотренные в предыдущей главе двумерные системы — простейший

\*Гиперпространством называется  $N$ -мерное пространство при  $N > 3$ . Гиперпространство нельзя изобразить в наглядной геометрической форме. Поэтому многомерные системы изображаются в аналитической или табличной форме.

\*\*Реализация случайной точки (случайного вектора) — это точка (вектор), полученная в результате опыта при некотором комплексе существенных условий.

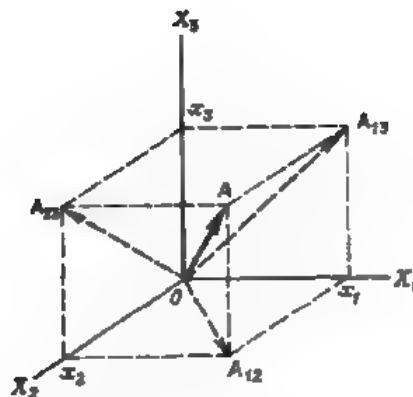


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация трехмерной системы. Случайные величины  $X_1, X_2, X_3$  изображены осями прямоугольной системы координат.  $A$  — реализация случайной точки;  $A_{12}$  — проекция  $A$  на плоскость  $X_1OX_2$ , аналогично  $A_{13}$  и  $A_{23}$  — проекции  $A$  на соответствующие плоскости  $X_1OX_3$  и  $X_2OX_3$ . «Тройка» значений  $(x_1, x_2, x_3)$  однозначно определяет положение точки  $A$  в трехмерном пространстве.  $\vec{OA}$  — реализация случайного вектора;  $\vec{OA}_{12}, \vec{OA}_{13}$  и  $\vec{OA}_{23}$  — проекции  $\vec{OA}$  на соответствующие плоскости. Так как направление и величина вектора  $\vec{OA}$  однозначно определены положением точки  $A$ , то ее координаты суть и координаты вектора  $\vec{OA}$ .

случай многомерных систем (при  $N = 2$ ) — интерпретировались нами в виде случайной точки на плоскости («поле корреляции» на рис. 3.11) и задавались списком из  $n$  пар значений  $x, y$ .

### 1.1.1. Разновидности многомерных систем

Среди всевозможных многомерных систем для психологических приложений важно выделить: 1) системы однородные и разнородные; 2) неслучайные и случайные функции случайных величин.

**Однородные** (гомогенные) системы образованы однородными случайными величинами. В любой отрасли психологии, осуществляя совместный анализ наличия или степени выраженности какой-либо психической переменной  $X$  у группы из  $N$  индивидов,  $n$ -кратно измеряют у каждого индивида проявление этой переменной. Тогда, если обозначить психическую переменную  $i$ -го индивида как  $X_i$ , получаем  $N$ -мерную однородную систему, которая

задана списком из  $N \cdot n$  значений  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$  и  $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11}, & x_{12}, & \dots, & x_{1i}, & \dots, & x_{1N}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \dots, & x_{2i}, & \dots, & x_{2N}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{j1}, & x_{j2}, & \dots, & x_{ji}, & \dots, & x_{jN}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \dots, & x_{ni}, & \dots, & x_{nN}. \end{array}$$

**Неоднородные** (гетерогенные) системы образованы случайными величинами, природа которых различна. Они имеют место при совместном изучении разных психических явлений как у отдельных индивидов, так и у популяции. Например, совокупность гипотетических черт личности представляет собой в указанном смысле гетерогенную систему случайных величин.

Разделение многомерных систем на однородные и неоднородные важно по двум обстоятельствам. Во-первых, для однородных систем имеют очевидный физический смысл операции суммирования отдельных величин, входящих в систему, тогда как для неоднородных систем эти операции очевидного смысла не имеют\*. В этой связи при создании и интерпретации многомерных психометрических шкал возникают известные трудности, преодолеваемые отчасти специальными приемами вроде нормализации по составу, рассмотренной выше, с отображением всех разнородных переменных в некоторую однородную, так что в результате неоднородная система отображается в эквивалентную однородную систему\*\*. Во-вторых, для однородных систем хорошо разработаны основы и приложения выборочного метода, тогда как для неоднородных систем выборочный метод развит недостаточно (см. главу 5).

Как и двумерные, многомерные системы могут быть образованы независимыми и зависимыми случайными величинами. Если отдельные случайные величины в многомерной системе зависят друг от друга (попарно и/или в совокупности), то рассмотрению подлежат неслучайные и случайные функции.

**Неслучайные функции** от случайных величин (случайных аргументов) называются *множественными регрессиями* (корреляционными уравнениями). Парные регрессии, рассмотренные выше, — это частный случай множественных регрессий. Наиболее распространены суммы и произведения случайных величин, а также их

\*Нельзя непосредственно складывать мужской пол и уровень интеллектуального развития.

\*\*Например, 11 разнородных психических переменных  $X_i$  в шкале Векслера (тип WAIS) отображаются в 11 однородных переменных  $Y_i$ , каждая из которых есть сумма баллов за выполнение  $i$ -го субтеста.



комбинации. Регрессии независимо от вида — это всегда детерминированные функции случайных аргументов (т.е. способ связи задан однозначно), поэтому их и называют неслучайными функциями от случайных величин

*Случайные функции* (в отличие от неслучайных) — это случайные способы связи случайных (или неслучайных) переменных\*. Случайной называется функция, которая в конкретном испытании принимает значение из множества возможных функций, заранее не известно, какое.

Для пояснения здесь уместно провести аналогию с определениями случайного события и случайной величины. Случайное событие в опыте принимает значение из множества исходов (непересекающихся классов). Случайная величина принимает апостериори значение из множества числовых значений (из области определения). Случайная функция в результате опыта реализуется в виде неслучайной функции из некоторого класса функций, причем априорное множество непересекающихся классов функций можно рассматривать как область определения случайной функции

Рассмотрим один из распространенных способов задания случайной функции в виде системы случайных величин. Пусть случайная функция  $f(X)$  реализуется в  $n$  испытаниях, как показано на рис. 4.2, в виде  $n$  реализаций  $f_j(X)$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$ . Тогда для каждого  $i$ -го значения аргумента  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) имеем случайную величину  $f_j(X_i)$ , заданную совокупностью значений случайной функции, соответствующих значению аргумента  $X_i$ . Рассматривая совместно  $N$  значений аргумента, получаем систему из  $N$  случайных величин

$$f_j(X_1), f_j(X_2), \dots, f_j(X_i), \dots, f_j(X_N),$$

каждая из которых принимает свои значения  $f_j(X_i)$  в  $j$ -м испытании. Можно видеть, что определенная таким путем случайная функция одного аргумента интерпретируется в виде однородной системы случайных величин. Неоднородная система должна рассматриваться как случайная функция  $N$  неоднородных аргументов. В общем виде изобразить такую функцию невозможно, так как ее реализации — это гиперповерхности, поэтому отметим лишь некоторые абстрактные представления такой функции.

Случайная функция произвольного, но конечного числа разнородных аргументов, очевидно, может рассматриваться как сово-

---

\*Отметим, что в теории случайных функций неслучайные функции случайных аргументов рассматривают как разновидность случайных функций. При этом, однако, имеют в виду второй смысл термина «функция» — зависимую переменную, которая всегда случайна, если случаен аргумент.

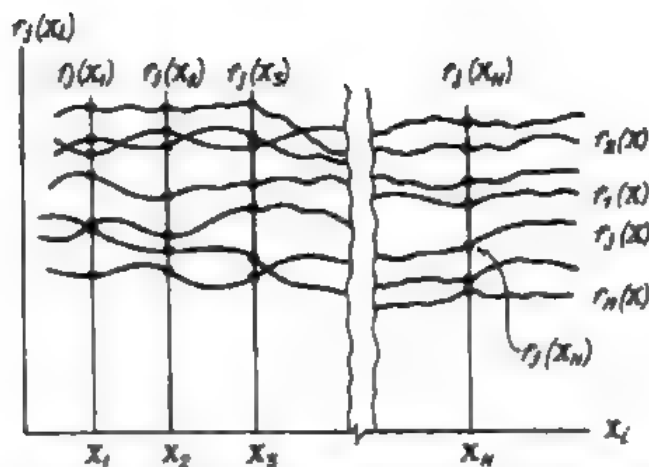


Рис. 4.2. Представление случайной функции в виде системы случайных величин.

$x_i$  — аргумент, заданный дискретными значениями ( $i = 1, 2, \dots, N$ );  $f_j(x_i)$  — значения случайной функции;  $f_j(x)$  — реализация случайной функции. Случайные величины образуются точками пересечения реализаций с перпендикуляром, восстановленным из  $x_i$ ;  $f_j(x_N)$  — значение  $N$ -й случайной величины.

купность однородных систем случайных величин (по одной системе для каждого аргумента, как на рис. 4.2). Такая совокупность есть система случайных функций и, следовательно, метасистема случайных величин.

К понятию метасистемы можно прийти и от понятия неоднородной многомерной системы. Действительно, неоднородную систему всегда можно представить как систему однородных систем. С другой стороны, любая совокупность неоднородных систем, рассматриваемых вместе, образует метасистему. Специалистам — психологам, педагогам, социологам, врачам и т. п. нетрудно понять, что совокупность психических свойств, состояний, а тем более функций, изучаемая на множестве индивидов, образует метасистему в рассмотренном смысле.

### 1.1.1. Распределения в многомерной системе

В многомерных системах существует большое разнообразие распределений. Полностью  $N$ -мерную систему в качественном и количественном отношении характеризует  $N$ -мерное совместное распределение вероятностей. Для него традиционно рассматривают интегральную функцию и функцию плотности вероятностей.

**Функция (интегральная)  $N$ -мерного совместного распределения** определяется вероятностями совместного выполнения неравенств

$$F(x_1 x_2 \dots x_N) = P[(X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \dots (X_N < x_N)].$$

**Плотность  $N$ -мерного распределения ( $N$ -мерная плотность)** выражает те доли совместных вероятностей, которые приходятся на произведения интервалов квантования случайных компонентов системы:

$$f(x_1 x_2 \dots x_N) = P_{jk \dots w} : \lambda_{1j} \cdot \lambda_{2k} \cdot \dots \cdot \lambda_{Nw},$$

где  $j = 1, 2, \dots, n_1, k = 1, 2, \dots, n_2, w = 1, 2, \dots, n_N$  — индексы интервалов квантования либо градаций отдельных величин в системе;  $P_{jk \dots w} = P[(x_{1j} \leq X_1 \leq x_{1j} + \lambda_{1j})(x_{2k} \leq X_2 \leq x_{2k} + \lambda_{2k}) \dots (x_{Nw} \leq X_N \leq x_{Nw} + \lambda_{Nw})]$ . Для дискретной многомерной случайной величины  $P_{jk \dots w} = P[(X_1 = x_{1j})(X_2 = x_{2k}) \dots (X_N = x_{Nw})]$  и понятие плотности не применяется.

Для психологической теории и практики наиболее важны  $N$ -мерные совместные вероятности  $P_{jk \dots w}$ , которые в совокупности образуют дифференциальную функцию  $N$ -мерного совместного распределения. Эта функция может быть получена эмпирическим путем и определяет остальные распределения в системе.

Полное  $N$ -мерное распределение частот результатов измерений или подсчета можно определить следующим образом:

$$\mathcal{F}(X_N) = \mathcal{F}(X_1 X_2 \dots X_N) = \{f_{jk \dots w}\}, \quad (4.1)$$

где индексы градаций или интервалов квантования отдельных величин по-прежнему изменяются от 1 до  $n_i$  ( $i$  — номер величины).

Всего поэтому имеется  $L = \prod_{i=1}^N n_i$  совместных градаций. Очевидно, что общее количество наблюдений (измерений) определяется суммой частот по всем переменным:

$$n = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \dots \sum_{w=1}^{n_N} f_{jk \dots w}. \quad (4.2)$$

Дифференциальная функция  $N$ -мерного совместного распределения вероятностей (частостей)

$$\mathcal{P}(X_N) = \mathcal{P}(X_1 X_2 \dots X_N) = \{P_{jk \dots w}\} \quad (4.3)$$

практически определяется из полного распределения частот (4.1), которое нормируется к единице общим количеством наблюдений (4.2):

$$\mathcal{P}(X_N) = \mathcal{F}(X) : n = \{f_{jk \dots w} : n\}.$$

Частные,  $N - K$ -мерные, распределения в  $N$ -мерной системе случайных величин аналогично распределениям событий можно классифицировать на *безусловные* — совместные и изолированные, и *условные* — совместно-условные, условно-совместные, совместно-совместно-условные и условные изолированные.

Частное *совместное*  $N - K$ -мерное распределение вероятностей определяется из полного суммированием по исключаемым величинам; например,

$$P(X_{N-K}) = \sum_{X_1} \sum_{X_2} \cdots \sum_{X_K} P(X_N), \quad (4.4)$$

где  $K = 1, 2, \dots, N - 1$ . Очевидно, что при  $K = N - 1$ , т. е. при суммировании совместных вероятностей по всем остальным, кроме одной, случайным величинам, определяются *изолированные* (одномерные) распределения компонентов системы.

*Совместно-условные* — это  $N - K$ -мерные совместные распределения, которые определены при условии конкретных значений одной из  $K$  величин в системе; например,

$$P(X_1 X_2 / x_{3j}), P(X_1 X_2 X_3 / x_{4k}) \text{ и т. д.}$$

Для всех выделенных градаций случайного условия такие распределения записываются в виде матриц совместно-условных распределений

$$P(X_1 X_2 / X_3) = [P(X_1 X_2 / x_{31}), P(X_1 X_2 / x_{32}), \dots, P(X_1 X_2 / x_{3m_3})].$$

*Условно-совместными* можно назвать распределения одной из величин, определяемые при условии совмещения каких-либо конкретных значений из  $N - K$  остальных величин в системе; например,

$$P(X_1 / x_{2j} x_{3k}), P(X_1 / x_{2j} x_{3k} x_{4l}) \text{ и т. д.}$$

Эти распределения также ассоциируются в матрицы условно-совместных распределений:

$$P(X_1 / X_2 X_3), P(X_1 / X_2 X_3 X_4) \text{ и т. д.}$$

*Совместно-совместно-условные* распределения имеют место, как это подчеркнуто названием, при совмещении значений одной части компонентов системы и при условии совмещения значений другой части компонентов; например,

$$P(X_1 X_2 / x_{3j} x_{4k} x_{5l}), P(X_3 X_4 X_5 / x_{1a} x_{2b}) \text{ и т. д.}$$

Из этих распределений тоже ассоциируются соответствующие матрицы

Наконец, *условные изолированные* распределения аналогичны рассмотренным в предыдущей главе: они определяются обычными

условными вероятностями значений одной из величин при условии конкретных значений другой какой-либо изолированной величины и ассоциируются в матрицы условных распределений вида (3.5).

Различные частные распределения связаны между собой и с полным распределением матричными уравнениями, которые аналогичны рассмотренным для случайных событий (1.24) и двумерных случайных величин (3.8 и 3.9), но гораздо более разнообразны. В частности, полное  $N$ -мерное распределение можно представить так.

$$\begin{aligned} P(X_1 X_2 \dots X_N) = \\ = \underbrace{P(X_1) \circ P(X_2/X_1) \circ P(X_3/X_1 X_2) \circ \dots \circ P(X_N/X_1 X_2 \dots X_{N-1})}_{P(X_1 X_2 X_3) \text{ и т. д.}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Матрицы условных распределений получают с помощью обратной (4.5) операции

$$\begin{aligned} P(X_2 X_3 \dots X_N/X_1) &= P(X_1 X_2 \dots X_N) \overset{\circ}{\circ} P(X_1), \\ P(X_3 X_4 \dots X_N/X_1 X_2) &= P(X_1 X_2 \dots X_N) \overset{\circ}{\circ} P(X_1 X_2), \\ &\dots \\ P(X_N/X_1 X_2 \dots X_{N-1}) &= P(X_1 X_2 \dots X_N) \overset{\circ}{\circ} P(X_1 X_2 \dots X_{N-1}). \end{aligned}$$

Условиями независимости случайных компонентов  $N$ -мерной системы по-прежнему служат равенства безусловных и «одноименных» условных распределений.

$$\begin{aligned} P(X_1) &= P(X_1/x_{2j}) = \dots = P(X_1/x_{2j} x_{3k} \dots x_{Nw}), \\ P(X_2) &= P(X_2/x_{1a}) = \dots = P(X_2/x_{1a} x_{3k} \dots x_{Nw}), \\ &\dots \\ P(X_N) &= P(X_N/x_{1a}) = \dots = P(X_N/x_{1a} x_{2j} \dots x_{N-1,w}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогичные равенства можно было бы написать для частных совместных безусловных и условных распределений, но они излишни, так как (4.6) суть достаточные условия стохастической независимости. Естественно, что для независимых компонентов уравнение (4.5) существенно упрощается:

$$P(X_1 X_2 \dots X_N) = P(X_1) \otimes P(X_2) \otimes \dots \otimes P(X_N). \quad (4.7)$$

Этим можно пользоваться для планирования эксперимента либо при отсутствии данных для эмпирического получения многомерных совмещенных распределений. Но следует помнить, что априорное допущение независимости компонентов многомерной случайной величины может сильно исказить образ реальности.

Многомерные распределения необходимо эмпирически получать и изучать для многих целей психологической науки и практики. Однако это весьма трудоемкая научно-исследовательская работа. Поэтому часто ограничиваются числовыми характеристиками

#### § 4. Числовые характеристики в многомерной системе

Числовыми характеристиками распределения в многомерной системе являются меры положения, рассеивания и связи.

В качестве мер положения используются средние арифметические значения, безусловные и условные. Безусловные средние —  $M_1, M_2, \dots, M_N$  — можно рассматривать как координаты «центра тяжести»  $N$ -мерной системы. Условные средние локализуют в  $N$ -мерном пространстве «центры тяжести»  $K$ -мерных подсистем.

В качестве мер рассеивания используются безусловные и условные дисперсии, а также стандартные отклонения.

В качестве мер связи наряду с уже рассмотренными мерами линейной и нелинейной парной корреляции используются меры парциальной (частной, групповой) и множественной корреляции.

Из перечисленных мер новизну представляют лишь меры связи, которые мы здесь и рассмотрим. В  $N$ -мерной системе, как указывалось, можно рассматривать любую часть  $K < N$  величин в связи с остальными  $N - K$ . Поэтому с точки зрения числа связанных между собой переменных выделяют связь частную (групповую, парциальную) и множественную. И та и другая могут, вообще говоря, быть линейными или нелинейными по форме, взаимными или односторонними по направленности.

Любая связь характеризуется мерами частной и множественной детерминации, но линейная взаимная связь — мерами частной и множественной корреляции. Принято говорить о степени (порядке) частной связи, которая в простейшем случае парной связи называется «нулевой». В качестве мер частной детерминации нулевого порядка используются уже рассмотренные  $\eta_{ij}^2$ , а в качестве мер частной корреляции нулевого порядка — ковариации и коэффициенты линейной корреляции Пирсона ( $r_{ij}$ ), вычисленные для всех сочетаний по два из  $N$  переменных (парные).

Сравнительная простота вычислений обуславливает преимущественное использование в психологических исследованиях именно ковариаций и парных коэффициентов линейной корреляции, хотя это может быть по существу и не обосновано\*. Совокупности пар-

---

\*Отметим, что в частном случае  $N$ -мерного нормального распределения линейные меры исчерпывающе характеризуют взаимосвязи.

ных ковариаций и коэффициентов корреляции объединяются в матрицы, которые и характеризуют частные взаимосвязи нулевого порядка в  $N$ -мерной системе.

Ковариационная матрица порядка  $N$  образуется значениями ковариаций и безусловных дисперсий, как показано в табл. 4.1. Нетрудно видеть, что ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, поэтому из общего числа  $N(N - 1)$  ковариаций только  $0,5N(N - 1)$  различных.

Таблица 4.1

Ковариационная матрица  $N$ -мерной системы случайных величин

	$X_1$	$X_2$		$X_i$		$X_N$
$X_1$	$D_1$	$COV_{12}$	..	$COV_{1i}$	..	$COV_{1N}$
$X_2$	$COV_{12}$	$D_2$	..	$COV_{2i}$	.	$COV_{2N}$
...	...	...	...	...	...	...
$X_i$	$COV_{1i}$	$COV_{2i}$	...	$D_i$	.	$COV_{iN}$
...	...	...	.	...	...	...
$X_N$	$COV_{1N}$	$COV_{2N}$		$COV_{iN}$	...	$D_N$

Примечание.  $COV_{ii} = D_i$ . Так как  $COV_{ji} = COV_{ij}$ , то порядок индексации одинаков во всей матрице.

Корреляционная матрица образуется путем нормирования ковариационной матрицы парными произведениями стандартных отклонений. В результате по главной диагонали располагаются единицы, а остальные элементы — коэффициенты линейной корреляции Пирсона (табл. 4.2).

$$r_{ij} = \frac{COV_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

где  $COV_{ij}$  — ковариация  $i$ -й и  $j$ -й переменных,  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  — безусловные стандартные отклонения\*.

Таблица 4.2

Корреляционная матрица  $N$ -мерной системы случайных величин

	$X_1$	$X_2$		$X_i$		$X_N$
$X_1$	1	$r_{12}$	...	$r_{1i}$	...	$r_{1N}$
$X_2$	$r_{12}$	1	..	$r_{2i}$	...	$r_{2N}$
...	..	...	...	.	.	...
$X_i$	$r_{1i}$	$r_{2i}$		1	.	$r_{iN}$
...	...	...		...	...	...
$X_N$	$r_{1N}$	$r_{2N}$	.	$r_{iN}$	.	1

\*Корреляционная матрица в психологических исследованиях иногда именуется таблицей интеркорреляций

Корреляционная матрица в прикладных исследованиях обычно интерпретируется геометрически либо в виде графа (в корреляционном анализе), либо в виде конфигурации векторов (в факторном анализе, см. главу 7).

*Корреляционным графом* назовем совокупность из  $N$  вершин, обозначающих переменные и соединенных попарно линиями (ребрами), обозначающими факт корреляции между парами переменных  $ij$  ( $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$ , но  $i \neq j$ ). Так, для трех случайных величин корреляционный граф изображен на рис. 4.3. Сверху (или снизу) ребра надписывается значение  $r_{ij}$ . Разновидностью корреляционных графов являются *корреляционные плеяды\**, в которых длина ребер выбирается пропорциональной  $\frac{1}{r_{ij}}$ , положительная связь отображается сплошной, а отрицательная — пунктирной линией. Имеются и другие способы изображения  $r_{ij}$  на ребрах корреляционного графа. Здесь необходимо отметить, что коэффициент корреляции  $r_{ij}$  отображает лишь факт совместной изменчивости  $i$ -й и  $j$ -й переменных. Это значит, что при  $|r_{ij}| > 0$  либо сами переменные  $ij$  находятся в причинно-следственной взаимной связи, либо они причинно обусловлены некоторой другой переменной, входящей или не входящей в рассматриваемую систему. Следовательно, ребра корреляционного графа можно лишь гипотетически трактовать в содержательном, а не в формальном смысле.

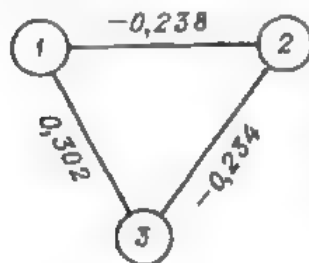


Рис. 4.3 Корреляционный граф к примеру 4.1. Вершины обозначают: 1 — социометрический статус в группе; 2 — нейротизм, 3 — эмоциональную экспансивность. Ребра обозначают корреляционную взаимосвязь (значения парных коэффициентов корреляции — из табл. 4.7).

Коэффициенты линейной частной корреляции первого порядка вычисляются через коэффициенты нулевого порядка и характеризуют взаимосвязь между парами переменных при условии, что третья переменная приняла фиксированное значение:

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}, \quad (4.8)$$

где  $r_{ij.k}$  — коэффициент частной корреляции первого порядка,

\*Терентьев П. В. Метод корреляционных плеяд // Вестн. Ленингр. ун-та. 1959. № 9.



характеризующий линейную взаимосвязь  $i$ -й и  $j$ -й случайных величин, при элиминировании влияния  $k$ -й величины (индекс элиминируемой переменной отделяется точкой);  $r_{ij}, r_{ik}, r_{jk}$  — коэффициенты нулевого порядка;  $i \neq j \neq k$  — номера переменных в системе, принимающие значения от 1 до  $N$ . Вообще коэффициенты частной корреляции  $h$ -го порядка вычисляются по формулам, аналогичным (4.8), через коэффициенты частной корреляции  $h-1$ -го порядка. Например,

$$r_{12 \dots 34 \dots N} = \frac{r_{12 \dots 34 \dots (N-1)} - r_{1N \dots 34 \dots (N-1)} \cdot r_{2N \dots 34 \dots (N-1)}}{\sqrt{(1 - r_{1N \dots 34 \dots (N-1)}^2)(1 - r_{2N \dots 34 \dots (N-1)}^2)}}. \quad (4.9)$$

Универсальной мерой тесноты множественной связи является коэффициент множественной детерминации случайной величины  $X_i$  остальными  $N-1$  случайными величинами многомерной системы:

$$\eta_{i \dots 23 \dots N}^2 = \frac{D_\Phi}{D[X_i]} = 1 - \frac{D_0}{D[X_i]}, \quad (4.10)$$

где  $D_\Phi$  — доля дисперсии  $D[X_i]$ , обусловленная изменениями условного среднего арифметического значения  $M[X_i]$  под влиянием остальных  $N-1$  переменных,  $D_0$  — доля дисперсии  $D[X_i]$ , обусловленная неучитываемыми в исследовании факторами.

Остаточную дисперсию вычислять проще, чем факторную. Остаточная дисперсия для линейной корреляции может быть выражена следующим образом:

$$D_0 = D_{i \dots 23 \dots N} = D_i(1 - r_{i2}^2)(1 - r_{i3 \dots 2}^2) \dots (1 - r_{iN \dots 23 \dots (N-1)}^2), \quad (4.11)$$

где  $D_{i \dots 23 \dots N}$  — остаточная дисперсия  $i$ -й случайной переменной, рассматриваемой в зависимости от остальных  $N-1$  величин;  $D_i$  — безусловная дисперсия  $i$ -й величины;  $r_{i2}^2, r_{i3 \dots 2}^2, \dots, r_{iN \dots 23 \dots (N-1)}^2$  — квадраты коэффициентов частной корреляции возрастающего порядка.

Подставляя (4.11) в (4.10) и обозначая  $R_{i \dots 23 \dots N}^2$  коэффициент линейной детерминации, получим

$$R_{i \dots 23 \dots N}^2 = 1 - (1 - r_{i2}^2)(1 - r_{i3 \dots 2}^2) \dots (1 - r_{iN \dots 23 \dots (N-1)}^2). \quad (4.12)$$

Величина  $R_{i \dots 23 \dots N} = \sqrt{R_{i \dots 23 \dots N}^2}$  называется коэффициентом множественной корреляции, который и характеризует степень линейной взаимосвязи  $i$ -й случайной величины с остальными  $N-1$  величинами в системе. Величины  $R_{i \dots 23 \dots N}$  зависят от степени тесноты взаимосвязи, от количества переменных в системе и от степени близости анализируемых связей к линейным. В этой связи важно подчеркнуть, что, во-первых, всегда

$$R_{i \dots 23 \dots N} \geq r_{ij},$$

где  $r_{ij}$  — наибольший из парных коэффициентов корреляции, а во-вторых, низкая величина  $R_{i, 23 \dots N}$  может свидетельствовать лишь об отсутствии линейной связи. Остаточную дисперсию и связанные с ней меры  $\eta_{i, 23 \dots N}^2$  и  $R_{i, 23 \dots N}^2$  можно определить и другими способами, которые будут рассмотрены ниже.

По аналогии с двумерной системой можно ввести понятие коэффициента множественной индетерминации

$$\bar{R}_{i, 23 \dots N}^2 = 1 - R_{i, 23 \dots N}^2,$$

который служит мерой необусловленности  $i$ -й случайной переменной в системе остальными  $N - 1$  переменными и, следовательно, может характеризовать изменчивость  $i$ -й переменной как обусловленную неконтролируемыми факторами (не включенными в систему). Очевидно, что мерой множественной корреляции может служить коэффициент

$$\bar{R}_{i, 23 \dots N} = \sqrt{1 - R_{i, 23 \dots N}^2}. \quad (4.13)$$

Меры множественной корреляции, рассматриваемые традиционно, в сущности не характеризуют  $N$ -мерную систему в целом. Фактически  $N$ -мерная система расчленяется на  $N$  таких подсистем, в каждой из которых  $i$ -я случайная переменная рассматривается как зависящая от  $N - 1$  остальных случайных аргументов (см. § 4.2). Такие подсистемы по отдельности и характеризуются мерами множественной связи. Таким образом,  $N$ -мерная система с точки зрения наличия в ней отдельных множественных связей характеризуется совокупностью в  $N$  мер. Однако возникает правомерный вопрос о том, нельзя ли иметь одну меру, характеризующую  $N$ -мерную систему в целом с точки зрения ее стохастической связности.

Согласно общему определению стохастической независимости и зависимости величин, образующих  $N$ -мерную систему (4.7) и (4.6), можно рассматривать стохастическую связность системы как степень отличия всех вероятностей  $P_{jk \dots m}$ , фактически наблюдаемых, от вероятностей  $P_{jk \dots m}^*$ , теоретически ожидаемых в предположении о независимости величин (4.7). Тогда в качестве меры стохастической связности системы можно использовать коэффициент сопряженности Чупрова (1.32), видоизменяя его следующим образом:

$$K_N = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \dots \sum_{m=1}^{n_N} \frac{(P_{jk \dots m} - P_{jk \dots m}^*)^2}{P_{jk \dots m}^*}}{\sqrt{L + 2 - i - g}}}, \quad (4.14)$$

где  $K_N$  — коэффициент связности  $N$ -мерной системы; в числителе под радикалом записана величина отношения  $\chi^2$  к числу наблюдений:  $\frac{\chi^2}{\sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^g \sum_{m=1}^N 1}$ , определенному после группировки данных;  $L$  — общее число пересечений интервалов квантования переменных ( $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_N$ );  $t$  и  $g$  — соответственно число строк и столбцов в группировочной таблице (см., напр., табл. 4.4), так что  $t \cdot g = L$ . Для конкретной системы, заданной в табличной форме,  $t$  и  $g$  можно определить численно, и тогда формула (4.14) упрощается

$$K_N = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^t \sum_{k=1}^g \frac{(P_{r,k} - P_{r,k}^* - P_{r,k}^* - P_{r,k}^*)^2}{P_{r,k}^*}}{\sqrt{(t-1)(g-1)}}}, \quad (4.15)$$

где  $r = 1, 2, \dots, t$  — номера строк и  $k = 1, 2, \dots, g$  — номера столбцов группировочной таблицы, присваиваемые вне всякой связи со значениями уровней квантования переменных.

Величина  $K_N^2$  может быть названа *коэффициентом совместной детерминации*, в отличие от коэффициентов множественной детерминации вида  $\eta_{i, 23 \dots N}^2$ . Поскольку стохастическая связь не исчерпывается корреляцией, всегда справедливо

$$K_N^2 \geq \eta_{i, 23 \dots N}^2,$$

где  $\eta_{i, 23 \dots N}^2$  — наибольший из всех коэффициентов множественной детерминации

## 4.1. НЕСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

### 4.1.1 Числовые характеристики суммы и произведения случайных величин

В общем виде неслучайная функция от  $N$  случайных аргументов записывается так:

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_N),$$

где  $\varphi$  — некоторая линейная или нелинейная функция, чаще всего это простая сумма

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i, \quad (4.16a)$$

или (линейное) уравнение гиперплоскости

$$Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i + a_0, \quad (4.16b)$$

или нелинейное уравнение гиперповерхности, в которое аргументами входят еще произведения случайных величин по два, по три, по  $N$ , а иногда и степени отдельных величин. Однако так как вторые и тем более высшие степени трудно истолковывать, а число произведений переменных быстро увеличивается при увеличении  $N$ , то стремятся использовать суммы (4.16а) и (4.16б).

Среднее арифметическое суммы случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_N$  равно сумме средних арифметических от слагаемых:

$$M \left[ \sum_{i=1}^N X_i \right] = \sum_{i=1}^N M[X_i], \quad (4.17)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — номера слагаемых.

Дисперсия суммы случайных величин равна сумме всех элементов ковариационной матрицы:

$$D \left[ \sum_{i=1}^N X_i \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{COV}_{ij}, \quad (4.18)$$

где  $\text{COV}_{ij}$  — парные ковариации,  $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$ . Так как  $\text{COV}_{ij} = D_i$  и для независимых случайных величин все  $\text{COV}_{ij} = 0$  при  $j \neq i$ , то в частном случае независимых слагаемых имеем

$$D \left[ \sum_{i=1}^N X_i \right] = \sum_{i=1}^N D[X_i]. \quad (4.19)$$

Если величины  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , образующие метасистему, сами являются суммами некоторых величин, то суммирование дисперсий сводится к суммированию ковариационных матриц. При этом для независимых  $X_1, X_2, \dots, X_N$  ковариационная матрица суммы равна сумме ковариационных матриц слагаемых.

Для независимых случайных величин среднее арифметическое произведения  $N$  случайных величин равно произведению средних арифметических от слагаемых:

$$M \left[ \prod_{i=1}^N X_i \right] = \prod_{i=1}^N M[X_i], \quad (4.20)$$

в частном случае

$$M[aX] = aM[X], \quad (4.21)$$

где  $a$  — константа.

Для центрированных величин\*, независимых в совокупности, дисперсия произведения равна произведению дисперсий сомножителей:

$$D \left[ \prod_{i=1}^N \overset{0}{X}_i \right] = \prod_{i=1}^N D \left[ \overset{0}{X}_i \right],$$

где  $\overset{0}{X}_i$  — центрированные величины. В частном случае

$$D \left[ \lambda \overset{0}{X} \right] = \lambda^2 D \left[ \overset{0}{X} \right],$$

а также

$$D \left[ \lambda_X \overset{0}{X} \lambda_Y \overset{0}{Y} \right] = \lambda_X \lambda_Y D \left[ \overset{0}{X} \overset{0}{Y} \right],$$

чем мы пользовались в предыдущей главе при определении числовых характеристик двумерной системы.

Простая сумма вида (4.16а) распределений независимых случайных аргументов называется *композицией* (сверткой). Композиция легко определяется не для любых, а лишь для устойчивых законов распределения — закона Лапласа — Гаусса и гамма-распределения\*\*.

Для нормального закона справедливо: если

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{и} \quad f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x_i - M(x_i)]^2}{2\sigma_i^2} \right\},$$

то

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[y - \sum_{i=1}^N M(x_i)]^2}{2 \sum_{i=1}^N \sigma_i^2} \right\}.$$

На композиции нормального закона основаны многие психометрические шкалы. В частности, в шкале Векслера для взрослых сумма шкальных оценок субтеста — это композиция нормализованных предварительных оценок, а сумма шкальных оценок по группе вербальных (или невербальных) тестов — это композиция нормально распределенных шкальных оценок субтестов.

\*Случайная величина называется центрированной, если задана центральными отклонениями:  $x_i - M[x_i]$ .

\*\*Композиция гамма-распределенных случайных величин тоже имеет гамма-распределение.

Для гамма-распределения аналогично справедливо: если

$$T = \sum_{i=1}^N t_i \quad \text{и} \quad f(t_i) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t_i^{\alpha-1} \exp(-\beta t_i),$$

то

$$f(T) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} T^{\alpha-1} \exp(-\beta T),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^N D(t_i)} \left[ \sum_{i=1}^N M(t_i) \right]^2, \quad (4.22)$$

$$\beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^N D(t_i)} \sum_{i=1}^N M(t_i).$$

Очевидно, что для экспоненциального распределения как частного случая гамма-распределения при  $\alpha = 1$  мы можем записать:

$$f(T) = \beta \exp(-\beta T),$$

где  $\beta$  определено уравнением (4.22). Композиция гамма-распределения позволяет оценивать распределение затрат времени на какие-либо действия, расчленяемые на последовательно выполняемые простые операции.

Закон распределения линейной функции вида (4.166) от нормально распределенных зависимых случайных аргументов имеет основное применение для многомерных психометрических шкал. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_N$  — случайные величины с плотностями

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x_i - M(x_i)]^2}{2\sigma_i^2} \right\},$$

и пусть

$$Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i + a_0.$$

Тогда

$$f(y) = \frac{1}{\sigma[Y]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\left[ y - \left( \sum_{i=1}^N a_i M(x_i) + a_0 \right) \right]^2}{2D[Y]} \right\}, \quad (4.23)$$

где

$$D[Y] = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_i a_j \text{COV}_{ij},$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$\text{COV}_{ij}$  для всех  $i$ , включая  $i = j$ , элементы ковариационной матрицы слагаемых;  $\sigma[Y] = \sqrt{D[Y]}$ . По формуле (4.23) оцениваются, в частности, спортивные достижения в международных соревнованиях.

Частным случаем (4.23) является закон нормального распределения суммы вида

$$Y = a \sum_{i=1}^N X_i + b,$$

плотность которой

$$f(y) = \frac{1}{\sigma[Y]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\left[ y - a \sum_{i=1}^N M(x_i) + b \right]^2}{2D[Y]} \right\},$$

где

$$D[Y] = a^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \text{COV}_{ij},$$

для всех  $i$  и  $j$ . Такому распределению соответствуют оценки общего, вербального и невербального интеллекта в упомянутой шкале Векслера для взрослых. Например, общий коэффициент интеллектуального развития взрослых

$$IQ_0 = 0,6 \sum_{i=1}^N X_i + b,$$

где  $X_i$  — шкальная оценка за выполнение одного из  $N$  субтестов шкалы;  $b$  — свободный член, параболически зависящий от возраста человека.

Во многих практических случаях, лишь предполагая нормальную распределенность аргументов, пользуются не самим распределением линейной функции  $N$  аргументов, а его моментами — средними арифметическими, дисперсиями, ковариациями и коэффициентами корреляции, взаимосвязанными в так называемом корреляционном уравнении (регрессии).

### 1.1.1. Множественные линейные регрессии

Как и для двух случайных величин, в  $N$ -мерной системе функции, связывающая любые  $K$  случайных величин ( $K = 2, 3, \dots, N$ ), называется регрессией. Принято выделять простую, частную, чистую и множественную регрессии. Простая (парная) регрессия связывает условные средние арифметические значения  $i$ -й случайной величины со значениями  $j$ -й случайной величины при

всех наблюдавшихся значениях остальных  $N - 2$  случайных величин в системе. Частная регрессия связывает условные средние арифметические значения  $i$ -й случайной величины со значениями  $K$  ( $K = 2, 3, \dots, N - 1$ ) других случайных величин при каких-то определенных (фиксированных) значениях остальных  $N - K$  случайных величин. Чистая регрессия — это разновидность частной регрессии для условий, когда остальные  $N - K$  случайных аргументов фиксированы на среднем уровне. Множественная регрессия связывает условные средние арифметические значения одной из случайных величин со значениями всех остальных  $N - 1$  случайных величин. Зная уравнение множественной регрессии, можно из него получить уравнение чистой регрессии. Именно эти разновидности чаще всего и используются в психологической практике.

По форме все перечисленные регрессии могут быть линейными или нелинейными. Из-за сравнительной простоты математического аппарата наибольший практический интерес для психолога представляют линейные регрессии\*. В общем виде уравнение линейной множественной регрессии  $i$ -й переменной в развернутой форме записывается так:

$$x_{i, 23 \dots N} = a_{0i, 23 \dots N} + a_{i, 2, 3 \dots N} x_2 + \\ + a_{i, 3, 2 \dots N} x_3 + \dots + a_{i, N, 23 \dots N-1} x_N, \quad (4.24a)$$

где  $x_{i, 23 \dots N}$  — условное среднее значение случайной величины  $X_i$ , соответствующее значениям  $x_2, x_3, \dots, x_N$ , принимаемым остальными случайными величинами;  $a_{i, 2, 3 \dots N}, a_{i, 3, 2 \dots N}, a_{i, N, 23 \dots N-1}$  — коэффициенты регрессии, смысл которых рассмотрим несколько ниже;  $a_{0i, 23 \dots N}$  — свободный член, показывающий, чему равен  $x_{i, 23 \dots N}$ , если все аргументы равны нулю. В сокращенной форме уравнение (4.24a) будем записывать так:

$$x_i = \sum_{j=2, 3 \dots N}^{N-1} a_{ij} x_j + a_{0i}. \quad (4.24б)$$

Коэффициент регрессии  $a_{ij}$  показывает парциальное (частное) влияние  $j$ -го случайного аргумента на  $i$ -ю случайную величину, рассматриваемую в качестве зависимой переменной. При этом влияние остальных  $N - 2$  случайных аргументов считается устра-

\*Это, конечно, не означает, что нелинейные регрессии не должны применяться. Во многих случаях, когда требуется выявить точный теоретический закон, именно нелинейные регрессии могут оказаться единственно подходящими для математической формулировки искомого закона. Но в начале исследования обычно достаточны линейные приближения. Кроме того, можно прийти к линейной регрессии, линеаризуя переменные.



ненным\*. Например, коэффициент  $a_{12-34}$  показывает степень влияния случайной величины  $X_2$  на случайную величину  $X_1$  при устранении влияния  $X_3$  и  $X_4$ .

Математический смысл коэффициента  $a_{ij}$  для множественной регрессии тот же, что и для парной (простой регрессии), — это угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона проекции условных средних  $\bar{x}_i$   $i=2, \dots, N$  на плоскость  $X_i O X_j$ . Однако содержательная физическая интерпретация  $a_{ij}$  как «веса» или меры вхождения  $j$ -й переменной в  $i$ -ю в буквальном смысле допустима только для однородных систем. Например, если все  $X_j$  — это баллы, набранные индивидом за выполнение  $N-1$  заданий, а  $X_i$  — это сумма баллов, характеризующая общую успешность его достижений, то  $a_{ij}$  могут выражать степень трудности или важности заданий, или оригинальности исполнения и т. п.

Иным является смысл коэффициента регрессии  $a_{ij}$ , если переменные  $i$  и  $j$  неоднородны. Здесь  $a_{ij}$  есть мера направленного влияния  $j$ -й на  $i$ -ю переменную, причем влияние понимается как стохастическая связь, в частном случае — как корреляция. При этом сами связанные величины могут быть количественными, количественными и качественными или только качественными — во всех случаях абсолютная величина  $|a_{ij}|$  характеризует степень (силу) одностороннего влияния  $j$ -й на  $i$ -ю переменную, а знак (плюс или минус) — направление влияния (положительное или отрицательное, соответственно, как это было показано для двух случайных величин).

Рассмотрим геометрическую интерпретацию  $N$ -мерной системы в регрессионном аспекте.

Регрессионным подграфом  $i$ -й случайной величины ( $i$ -м регрессионным подграфом) будем называть совокупность из  $N$  вершин, обозначающих случайные величины, из которых каждая  $j$ -я соединена с  $i$ -й ( $j \neq i$ ) стрелкой (дугой), обозначающей парциальное влияние  $j$ -й случайной величины на  $i$ -ю; кроме того, пусть в  $i$ -ю вершину «входит» дуга извне, что обозначает обусловленность  $i$ -й переменной внешними, не рассматриваемыми в данной системе факторами (все множество таких факторов можно трактовать как  $N+1$ -ю вершину  $i$ -го регрессионного подграфа). Над или под дугами внутри системы (таких дуг  $N-1$ ) записываются значения коэффициентов  $i$ -й множественной регрессии. Около дуг, входящих в вершины извне (их  $N$  по числу вершин), надпи-

\*На самом деле это не так, и коэффициенты  $a_{12}$  и  $a_{13}$  в уравнении множественной регрессии  $\bar{x}_1 = a_{01} + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3$  не равны, хотя и близки по величине аналогичным коэффициентам в уравнениях парных регрессий  $\bar{x}_1 = a_{01} + a_{12}\bar{x}_2$  и  $\bar{x}_1 = a_{01} + a_{13}\bar{x}_3$ .

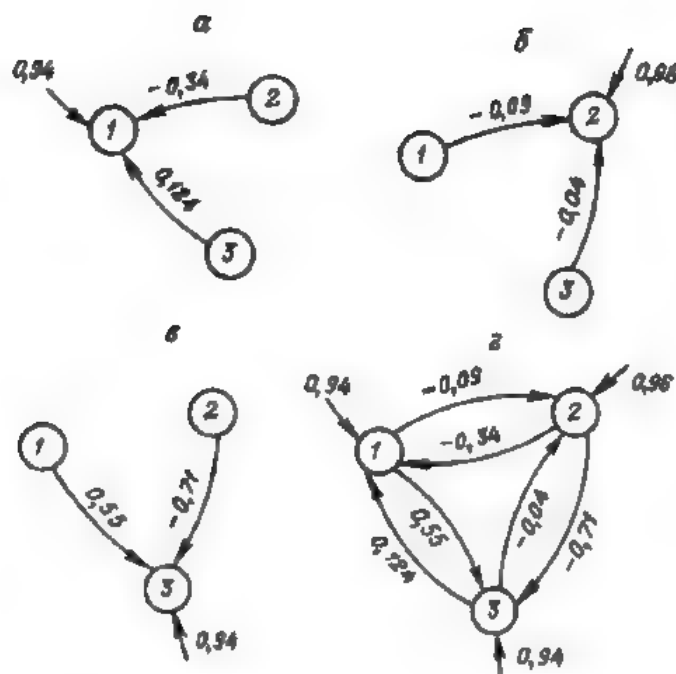


Рис. 4.4. Представление множественных регрессий на графах.  
а, б и в — регрессионные подграфы социометрического статуса (1),  
нейротизма (2) и эмоциональной экспансивности (3) соответственно;  
г — регрессионный граф системы этих переменных.

связываются коэффициенты множественной индетерминации  $\bar{R}_{i \ 23 \ N}^2$ , характеризующие влияние внешней среды на каждую  $i$ -ю переменную. Регрессионные подграфы для случая трех переменных представлены на рис. 4.4, а, б, в. В  $N$ -мерной системе, очевидно, имеется  $N$   $i$ -х регрессионных подграфов, каждый из которых можно рассматривать как некоторое событие  $A_i$ . Тогда систему в целом можно рассматривать как сумму совместных событий  $A_i$ .

Регрессионным графом системы будем называть граф, полученный объединением всех регрессионных подграфов (рис. 4.4, г). Регрессионному графу соответствует несимметричная квадратная матрица порядка  $N$ , внедиагональными элементами которой являются коэффициенты множественной регрессии  $a_{ij}$ , а диагональные элементы — это коэффициенты акорреляции  $\bar{R}_{i \ 23 \ N}$  (см. табл. 4.8). По сравнению с корреляционным регрессионный граф

дает более обширную информацию об изучаемой системе, так как «расщепляет» взаимосвязи между переменными до направленных связей, характеризуемых различной силой влияния.

Как и для простой, для множественной регрессии угловые коэффициенты можно выразить в стандартной форме (в масштабе стандартных отклонений), нормируя соответствующие коэффициенты частной корреляции отношением стандартных отклонений. В общем виде имеем

$$a_{ij} = r_{ij, 23 \dots N} \frac{\sigma_{i, 23 \dots N}}{\sigma_{j, 23 \dots N}}, \quad (4.25)$$

где  $r_{ij, 23 \dots N}$  — коэффициенты частной корреляции  $h$ -го порядка, определенные выше формулой (4.9);  $\sigma_{i, 23 \dots N}$  и  $\sigma_{j, 23 \dots N}$  — условные стандартные отклонения  $i$ -й и  $j$ -й случайных величин соответственно; эти отклонения получаются из дисперсий, определяемых по формуле (4.11), извлечением корня квадратного

Коэффициенты множественной регрессии можно представить иным образом:

$$a_{ij} = \beta_{ij} \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \quad (4.26)$$

при

$$\beta_{ij} = r_{ij, 23 \dots N} \frac{\sigma_j \sigma_{i, 23 \dots N}}{\sigma_i \sigma_{j, 23 \dots N}}, \quad (4.27)$$

где  $\beta_{ij}$  — стандартизированные коэффициенты регрессии (так называемые  $\beta$ -коэффициенты);  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  — безусловные стандартные отклонения  $i$ -й и  $j$ -й случайных величин. Замена коэффициентов линейной множественной регрессии  $\beta$ -коэффициентами означает в сущности переход от самих величин  $X_j$  к их основным отклонениям:

$$x_j'' = \frac{x_j - M(X_j)}{\sigma_j}, j = 1, 2, \dots, N,$$

в результате чего уравнение множественной регрессии вместо вида (4.24а,б) приобретает вид

$$x_{i, 23 \dots N}'' = \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{ij} x_j'', \quad (4.28)$$

где свободный член  $a_0$  отсутствует. Коэффициенты  $\beta_{ij}$  показывают, на какую долю своего стандартного отклонения  $\sigma_i$  изменится  $i$ -я случайная переменная, если влияющая на нее  $j$ -я переменная изменится на  $\sigma_j$ , а все остальные аргументы не изменятся.

В качестве примера интерпретации множественной регрессии вида (4.28) приведем одно из так называемых уравнений «успеш-

ности», полученное Р. Кеттелом\* в результате исследований американских школьников (мальчиков и девочек в возрасте около 12 лет):

$$X_1 = 0,2X_2 + 0,5X_3 + 0,3X_4 - 0,2X_5 - 0,2X_6 + \\ + 0,4X_7 + 0,2X_8 - 0,2X_9 - 0,2X_{10} + 0,3X_{11} - 0,1X_{12},$$

где  $X_1$  — школьные достижения в английском языке и арифметике;  $X_2 \div X_{12}$  — полярно характеризующие свойства личности школьников:  $X_2$  — аффе́ктотимия — шизотимия;  $X_3$  — интеллектуальность — неинтеллектуальность;  $X_4$  — сила «я» — общая эмоциональность;  $X_5$  — возбужденность — неуверенность;  $X_6$  — беспечность — озабоченность;  $X_7$  — совестливость (сила — слабость «сверх-я»);  $X_8$  — смелость — робость;  $X_9$  — мягкость — жесткость;  $X_{10}$  — мечтательность — практичность;  $X_{11}$  — самолюбие и самоконтроль;  $X_{12}$  — напряженность потребностей — расслабленность. Очевидно, что при  $\alpha_{ij} \equiv 0$  или, что то же самое,  $\beta_{ij} = 0$  линейное влияние  $X_j$  на условные средние значения  $X_i$  отсутствует, т. е. эти переменные некоррелированы (это не означает отсутствия других видов стохастической связи).

При изучении многомерной системы перед исследователем обычно могут возникнуть три задачи, различающиеся по степени проникновения в структуру связей переменных.

*Первая задача* состоит в том, чтобы установить факты связей и их направление. Решению этой задачи служит регрессионный анализ, который заключается в определении коэффициентов регрессии и анализе их статистической достоверности. Развитием методов регрессионного анализа является дисперсионный анализ (глава 6).

*Вторая задача* состоит в том, чтобы выявить факты парных взаимосвязей в системе и установить их достоверность. Решается эта задача вычислением ковариационной и интеркорреляционной матриц с их последующим анализом.

*Третья задача* состоит в том, чтобы вскрыть глубинные групповые взаимосвязи (по три, по четыре и т. д. — по  $N$ ) между перечисленными в системе. Решению этой задачи служит вычисление коэффициентов частной и множественной корреляции с последующим исследованием их статистической достоверности путем корреляционного анализа. Разновидностью корреляционного анализа является способ корреляционных плеяд\*. Углублением и развитием идей корреляционного анализа является факторный анализ (глава 7).

\*Cattell R. B. The Scientific Analysis of Personality. Chicago, 1966. P. 310-312.

\*Терентьев П. В. Метод корреляционных плеяд // Вестн. Ленингр. ун-та. 1959. № 9.

Основные идеи и методы регрессионного и корреляционного анализа мы рассмотрим в главе 6. Здесь же изложим в общем виде процедуры определения необходимых числовых характеристик, которые далее подкрепим примером.

В соответствии с тремя задачами можно вести исследование многомерной системы тремя способами.

Первый способ сводится к вычислению непосредственно коэффициентов множественной регрессии по методу наименьших квадратов. Так как множественную регрессию можно построить для любой из  $N$  случайных величин, считая ее зависимой от остальных, то всего необходимо получить  $N$  уравнений:

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{01} + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N, \\x_2 &= a_{02} + a_{21}x_1 + \dots + a_{2N}x_N, \\&\dots \dots \dots \\x_N &= a_{0N} + a_{N1}x_1 + \dots + a_{NN-1}x_{N-1},\end{aligned}$$

в которых все коэффициенты  $a_{ij}$  и свободные члены  $a_{0i}$  могут быть различны как по значениям, так и по знакам. Чтобы найти неизвестные коэффициенты  $a_{ij}$  и  $a_{0i}$  для каждой  $i$ -й множественной регрессии, необходимо построить и решить систему из  $N$  нормальных уравнений.

В общем виде процедура получения системы нормальных уравнений включает в себя две операции, повторяющиеся последовательно  $N$  раз ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Тогда  $j$ -е нормальное уравнение получается:

1) умножением исходного уравнения  $i$ -й множественной регрессии

$$x_i = a_{0i} + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N$$

на  $x_j$  почленно

$$x_i x_j = a_{0i} x_j + a_{i2} x_2 x_j + \dots + a_{iN} x_N x_j, \quad (4.29)$$

причем при  $j = i$  полагают  $x_j \equiv 1$ ;

2) суммированием результатов (4.29) почленно:

$$\sum_{r=1}^n x_i x_j = a_{0i} \sum_{r=1}^n x_j + a_{i2} \sum_{r=1}^n x_2 x_j + \dots + a_{iN} \sum_{r=1}^n x_N x_j,$$

где  $n$  — число наблюдавшихся (группами по  $N$ ) значений случайных переменных;  $r = 1, 2, \dots, n$  — индекс наблюдения; при  $j = i$ , очевидно,  $\sum_{r=1}^n a_{0i} = n a_{0i}$ .

В итоге получается метасистема из  $N^2$  уравнений, решая которые можно определить все искомые коэффициенты и свободные члены множественных регрессий. Нетрудно понять, что уже при  $N = 4$  приходится решать 16 уравнений, значит, для исследования многомерных систем полезно применять компьютер.

Второй способ заключается в том, что первоначально вычисляется корреляционная матрица. Затем с помощью  $r_{ij}$  строятся  $N$  систем нормальных уравнений в  $\beta_{ij}$ -коэффициентах (всего для  $i$ -й множественной регрессии —  $N-1$  нормальное уравнение)\*, решением которых определяются все  $\beta_{ij}$ . Чтобы от стандартного перейти к натуральному масштабу, по формуле (4.26) надо вычислить все  $a_{ij}$ . Свободные члены не определяются через  $\beta$ -коэффициенты непосредственно. Поэтому дополнительно составляют  $N$  уравнений вида

$$a_{0i} = \bar{x}_i - \sum_{j \neq i}^{N-1} a_{ij} \bar{x}_j, \quad (4.30)$$

где  $\bar{x}_i$  и  $\bar{x}_j$  — безусловные средние арифметические случайных величин

Третий способ — это вариант второго способа, дополненный вычислением по формуле (4.9) коэффициентов частной корреляции первого и более высоких порядков. После этого по формуле (4.27) вычисляют  $\beta_{ij}$ -коэффициенты или непосредственно по формуле (4.25) —  $a_{ij}$ -коэффициенты и по (4.30) — свободные члены.

Отметим в заключение, что коэффициент множественной корреляции  $R_{i \text{ зз. } N}$  вычисляется при исследовании  $N$ -мерной системы по второму и третьему способу либо по формуле (4.12), либо через  $\beta_{ij}$ -коэффициенты — по формуле

$$R_{i \text{ зз. } N} = \sqrt{\sum_{j \neq i}^{N-1} r_{ij} \beta_{ij}}, \quad (4.31)$$

где все обозначения прежние. При использовании первого способа можно оценить (без расчета  $r_{ij}$  и  $\beta_{ij}$ ) коэффициент множественной детерминации по формуле (4.10), где остаточная дисперсия

$$D_o = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (x_{ir} - x_{i \text{ зз. } N})^2$$

и  $x_{ir}$  — наблюдавшиеся, а  $x_{i \text{ зз. } N}$  — вычисленные по множественной регрессии значения переменной  $X_i$ .

\*Как это делается, рассмотрим ниже, в примере 4.1.

## 4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 4.1.1. Оценка вероятностей многомерного распределения

Выявить полное  $N$ -мерное распределение по экспериментальным данным — задача непростая. Часто ее пытаются обойти, ограничиваясь совокупными числовыми характеристиками, для расчета которых есть готовые программы в вычислительных центрах. Но это некорректно. Знать полные распределения необходимо и для решения важнейших социолого-психологических проблем — например, проблема наличия в различных социальных общностях людей с теми или иными психическими свойствами, — для адекватного моделирования генеральных совокупностей и проектирования репрезентативных выборок (см. § 5.1).

Оценить полное многомерное распределение вероятностей можно либо по данным специально организованного натурного исследования в соответствии с формулами (4.1–4.3), причем по возможности обобщая выборочные распределения частот, полученные в разных сериях или на разных этапах исследования; либо это можно сделать, используя статистику переписей, анкетные данные и другие сведения, которые необходимы и достаточны для того, чтобы восстановить полное многомерное распределение по уравнениям (4.5).

Специфика исследования, целью которого служит оценка вероятностей многомерного распределения, состоит в том, чтобы совместно регистрировать значения всех интересующих исследователя случайных величин, образующих систему. Но при этом количество необходимых, с учетом формулы (4.2), наблюдений или измерений быстро начинает превышать практические возможности одного исследователя. Чтобы уменьшить требуемое число наблюдений, следует квантовать изучаемые величины на двух, максимум трех уровнях, затем спланировать нужное для репрезентативности результатов число наблюдений (см. § 5.1) и только после этого осуществлять эмпирическое исследование. Разумеется, для предварительных оценок и без далеко идущих выводов можно получить эмпирическое распределение, просто группируя имеющиеся данные, подсчитывая частоты и частости совмещения наблюдавшихся значений нескольких случайных величин.

**Пример 4.1.** В комплексном исследовании личности были получены оценки социометрического статуса в своей учебной группе ( $X_1$ ), нейротизма по Айзенку ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) студентов, представленные в табл. 4.3. Несмотря на

малочисленность данных (всего 42 человека), продемонстрируем оценивание вероятностей совместного распределения социометрического статуса, нейротизма и эмоциональной экспансивности.

Таблица 4.3

Исходные данные к примеру 4.1

$X_1$  — социометрический статус в группе, %;

$X_2$  — нейротизм и  $X_3$  — эмоциональная экспансивность, баллы

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
1	18	3	8	7	-8
-9	20	-15	8	5	18
22	16	15	-2	17	1
-11	22	-1	-28	12	3
-6	9	-26	2	9	-1
-0,5	12	11	15	12	34
5	13	2	-10	8	13
9	16	10	4	9	9
0	14	-4	19	3	12
2	16	13	2	15	22
11	16	-17	6	14	29
15	17	9	17	8	22
-8	21	-27	7	14	7
0	22	25	8	7	40
9	7	61	4	13	40
8	23	33	7	6	20
15	11	-2	9	16	-50
4	12	34	4	12	19
-8	15	-4	0,5	20	10
-0,7	12	-6	8	12	0
-15	13	-4	9	8	24
Суммы			140,3	555,0	374,0

Для группировки данных расчленим значения каждой переменной на два уровня, как показано в табл. 4.4. Осуществляем группировку, кодируя в пятиричной системе (как и прежде) факт появления события  $A_{jkm}$ , состоящего в том, что на пересечении  $j$ -го,  $k$ -го и  $m$ -го уровней ( $j = 1, 2; k = 1, 2; m = 1, 2$ ) появится «тройка» значений  $X_1, X_2, X_3$ . Например, для первой в табл. 4.3 «тройки» значений  $[(X_1 = 1)(X_2 = 18)(X_3 = 3)]$  имеем событие



Таблица 4.4

Группировочная таблица для расчета оценок вероятностей  $P_{jkm}$  по данным эксперимента (Обозначения в тексте)

	$x_{21} \equiv X_2 < 13,5$		$x_{22} \equiv X_2 > 13,5$	
	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geq 0$	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geq 0$
$x_{11} \equiv X_1 < 0$	III $f_{111} = 3$ $P_{111} = 0,07$ $P_{111}^* = 0,04$	III $f_{112} = 3$ $P_{112} = 0,07$ $P_{112}^* = 0,10$	III $f_{121} = 4$ $P_{121} = 0,10$ $P_{121}^* = 0,04$	I $f_{122} = 1$ $P_{122} = 0,02$ $P_{122}^* = 0,08$
$x_{12} \equiv X_1 \geq 0$	III $f_{211} = 3$ $P_{211} = 0,07$ $P_{211}^* = 0,13$	III III III $f_{212} = 14$ $P_{212} = 0,34$ $P_{212}^* = 0,28$	III $f_{221} = 3$ $P_{221} = 0,07$ $P_{221}^* = 0,10$	III III I $f_{222} = 11$ $P_{222} = 0,28$ $P_{222}^* = 0,23$
Суммы	$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 f_{jkm} = 42;$ $\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 P_{jkm} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 P_{jkm}^* = 1$			

$A_{222} \equiv [(X_1 = x_{12})(X_2 = x_{22})(X_3 = x_{32})]$ , которое кодируем палочкой в соответствующей (правой, нижней) клетке табл. 4.4. Окончив группировку, подсчитываем частоты  $f_{ikm} = \sum A_{ikm}$ , суммы частот и оценки вероятностей  $P_{jkm} = \frac{1}{42} f_{jkm}$  (см. табл. 4.4). Совокупность этих оценок и характеризует совместное распределение социометрического статуса, нейротизма и эмоциональной экспансивности у 42 студентов.

Оценим, далее, степень стохастической связности системы, пользуясь коэффициентом совместной детерминации (4.15). Если социометрический статус, нейротизм и эмоциональная экспансивность независимы в совокупности, то для всех  $j, k$  и  $m$  должно выполняться условие

$$P_{jkm}^* = P_j P_k P_m.$$

Следовательно, вычисляя все оценки безусловных вероятностей по формуле (4.4) — результаты представлены в табл. 4.5, — можем далее определить и оценки  $P_{jkm}^*$  в предположении независимости переменных (эти оценки приведены в табл. 4.4). Так как в группировочной таблице (табл. 4.4)  $i = 2$  и  $g = 4$ , то, выполнив расчеты

Таблица 4.5

Безусловные эмпирические распределения величин социометрического статуса ( $X_1$ ), нейротизма ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ )

для $X_1$		для $X_2$		для $X_3$	
$x_{1j}$	$P_j$	$x_{2k}$	$P_k$	$x_{3m}$	$P_m$
$x_{11}$	0,26	$x_{21}$	0,55	$x_{31}$	0,31
$x_{12}$	0,74	$x_{22}$	0,45	$x_{32}$	0,69
$\sum_{j=1}^2 P_j$	1,00	$\sum_{k=1}^2 P_k$	1,00	$\sum_{m=1}^2 P_m$	1,00

по формуле (4.15), получаем  $K_N^2 \approx 0,128$  и  $K_N \approx 0,36$ , что свидетельствует о наличии слабой совместной стохастической связи рассматриваемых переменных. Значит, в принципе имеет смысл определять и условные распределения, но это выходит за рамки нашего примера.

Используем для демонстрации исходные данные примера 4.1. *Первый способ* — непосредственный расчет коэффициентов множественных регрессий — требует составления трех систем по три нормальных уравнения в каждой.

Пользуясь алгоритмом составления нормальных уравнений  $i$ -й множественной регрессии, составим их для регрессии

$$x_{123} = a_{01} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3.$$

Умножая на  $x_1 \equiv 1$  и суммируя по числу наблюдений ( $r = 1, 2, \dots, 42$ ), получаем первое нормальное уравнение:

$$\sum_{r=1}^{42} x_1 = 42a_{01} + a_{12} \sum_{r=1}^{42} x_2 + a_{13} \sum_{r=1}^{42} x_3.$$

Умножая исходное уравнение на  $x_2$  и суммируя, получим второе нормальное уравнение:

$$\sum_{r=1}^{42} x_1 x_2 = a_{01} \sum_{r=1}^{42} x_2 + a_{12} \sum_{r=1}^{42} x_2^2 + a_{13} \sum_{r=1}^{42} x_2 x_3.$$

Умножая исходное уравнение на  $x_3$  и суммируя, получим третье нормальное уравнение:

$$\sum_{r=1}^{42} x_1 x_3 = a_{01} \sum_{r=1}^{42} x_3 + a_{12} \sum_{r=1}^{42} x_2 x_3 + a_{13} \sum_{r=1}^{42} x_3^2.$$

Аналогичным образом получаем и две другие системы нормальных уравнений, для переменных  $x_2$  и  $x_3$  соответственно:

$$\begin{cases} \sum_r x_2 = 42a_{02} + a_{21} \sum_r x_1 + a_{23} \sum_r x_3, \\ \sum_r x_2 x_1 = a_{02} \sum_r x_1 + a_{21} \sum_r x_1^2 + a_{23} \sum_r x_1 x_3, \\ \sum_r x_2 x_3 = a_{02} \sum_r x_3 + a_{21} \sum_r x_1 x_3 + a_{23} \sum_r x_3^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_r x_3 = 42a_{03} + a_{31} \sum_r x_1 + a_{32} \sum_r x_2, \\ \sum_r x_3 x_1 = a_{03} \sum_r x_1 + a_{31} \sum_r x_1^2 + a_{32} \sum_r x_1 x_2, \\ \sum_r x_3 x_2 = a_{03} \sum_r x_2 + a_{31} \sum_r x_1 x_2 + a_{32} \sum_r x_2^2. \end{cases}$$

Чтобы определить все девять неизвестных (3 свободных члена и 6 коэффициентов множественных регрессий), необходимо по исходным данным (см табл 4 3) вычислить суммы значений каждой переменной, квадратов значений и парных произведений. Промежуточные значения и суммы квадратов и произведений представлены в табл. 4.6. Теперь можем записать в явном виде:

$$\begin{aligned} \text{для } x_{1 \ 23} \quad & \begin{cases} 140,3 = 42a_{01} + 555a_{12} + 374a_{13}, \\ 1394,6 = 555a_{01} + 8331a_{12} + 3969a_{13}, \\ 3678,7 = 374a_{01} + 3969a_{12} + 20292a_{13}; \end{cases} \\ \text{для } x_{2 \ 13} \quad & \begin{cases} 555 = 42a_{02} + 140,3a_{21} + 374a_{23}, \\ 1394,6 = 140,3a_{02} + 4290a_{21} + 3678,7a_{23}, \\ 3969 = 374a_{02} + 3678,7a_{21} + 20292a_{23}; \end{cases} \\ \text{для } x_{3 \ 12} \quad & \begin{cases} 374 = 42a_{03} + 140,3a_{31} + 555a_{32}, \\ 3678,7 = 140,3a_{03} + 4290a_{31} + 1394,6a_{32}, \\ 3969 = 555a_{03} + 1394,6a_{31} + 8331a_{32}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая эти системы уравнений любым известным способом, получаем приближенные значения шести  $a_j$  (они приведены в табл. 4 8) и свободных членов:

$$a_{01} \approx 6,73; \quad a_{02} \approx 13,9; \quad a_{03} \approx 16,4.$$

Теперь можем записать искомые регрессии:

$$\begin{aligned} x_{1 \ 23} &= 6,73 - 0,34x_2 + 0,124x_3, \\ x_{2 \ 13} &= 13,9 - 0,09x_1 - 0,04x_3, \\ x_{3 \ 12} &= 16,4 + 0,55x_2 - 0,71x_1. \end{aligned}$$

Заметим, что, пользуясь найденными множественными регрессиями, можно определить коэффициенты множественной детерминации следующим образом:

$$\eta_i^2 = 1 - \frac{1}{42D_i} \sum_{r=1}^{42} (x_i - x_i^*)^2,$$

Таблица 4.6

Промежуточные значения к расчету коэффициентов множественных регрессий, ковариаций и коэффициентов парной корреляции

$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$
1	324	9	18	3	54	64	49	64	56	-64	-56
81	400	225	-180	135	-300	64	25	324	40	144	90
484	324	225	396	330	270	4	289	1	-34	-2	17
121	484	1	-242	11	-22	784	144	9	-336	-84	36
36	81	676	-54	156	-234	4	81	1	18	-2	-9
0,25	144	121	-6	-5,5	132	225	144	1126	180	510	408
25	169	4	65	10	26	100	64	169	-80	-130	104
81	256	100	144	90	160	16	81	81	36	36	81
0	196	16	0	0	-58	361	9	144	67	228	36
4	256	169	32	26	208	4	225	484	30	44	330
121	256	289	176	-187	-272	36	186	841	84	174	408
225	289	81	255	135	153	289	81	484	153	374	198
64	441	729	-168	216	-567	49	196	49	98	49	98
0	484	625	0	0	550	64	49	1600	56	320	280
81	49	3721	63	549	427	16	169	1600	52	160	620
64	529	1089	184	264	759	49	36	400	42	140	120
225	121	4	165	-30	-22	81	256	2500	144	-450	-800
16	144	1126	48	136	408	16	144	361	48	76	228
64	225	16	-120	32	-60	0,25	400	100	10	5	200
0,49	144	36	-8,4	4,2	-72	64	144	0	96	0	0
225	169	16	-185	60	-52	81	64	576	72	216	192
Суммы						4290,0	8331,0	20292,0	1384,6	3678,7	3969,0

где  $D_i$  — безусловная дисперсия, определяемая обычным путем:  $D_i = \frac{1}{42} \sum_{r=1}^{42} [x_i - M(x_i)]^2$ ;  $x_i$  — эмпирические значения  $i$ -й переменной;  $x_i^*$  — вычисленные по  $i$ -й множественной регрессии ожидаемые значения  $i$ -й переменной. Не вычисляя здесь  $\eta_i^2$ , отметим, что всегда  $\eta_i^2 \geq R_i^2$ , где  $R_i^2$  — коэффициент линейной детерминации, определяемый формулой (4.12) или (4.31).

По второму способу вычисления начинаются с определения значений элементов ковариационной матрицы, стандартных отклонений, а затем и парных коэффициентов корреляции, причем используются те же самые суммы из табл. 4.3 и 4.6. Результирующие ковариационная и корреляционная матрицы и значения стандартных отклонений приведены в табл. 4.7. По корреляционной матрице построим корреляционный граф рассматриваемой системы — он изображен на рис. 4.3.

Таблица 4.7

Ковариационная (а) и корреляционная (б) матрицы, безусловные стандартные отклонения переменных первой выборки (а) к примеру 4.1; корреляционная матрица (в) второй выборки к примеру 5.5

$X_1$  — социометрический статус на курсе,  $X_2$  — нейротизм,  $X_3$  — эмоциональная экспансивность

		$X_1$	$X_2$	$X_3$
а	$X_1$	91,0	-11,1	58,0
	$X_2$	-11,1	24,0	-23,0
	$X_3$	58,0	-23,0	404,0
б	$X_1$	1	-0,238	0,302
	$X_2$	-0,238	1	-0,234
	$X_3$	0,302	-0,234	1
в	$\sigma_i$	9,54	4,90	20,10
г	$X_1$	1	-0,276	0,162
	$X_2$	-0,276	1	-0,347
	$X_3$	0,162	-0,347	1

Системы нормальных уравнений для вычисления  $\beta_{ij}$ -коэффициентов получим следующим путем

1. Выберем из корреляционной матрицы подматрицу, удаляя строку и столбец той переменной, которую считаем зависимой. Так, для социометрического статуса ( $X_1$ ) — подматрицу (1), для нейротизма ( $X_2$ ) — подматрицу (2), а для эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) — подматрицу (3):

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{23} & 1 \end{bmatrix} (1); \quad \begin{bmatrix} 1 & r_{13} \\ r_{13} & 1 \end{bmatrix} (2); \quad \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} (3).$$

2. Сформируем для каждой из этих подматриц диагональную подматрицу  $\beta_{ij}$ -коэффициентов (где  $i$  — номер зависимой переменной,  $j$  — номера независимых):

$$\begin{bmatrix} \beta_{12} & 0 \\ 0 & \beta_{13} \end{bmatrix} (1); \quad \begin{bmatrix} \beta_{21} & 0 \\ 0 & \beta_{23} \end{bmatrix} (2); \quad \begin{bmatrix} \beta_{31} & 0 \\ 0 & \beta_{32} \end{bmatrix} (3).$$

3. Перемножим слева подматрицы парных коэффициентов и соответствующие подматрицы  $\beta$ -коэффициентов. В результате получим

$$\begin{bmatrix} \beta_{12} & r_{23}\beta_{13} \\ r_{23}\beta_{12} & \beta_{13} \end{bmatrix} (1); \quad \begin{bmatrix} \beta_{21} & r_{13}\beta_{23} \\ r_{13}\beta_{21} & \beta_{23} \end{bmatrix} (2); \quad \begin{bmatrix} \beta_{31} & r_{12}\beta_{32} \\ r_{12}\beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} (3),$$

где  $\beta_{12} = \beta_{21}$ ,  $\beta_{13} = \beta_{31}$ ,  $\beta_{23} = \beta_{32}$  так же, как и для парных коэффициентов корреляции.

4. К каждой полученной подматрице построчно припишем слева через знак равенства коэффициенты корреляции из удаленного

ранее столбца, а элементы справа от знака равенства суммируем:

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= \beta_{12} + r_{23}\beta_{13} \\ r_{13} &= r_{23}\beta_{12} + \beta_{13} \end{aligned} \right\} (1); \quad \left. \begin{aligned} r_{12} &= \beta_{21} + r_{13}\beta_{23} \\ r_{23} &= r_{13}\beta_{21} + \beta_{23} \end{aligned} \right\} (2);$$

$$\left. \begin{aligned} r_{13} &= \beta_{31} + r_{12}\beta_{32} \\ r_{23} &= r_{12}\beta_{31} + \beta_{32} \end{aligned} \right\} (3).$$

Подставляя из исходной корреляционной матрицы значения  $r_{ij}$ , запишем системы нормальных уравнений в явном виде:

$$\begin{cases} -0,238 = \beta_{12} - 0,234\beta_{13}, \\ 0,302 = -0,234\beta_{12} + \beta_{13}; \\ -0,238 = \beta_{21} + 0,302\beta_{23}, \\ -0,234 = 0,302\beta_{21} + \beta_{23}; \\ 0,302 = \beta_{31} - 0,238\beta_{32}, \\ -0,234 = -0,238\beta_{31} + \beta_{32} \end{cases}$$

Решая эти системы, получим следующие приближенные значения  $\beta$ -коэффициентов:

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= -0,184, & \beta_{32} &= -0,172, & \beta_{13} &= 0,261, \\ \beta_{21} &= -0,177, & \beta_{23} &= -0,179, & \beta_{31} &= 0,261. \end{aligned}$$

Можно видеть, что различия между «симметричными»  $\beta$ -коэффициентами малы (эти различия вызваны округлением исходных  $r_{ij}$ -коэффициентов).

Вычисляя теперь по формуле (4.26) коэффициенты множественных регрессий, получаем те же значения (табл. 4.8). Далее, по формуле (4.31) определяем значения линейных коэффициентов множественной детерминации:

$$R_{1\ 23}^2 \approx 0,121, \quad R_{2\ 13}^2 \approx 0,086, \quad R_{3\ 12}^2 \approx 0,119,$$

а по формуле (4.13) — коэффициенты множественной акорреляции, приведенные по диагонали табл. 4.8. Изображая полученные множественные регрессии в виде регрессионных подграфов, как показано на рис. 4.4, а, б и в, можем затем объединить их в регрессионный граф (рис. 4.4, г), матрица которого дана в табл. 4.8.

Таблица 4.8

Матрица регрессионного графа на рис. 4.4

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_1$	$R_{1\ 23} = 0,94$	$a_{12} = -0,34$	$a_{13} = 0,124$
$X_2$	$a_{21} = -0,09$	$R_{2\ 13} = 0,96$	$a_{23} = -0,04$
$X_3$	$a_{31} = 0,55$	$a_{32} = -0,71$	$R_{3\ 12} = 0,94$

Третий способ дополняет проделанную работу вычислением коэффициентов частной корреляции. В нашем случае трех переменных по формуле (4.8) получаем

$$r_{12.3} \approx -0,181, \quad r_{13.2} \approx 0,261, \quad r_{23.1} \approx -0,175,$$

после чего можем проверить найденные выше значения  $R_i^2$  по формуле (4.12) и значения  $a_i$  по формуле (4.2.18) — вычисления правильны.

Попробуем теперь содержательно интерпретировать полученные регрессии и корреляции на качественном уровне. Корреляционный граф (рис. 4.3) показывает, что нейротизм отрицательным образом взаимосвязан со статусом и эмоциональной экспансивностью, которые, в свою очередь, взаимосвязаны положительно. Во взаимосвязях, отображаемых  $r_{ij}$ , аккумуляровано, однако, влияние третьей переменной. Парциальные коэффициенты  $r_{ij.m}$  «снимают» это влияние. Действительно, можем видеть, что каждая из переменных «усиливает» взаимосвязь двух остальных (все  $r_{ij.m} < r_{ij}$ ). Вот, пожалуй, и все, что можно сказать на основании  $r_{ij}$  и  $r_{ij.m}$ , причем не более чем в гипотетическом плане.

Гораздо больше сведений дает нам регрессионный граф (рис. 4.4). Прежде всего, можно видеть, что взаимовлияния на деле оказываются почти односторонними влияниями. Действительно, влияния социометрического статуса и эмоциональной экспансивности на нейротизм столь малы по сравнению с влиянием нейротизма на эти переменные, что ими можно пренебречь. Нейротизм выступает как одна из причин, обуславливающих социометрический статус личности и ее эмоциональную экспансивность. Влияние социометрического статуса на эмоциональную экспансивность более чем в 4 раза выше обратного влияния, что прекрасно подтверждает известное положение преимущественного обуславливания социального поведения социальным окружением. Заметим, что характер влияний в системе, вскрываемый регрессионным графом, не выявляется отдельными регрессионными подграфами. Отсюда вытекает необходимость регрессионного исследования системы в целом.

Представляет интерес оценка стохастической связности системы рассматриваемых переменных, полученная в виде коэффициента совместной детерминации  $K_3^2 \approx 0,128$ . Заметим, что, действительно, совместная детерминация больше наибольшей множественной детерминации, оцениваемой  $R_{1.23}^2 \approx 0,121$ . Близость значений  $K_3^2$  и  $R_{1.23}^2$ , возможно, свидетельствует о хорошем приближении регрессий в системе линейными функциями. С другой стороны, как отдельные переменные, так и система в целом более обусловлены извне неконтролируемыми факторами, чем изнутри —

друг другом. Это позволяет предполагать, что социометрический статус в группе, нейротизм и эмоциональная экспансивность скорее входят в другие системы, чем сами образуют систему. Такое предположение вытекает и из малых величин коэффициентов парной корреляции, на которых основаны все остальные показатели. Но было бы неосторожным отбрасывать полученные сведения только на основании малости величин  $r_{ij}$ , так как эти сведения не противоречат известным теоретическим положениям и экспериментальным фактам

## 1.1. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

### 1.1.1. Свойства и количественные характеристики случайных функций

В начале главы мы говорили о случайной функции как о системе случайных величин. Это не единственно возможное определение, но мы ограничимся им при дальнейшем изложении.

Случайная функция  $Y(X)$ , заданная на множестве и своих реализаций  $y_j(X)$  (где  $j = 1, 2, \dots, n$ ), принимающих значения  $y_j(x_i)$  (где  $i = 1, 2, \dots, N$ ) на множестве  $N$  фиксированных значений  $x$ , аргумента  $X$  либо значений интервалов квантования  $\lambda_i$ , средними значениями которых выступают  $x_i$ , полностью определяется  $N$ -мерным распределением вероятностей  $P\{y_j(x_i)\}$ , которые в принципе ничем не отличаются от вероятностей  $P_{j,k,\dots,m}$ , рассмотренных выше.

Обычно для непрерывных аргументов число  $N$  интервалов квантования, необходимое для изучения случайной функции  $Y(X)$ , должно быть порядка сотен и тысяч\*. Поэтому в общем случае даже для случайных функций одного аргумента определить функции или плотность распределения не представляется возможным. Лишь для сравнительно редких видов случайных функций, как будет отмечено ниже, могут быть заданы распределения. В большинстве случаев приходится ограничиваться количественными характеристиками отдельных свойств многомерного распределения случайной функции.

Случайная функция одного аргумента  $Y(X)$ , реализации которой рассматриваются на плоскости (см. рис. 4.2), характеризуется теми же свойствами, что и система случайных величин: положением, рассеиванием и связностью (асимметрия и эксцесс обычно не рассматриваются). Но в отличие от случайной величины

\*Романенко А. Ф., Сергеев Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., 1968.



или системы эти же свойства у случайной функции выражаются количественно не с помощью числовых мер, а посредством неслучайных функций, образуемых мерами положения, рассеивания и связи от того же аргумента  $X$

Математическим ожиданием случайной функции  $Y(X)$  называется неслучайная функция  $M[Y(X)]$ , которая при каждом фиксированном значении аргумента  $x_i$  равна условному среднему арифметическому значению случайной функции  $M(y/x_i)$ , определенному для всех возможных реализаций  $Y(X)$ . Таким образом, математическое ожидание случайной функции — это регрессия условных средних «у по х». Математическое ожидание случайной функции можно рассматривать как некоторую среднюю из возможных реализаций.

Математическое ожидание случайной функции имеет те же свойства, что и среднее арифметическое значение суммы и произведения случайных величин (4.17), (4.20) и (4.21), только речь идет уже о суммировании или умножении не чисел, а функций. Так, математическое ожидание простой суммы из  $R$  случайных функций одного и того же аргумента равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M \left[ \sum_{r=1}^R Y_r(X) \right] = \sum_{r=1}^R M[Y_r(X)], \\ r = 1, 2, \dots, R.$$

В частности, прибавление к случайной функции  $Y(X)$  неслучайной функции  $\psi(X)$  увеличивает математическое ожидание случайной функции на эту функцию:

$$M[Y(X) + \psi(X)] = M[Y(X)] + \psi(X).$$

Это позволяет *центрировать* случайную функцию, вычитая из ее значений значения математического ожидания для тех же значений аргумента. Центрированная случайная функция  $\overset{0}{Y}(X)$  есть функция центральных отклонений, заданная на множестве значений аргумента:

$$\overset{0}{Y}(X) = Y(X) - M[Y(X)], \\ X = x_i, i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.32)$$

Умножение случайной функции на неслучайную функцию того же аргумента  $\psi(X)$  увеличивает математическое ожидание в  $\psi(X)$  раз:

$$M[\psi(X)Y(X)] = \psi(X)M[Y(X)].$$

Это свойство позволяет нормировать случайную функцию какой-либо неслучайной функцией, чаще всего стандартным отклонением

Дисперсией случайной функции  $Y(X)$  называется неслучайная функция  $D[Y(X)]$ , значение которого для каждого из значений аргумента есть условная дисперсия  $D(y/x_i)$ , определяемая также рассмотренными уже способами.

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной функции есть неслучайная функция  $\sigma[Y(X)]$ , значения которой для всех  $x_i$

$$\sigma[y/x_i] = \sqrt{D(y/x_i)}.$$

Очевидно, что  $D[Y(X)]$  и  $\sigma[Y(X)]$  — это регрессии условных дисперсий и условных стандартных отклонений значений случайной функции при всех значениях аргумента, — регрессии, характеризующие рассеивание реализаций случайной функции на плоскости (см. рис. 4.2)

Свойство связности для случайной функции есть свойство более быстрой (или медленной) изменчивости ее значений по мере изменения аргумента (рис. 4.5). Степень (сила) связи между любыми двумя значениями случайной функции характеризуется автокорреляционной функцией.

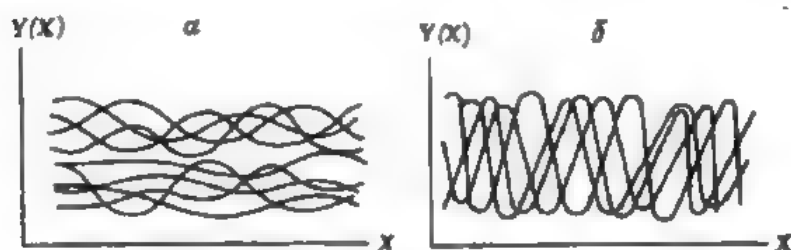


Рис. 4.5. Свойства связности случайной функции.

а — сильно связная функция, ее изменения медленны; б — слабо связная функция, ее изменения быстры.

Автокорреляционная (корреляционная, ковариационная) функция  $K[Y(x_i), Y(x_j)]$  случайной функции  $Y(X)$  есть неслучайная функция двух значений  $x_i, x_j$  того же аргумента, которая для каждой пары условных распределений «у по  $x$ » численно равна ковариации:

$$K[Y(x_i), Y(x_j)] = \text{COV} \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{bmatrix}.$$

Распространено и другое обозначение корреляционной функции. Пусть  $x$  — некоторое произвольное значение аргумента, принятое

за начало отсчета. Выберем новое значение аргумента  $x + \tau$ , где

$$0 \leq \tau \leq x_{\max}$$

называется «сдвигом» аргумента. Тогда корреляционная функция есть регрессия ковариаций, определенных для всех  $\tau$ :

$$K_{YY}(\tau) = K[Y(x), Y(x + \tau)] = \text{COV} \left[ \overset{0}{Y}(x) \overset{0}{Y}(x + \tau) \right],$$

где  $\overset{0}{Y}(x)$  и  $\overset{0}{Y}(x + \tau)$  — центрированные значения случайной функции в условных распределениях  $y/x$  и  $y/x + \tau$ .

Важное прикладное значение имеют свойства корреляционной функции:

- 1) она симметрична относительно ординаты;
- 2) она равна дисперсии случайной функции при  $\tau = 0$  (аналогично тому, как  $\text{COV}[XX] \equiv D([X])$ );
- 3) она убывает до нуля при увеличении  $\tau$ :
  - *монотонно* (рис. 4.6, а), если случайная функция не содержит периодических неслучайных компонент,
  - *колеблется* вокруг оси абсцисс (рис. 4.6, б), если такая периодическая компонента имеется; при этом частота колебаний  $K_{YY}(\tau)$  соответствует основной частоте колебаний периодической компоненты, чем и пользуются на практике для гармонического анализа случайных величин\*;

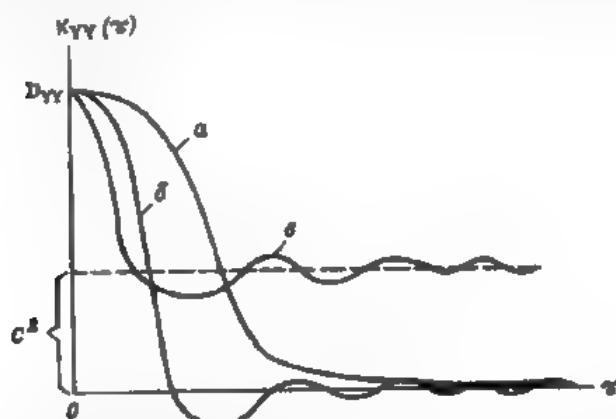


Рис. 4.6. Автокорреляционная функция случайной функции в зависимости от сдвига  $\tau$ .  
Объяснения в тексте.

\*Сергеев Г. А., Павлова Л. П., Романенко А. Ф. Статистические методы исследования электроэнцефалограммы человека. М., 1968.

4) она убывает, монотонно или колеблясь, до некоторого постоянного значения  $c^2$  (рис. 4.6, в), где  $c$  есть стандартная ошибка центрирования случайной функции и вычисления дисперсий и ковариаций.

Величина  $\tau$ , при которой корреляционная функция достигает оси абсцисс или асимптоты  $c^2$  (монотонно либо колеблясь), называется *интервалом корреляции*. Он показывает, для какого изменения аргумента значения случайной функции взаимозависимы. Если интервал корреляции  $\tau \approx 0$ , то значения реализации случайной функции образуют последовательность, аналогичную цепи Бернулли. Если интервал корреляции  $\tau = x_{i+1} - x_i = 1$ , то значения каждой реализации случайной функции образуют простую цепь Маркова.

Случайная функция, каждое значение которой выражено в единицах стандартного отклонения при соответствующем значении аргумента, называется *нормированной*. Центрированная и нормированная случайная функция задается своими основными отклонениями

Корреляционная функция нормированной случайной функции называется *нормированной корреляционной* (автокорреляционной) функцией. Она может быть получена двумя путями: либо как  $K \left[ Y_N \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} Y_N \begin{pmatrix} 0 \\ X + \tau \end{pmatrix} \right]$ , где  $Y_N \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$  — нормированные и центрированные значения случайной функции, либо нормированием значений корреляционной функции при всех значениях сдвига  $\tau$ :

$$R_{YY}(\tau) = \frac{K_{YY}(\tau)}{\sigma_Y(X)\sigma_Y(X+\tau)}.$$

Можно видеть, что нормированная корреляционная функция есть регрессия по  $\tau$  парных коэффициентов линейной корреляции, вычисляемых для всех рассматриваемых  $0 \leq \tau \leq x_{\max}$ . Очевидно, что максимум  $R_{YY}(\tau = 0) = 1$ , как и для  $r_{ij}$ . Остальные рассмотренные свойства корреляционной функции сохраняются.

Свойство связности для случайной функции двух и более аргументов или для системы «одномерных» и «многомерных» случайных функций не исчерпывается автокорреляцией и дополняется понятием взаимной корреляции. Соответственно здесь рассматриваются взаимно корреляционные функции и нормированные взаимно корреляционные функции.

*Взаимно корреляционная* (кросскорреляционная) функция случайной функции двух аргументов  $Y(X, Z)$  или (что то же самое) двух «одномерных» случайных функций  $Y(X)$  и  $U(Z)$ , рассматриваемых совместно, есть неслучайная функция всех пар значений  $x$ ,  $z$  двух аргументов, образованная ковариациями соответствующих

условных распределений  $\text{COV}_{YY}(X, Z)$  или  $\text{COV}_{YU}(X, Z)$ . Свойства взаимно корреляционной функции подобны свойствам корреляционной:

- 1) она симметрична;
- 2) она максимально равна произведению соответствующих стандартных отклонений:

$$\begin{aligned} [K_{YY}(X, Z)]_{\max} &= \sigma_Y(X)\sigma_Y(Z), \\ [K_{YU}(X, Z)]_{\max} &= \sigma_Y(X)\sigma_U(Z); \end{aligned}$$

3) если  $K_{YY}(X, Z) \equiv 0$ , то аргументы  $X$  и  $Z$  некоррелированы; если же  $K_{YU}(X, Z) \equiv 0$ , то случайные функции  $Y(X)$  и  $U(Z)$  некоррелированы;

4) нормированные взаимно корреляционные функции убывают от единицы до нуля, монотонно или колеблясь

Учитывая понятия авто- и взаимно корреляционных функций, можно выделить следующие практически важные свойства дисперсии и корреляционной функции для суммы случайных функций одинаковых аргументов.

Дисперсия суммы случайных функций равна сумме максимумов автокорреляционных и взаимно корреляционных функций слагаемых:

$$\begin{aligned} D \left[ \sum_{r=1}^R Y_r(X) \right] &= \underbrace{\left\{ \sum_{r=1}^R K[Y_r(X), Y_r(X + \tau)] \right\}_{\max}}_{\sum_{r=1}^R D[Y_r(X)]} + \\ &+ \left\{ \sum_{r=1}^R K[Y_r(X), Y_j(X)] \right\}_{\max}, \quad (4.33) \end{aligned}$$

где  $\tau = 1, 2, \dots, R$ ;  $i = 1, 2, \dots, R$ ;  $j = 1, 2, \dots, R$ . В частности, для некоррелируемых слагаемых

$$\left\{ \sum_{r=1}^R K[Y_i(X), Y_j(X)] \right\}_{\max} = 0,$$

и дисперсия суммы есть только сумма дисперсии слагаемых. Заметим, что приведенные выше формулы дисперсии суммы случайных величин (4.18) и (4.19) — это частные случаи (4.33).

Аналогично можем записать и более общее равенство для корреляционной функции суммы случайных функций:

$$K \left[ \sum_{r=1}^R Y_r(X) \right] = \sum_{r=1}^R K[Y_r(X), Y_r(X + \tau)] + \sum_{r=1}^R K[Y_i(X), Y_j(X)],$$

где рассматриваются уже не только максимальные, но любые значения сумм автокорреляционных и взаимно корреляционных функций. В частном случае взаимной некоррелированности слагаемых функций последнее слагаемое обращается в нуль, поэтому корреляционная функция суммы некоррелированных слагаемых равна сумме автокорреляционных функций этих слагаемых.

Все разнообразие случайных функций классифицируется по нескольким основаниям.

По числу аргументов мы уже выделяли случайные функции одного аргумента («одномерные») и двух и более аргументов («многомерные»). В последнем случае рассмотрению подлежат метасистемы. Очевидно, ансамбли физиологических и психологических функций следует рассматривать именно таким образом.

По физической природе аргументов принято выделять случайные процессы как случайные функции от времени. Для психологов случайные процессы представляют особый интерес, так как все психические процессы, безусловно, являются случайными и должны исследоваться посредством аппарата теории случайных процессов.

Классу случайных процессов противостоит класс случайных функций от других аргументов любой природы. Здесь представляет интерес выделение случайных функций от многих аргументов, природа которых различна. В психологических и смежных приложениях такими аргументами служат комплексы воздействий внешней и внутренней среды организма, включая не только случайные, но и целенаправленные воздействия: педагогические, социальные, медицинские.

Разумеется, что основной понятийный и вычислительный аппарат теории случайных функций не зависит от физической природы аргументов. По тому, является ли аргумент *а* функцией (как способ связи) случайными, можно выделить случайные функции неслучайных аргументов, неслучайные функции случайных аргументов и случайные функции случайных аргументов.

Типичными примерами случайных функций неслучайных аргументов служат результаты строго дозированных воздействий лекарств, физических сенсорных стимулов или обучающих программы на людей. Результаты этих воздействий — соматические, физиологические и психические состояния, а также социальное положение — из-за флуктуаций внутренней среды организма являются случайными функциями.

Неслучайные функции случайных аргументов мы рассматривали выше. Но следует добавить сюда любые инструментальные действия человека.

Наконец, случайные функции случайных аргументов в общем виде, очевидно, охватывают большинство психических процессов и функций.

По степени изменчивости количественных характеристик случайной функции в зависимости от изменений аргумента выделяют стационарные, квазистационарные и нестационарные случайные функции.

Стационарные случайные функции наиболее изучены. Случайная функция стационарна в узком смысле, если для всех значений аргумента ее условные распределения неизменны. Такая функция полностью определяется одномерным распределением. Случайная функция стационарна в широком смысле, если ее математическое ожидание и дисперсия суть константы (т. е. не зависят от аргумента), а корреляционная функция зависит только от сдвига  $\tau$  и не зависит от начала отсчета.

Нестационарной называют случайную функцию, для которой условия стационарности в широком смысле не выполняются. Если при этом изменения  $M[Y(X)]$  и  $D[Y(X)]$  не велики, а  $K[Y(X), Y(X + \tau)]$  слабо зависят от начала отсчета сдвига  $\tau$ , то случайную функцию называют квазистационарной.

Для психологии чрезвычайно важно установить принадлежность изучаемых психических процессов, состояний и свойств к стационарному или нестационарному классу функций. Дело в том, что подавляющее большинство статистических мер и методов разработано для условий стационарности, тогда как общеизвестны возрастная, сезонная, недельная, суточная и т. п. периодичность случайных изменений психики, а также ее изменчивость в зависимости от целенаправленных обучающих и воспитательных воздействий. Можно сказать, что большинство явлений психики не удовлетворяет условиям стационарности. И тогда задача исследования может состоять в установлении областей значений аргументов, для которых можно говорить о квазистационарности.

По возможности заменить изучение множества реализаций случайной функции изучением ее одной, но достаточно длинной реали-

зации выделяют эргодические и неэргодические случайные функции.

Эргодическими называются случайные функции, для которых математическое ожидание и корреляционная функция, определенные по множеству реализаций, равны полученным по одной реализации. Для неэргодических они не равны. Очевидно, что все эргодические функции стационарны хотя бы в широком смысле.

Для психологических исследований понятие эргодичности весьма важно. Ведь тщательное изучение одного человека экономически выгоднее, да и невозможно редкие психические явления изучать в большом количестве. С другой стороны, только для эргодических процессов и функций результаты, полученные на множестве людей, в короткий период времени могут быть перенесены на отдельных людей и, наоборот, результаты лонгитюдных исследований отдельных индивидов (или малых групп) могут быть справедливы для больших групп. Значит, необходимо исследовать психические явления на эргодичность, т. е. определять их количественные характеристики и по множеству, и по отдельным реализациям.

### 1.1.1 Определение характеристик случайной функции из эксперимента

При экспериментальном изучении случайной функции можно выделить две ситуации: когда наблюдений достаточно для группировки данных и определения оценочной функции распределения и когда наблюдений мало для этого, тогда определяются оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции

Чтобы определить распределения случайной функции от одного аргумента, поступают так же, как для двух случайных величин (глава 3). Не повторяя изложенного, для примера покажем лишь результат. В табл. 4.9 представлены условные распределения частот ошибки слежения за движущейся целью в функции от времени слежения, в условиях, когда испытуемый запаздывает с реакцией\*. Значения математического ожидания  $M[Y(t)]$  и стандартного отклонения ошибки слежения в функции от времени  $\sigma[Y(t)]$  приведены в нижних строках таблицы. Видно, что они изменяются, следовательно, слежение — нестационарный процесс.

\*Суходольский Г. В. О характеристиках человека при слежении: Автореф. канд. дис. Л., 1968.



Таблица 4.9

**Условные распределения частоты ошибки слежения  
в функции от времени**

$y$  — средние значения интервалов квантования ошибки слежения, мм;  
 $t$  — средние значения интервалов квантования времени, с

$t$	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
$y$										
-4,4	0,001	0,001								
-4,0	—	—								
-3,6	0,001	—								
-3,2	0,009	0,002								
-2,8	0,028	0,006								
-2,4	0,035	0,010								
-2,0	0,115	0,020	0,001				0,001	0,001		0,001
-1,6	0,097	0,036	0,005	0,002	0,003	0,004	0,008	0,001		0,003
-1,2	0,243	0,081	0,045	0,025	0,019	0,015	0,014	0,021	0,013	0,016
-0,8	0,260	0,162	0,098	0,110	0,102	0,092	0,058	0,061	0,067	0,069
-0,4	0,183	0,325	0,329	0,302	0,334	0,304	0,353	0,390	0,412	0,403
0,0	0,026	0,140	0,230	0,272	0,285	0,283	0,283	0,302	0,289	0,337
0,4	0,002	0,157	0,221	0,227	0,191	0,236	0,212	0,180	0,166	0,129
0,8		0,044	0,060	0,054	0,058	0,052	0,061	0,034	0,040	0,035
1,2		0,009	0,006	0,007	0,008	0,012	0,010	0,010	0,012	0,006
1,6		0,003	0,002	0,001		0,002			—	0,001
2,0		0,002	0,002						0,001	0,001
2,4		0,001								
$M[Y(t)]$	-1,16	-0,39	-0,12	-0,10	-0,11	-0,07	-0,07	-0,08	-0,12	-0,15
$\sigma[Y(t)]$	0,68	0,74	0,53	0,48	0,47	0,48	0,47	0,44	0,43	0,43

Рассмотрим процедуру вычисления для количественных характеристик случайной функции.

**Пример 4.2.** Пусть человек непрерывно прицеливается в движущуюся цель в течение времени  $T$ . Отклонения прицельного приспособления от цели в каждый момент времени  $t$  образуют ошибку слежения, величина которой ( $y$ ) случайна. Таким образом, ошибку слежения можно рассматривать как случайную функцию времени, которую обозначим  $Y(t)$ . Значения двадцати трех реализаций этой случайной функции для одиннадцати значений времени приведены в табл. 4.10\*.

Вычислив все условные средние арифметические  $M[Y(t)]$  — они записаны в последней строке табл. 4.10, — случайную функцию центрируют по уравнению (4.32). Центрированные значения ошибки слежения представлены в табл. 4.11.

Чтобы устранить появление грубых ошибок центрирования,

\*Там же

Таблица 4.10

Реализации ошибки слежения к примеру 4.2

№	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
1	+0,3	-1,8	-0,4	-0,6	-0,8	-0,2	-0,6	-0,2	-0,4	-0,5	-0,2
2	+1,0	-0,5	-0,4	-1,4	-0,4	-0,6	-0,4	-1,5	+0,7	-0,5	-0,8
3	+0,3	-0,5	+1,2	+1,6	-0,6	-1,1	-0,2	0	0	0	0
4	+0,8	-2,0	-0,4	+1,1	+1,1	+0,2	0	-0,3	-0,3	-0,6	-0,7
5	+0,6	-2,2	-1,2	+0,8	+0,3	-0,6	-0,4	+0,2	-0,9	-0,5	0
6	+0,4	-1,3	-0,8	-0,3	0	-0,4	+0,5	+0,6	-0,6	-0,8	-0,6
7	+0,5	-2,2	-0,3	-0,2	-0,5	-0,1	-0,3	-0,4	+0,1	-0,8	-0,2
8	+0,5	-3,0	-1,8	-0,4	+0,2	+0,8	-0,8	-0,5	-0,9	-0,9	-0,2
9	+0,6	-2,0	-1,6	-0,9	-1,0	-0,2	-0,8	-0,8	-0,4	-0,3	-0,6
10	+0,5	-2,2	-0,6	+0,4	-0,8	-0,4	-0,3	-0,9	-1,1	-0,7	+0,4
11	+0,7	-1,0	+1,2	+0,4	-0,5	-0,5	-0,9	0	-0,4	-0,8	-0,3
12	+0,5	-2,1	-0,6	+0,7	+0,4	+1,0	+0,5	0	+0,5	+0,5	+0,6
13	+0,9	-1,3	-1,3	-0,6	+0,9	-0,5	-0,7	-0,5	-0,1	-0,4	-0,5
14	+0,3	-2,3	-0,3	+0,6	+0,1	-0,2	-0,4	-0,1	0	0	-1,0
15	+0,7	-1,2	-1,3	-0,5	-0,6	-1,3	-0,2	+0,2	+0,4	+0,4	-0,4
16	+0,6	-1,7	-0,7	-0,8	-0,4	-0,6	-0,9	-0,5	0	-0,3	-0,3
17	+0,6	-1,9	-1,6	-0,4	+0,1	+1,2	+0,8	+0,9	-0,6	-1,1	+1,0
18	+1,0	-1,7	-1,1	-0,2	+1,6	+0,8	+0,2	-0,1	-0,5	-0,8	-0,3
19	+0,7	-1,4	-0,8	-0,9	-1,2	-0,6	-0,4	-0,2	-0,8	-1,7	-1,6
20	+0,6	-0,3	+1,0	+0,2	-1,4	+0,5	+1,4	+1,0	-0,5	-0,8	-1,0
21	+0,4	-0,2	+0,9	+0,9	+0,8	+0,8	+0,6	-1,0	-0,4	-0,3	+0,2
22	+0,5	-0,6	+0,2	+0,3	+0,6	+0,4	+0,2	-0,2	-0,4	0	-0,4
23	+0,5	-1,6	-0,9	+0,7	+1,3	+0,5	-0,3	+0,4	0	+0,1	-0,6
$M[Y(t)]$	+0,6	-1,5	-0,5	+0,02	-0,03	-0,1	-0,1	-0,1	-0,3	-0,4	-0,3

обязательно вычисляют средние арифметические из центрированных значений случайной функции. Эти средние  $M \left[ \overset{\circ}{Y}(t) \right]$  представляют собой ошибку центрирования. Средний квадрат центрированных значений случайной функции есть ее условная дисперсия. Извлекая корни квадратные, получим оценки условных стандартных отклонений  $\sigma[Y(t)]$  (табл. 4.11).

Для вычисления корреляционной функции необходимо определить ковариации всех сочетаний по два из одиннадцати столбцов табл. 4.11. Результаты образуют ковариационную матрицу — табл. 4.12, в которой по главной диагонали расположены условные дисперсии. Нормируя элементы ковариационной матрицы произведения соответствующих пар стандартных отклонений из табл. 4.11, получим матрицу коэффициентов корреляции (табл. 4.13). Заметим, что по каждой диагонали этой матрицы, параллельной главной диагонали, расположены значения коэффициентов корреляции, относящиеся к одному и тому же значению сдвига  $\tau$ , но соответствующие разным началам отсчета.

### Понтирикованные реализации ошибки сложения

	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
1	-0,3	-0,3	+0,1	-0,6	-0,8	-0,1	-0,5	-0,1	-0,1	-0,1	+0,1
2	+0,4	+1,0	+0,1	-1,4	-0,4	-0,5	-0,3	-1,4	+1,0	-0,1	-0,5
3	-0,3	+1,0	+1,7	+1,6	-0,6	-1,0	-0,1	+0,1	+0,3	+0,4	+0,3
4	+0,2	-0,5	+0,1	+1,1	+1,1	+0,3	+0,1	-0,2	0	-0,2	-0,4
5	0	-0,7	-0,7	+0,8	+0,3	-0,5	-0,3	+0,3	-0,6	-0,1	+0,3
6	-0,2	+0,2	-0,3	-0,3	0	-0,3	+0,6	+0,7	-0,3	-0,4	-0,3
7	-0,1	-0,7	+0,2	-0,2	-0,5	0	-0,2	-0,3	+0,4	-0,4	+0,1
8	-0,1	-1,5	-1,3	-0,4	+0,2	+0,9	-0,7	-0,4	-0,6	-0,5	+0,1
9	0	-0,5	-1,1	-0,9	-1,0	-0,1	-0,7	-0,7	-0,1	+0,1	-0,3
10	-0,1	-0,7	-0,1	+0,4	-0,8	-0,3	-0,2	-0,8	-0,8	-0,3	+0,7
11	+0,1	+0,5	+1,7	+0,4	-0,5	-0,4	-0,8	+0,1	-0,1	-0,4	0
12	-0,1	-0,6	-0,1	+0,7	+0,4	+1,1	+0,6	+0,1	+0,8	+0,9	+0,9
13	+0,3	+0,2	-0,8	-0,6	+0,9	-0,4	-0,6	-0,4	+0,2	0	-0,2
14	-0,3	-0,8	+0,2	+0,6	+0,1	-0,1	-0,3	0	+0,3	+0,4	-0,7
15	+0,1	+0,3	-0,8	-0,5	-0,6	-1,2	-0,1	+0,3	+0,7	+0,8	-0,1
16	0	-0,2	-0,2	-0,8	-0,4	-0,5	-0,8	-0,4	+0,3	+0,1	0
17	0	-0,4	-1,1	-0,4	+0,1	+1,3	+0,9	+1,0	-0,3	-0,7	+1,3
18	+0,4	-0,2	-0,6	-0,2	+1,6	+0,9	+0,3	0	-0,2	-0,4	0
19	+0,1	+0,1	-0,3	-0,9	-1,2	-0,5	-0,3	-0,1	-0,5	-1,3	-1,3
20	0	+1,2	+1,5	+0,2	-1,4	+0,6	+1,5	+1,1	-0,2	-0,4	-0,7
21	-0,2	+1,3	+1,4	+0,9	+0,8	+0,7	+0,7	0	-0,1	+0,7	+0,5
22	-0,1	+0,9	+0,7	+0,3	+0,6	+0,5	+0,3	-0,1	-0,1	+0,4	-0,1
23	-0,1	-0,1	-0,4	+0,7	+1,3	+0,6	-0,2	+0,5	+0,3	+0,5	-0,3
$M\{Y(t)\}$	-0,01	-0,02	0	+0,02	-0,03	+0,04	-0,05	-0,03	+0,01	-0,04	-0,03
$\sigma\{Y(t)\}$	0,20	0,74	0,88	0,76	0,82	0,68	0,60	0,56	0,46	0,53	0,56

**Ковариационная матрица ошибки сложения**

[illegible]

По определению стационарности в широком смысле корреляционная функция не должна зависеть от начала отсчета. Это значит, что все коэффициенты корреляции, лежащие на одной диагонали, должны быть равны по величине. Из табл. 4.13 можно видеть, что величины и даже знаки коэффициентов одной и той же диагонали различны для всех диагоналей. Это свидетельствует о нестационарности ошибки слежения. Аналогично  $M[Y(t)]$  и  $\sigma[Y(t)]$  в данном случае тоже нестационарны.

Таблица 4.13

Матрица коэффициентов корреляции  
 $\tilde{R}_{YY}(\tau)$  значения оценок нормированной  
 корреляционной функции ошибок слежения

$\tau$	0,00	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
$t$											
0,00	1,00	0,16	-0,16	-0,43	0,24	-0,01	-0,08	-0,30	0,08	-0,45	-0,39
0,25		1,00	0,42	-0,03	-0,07	-0,20	0,38	0,14	0,27	0,20	-0,20
0,75			1,00	0,46	-0,21	-0,12	0,27	0,14	0,13	0,18	-0,08
1,25				1,00	0,18	0,14	0,28	0,35	-0,09	0,40	0,28
1,75					1,00	0,47	0,11	0,08	0,07	0,30	0,20
2,25						1,00	0,51	0,30	-0,12	-0,06	0,29
2,75							1,00	0,63	-0,08	0,04	0,20
3,25								1,00	-0,20	0,09	0,13
3,75									1,00	0,58	-0,06
4,25										1,00	0,25
4,75											1,00
$\tilde{R}_{YY}(\tau)$	1,00	0,35	0,01	-0,03	0,12	0,17	0,14	0,07	0,07	-0,32	-0,39

Корреляционная функция нестационарной случайной функции должна быть задана совокупностью своих значений для всех начал отсчета  $\tau$ . Но для простоты аппроксимируем ее в рассматриваемом примере стационарной корреляционной функцией. Стационарную аппроксимацию нормированной корреляционной функции  $\tilde{R}_{YY}(\tau)$  получим, усредняя коэффициенты по диагоналям и сопоставляя полученные средние значения координатам  $\tau$ :

$$\tilde{R}_{YY}(\tau) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{K_{YY}(t, t+\tau)}{\sigma_Y(t)\sigma_Y(t+\tau)},$$

где  $k$  — количество усредняемых коэффициентов — убывает от одиннадцати (при  $\tau_1 = 0$  с) до одного (при  $\tau_1 = 4,75$  с). Так как при усреднении допускается некоторая ошибка, величина которой тем

больше, чем меньше  $k$ , точность оценки значений  $\tilde{R}_{YY}(\tau)$  уменьшается с ростом  $\tau$ . В частности, значения  $\tilde{R}_{YY}(\tau)$  при всех  $\tau > 1,75$  с сомнительны. Однако для демонстрации проанализируем полученную нормированную автокорреляционную функцию — рис. 4.7.

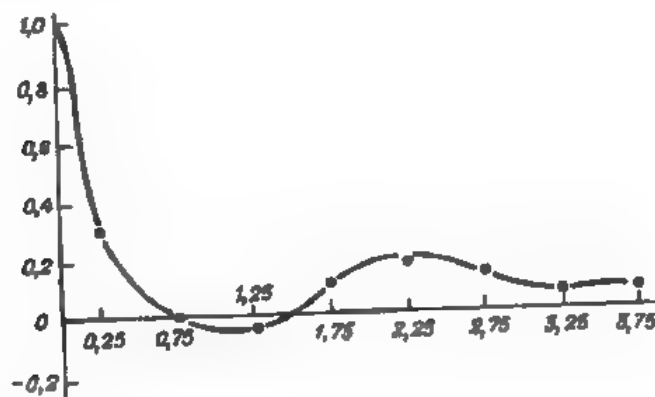


Рис. 4.7. Нормированная автокорреляционная функция стационарного процесса, аппроксимирующего ошибку слежения, к примеру 4.2. По оси ординат — функция  $\tilde{R}_{YY}(\tau)$ , по оси абсцисс — сдвиг  $\tau$ , с.

Можно видеть, что функция  $\tilde{R}_{YY}(\tau)$  затухает, колеблясь вокруг горизонтали, параллельной оси  $\tau$ . Это обстоятельство всегда свидетельствует о наличии ошибок центрирования и вычислений (они, однако, не влияют на свойства полученной кривой). Периоды колебаний функции  $\tilde{R}_{YY}(\tau)$ , судя по рис. 4.7, приблизительно равны 1 с. Это означает наличие периодической компоненты в ошибке слежения с основной частотой, равной приблизительно 1 колебанию в секунду. Наконец, можно видеть, что при  $\tau \approx 0,5$  с функция пересекает асимптоту, значит, интервал корреляции составляет около 0,5 с.

## ГЛАВА 3 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

### § 1 ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

#### § 1.1. Генеральная совокупность и выборка

Из-за массовости случайных явлений, выступающих объектами научных исследований, приходится отличать то, что должно быть изучено, от того, что реально может быть изучено и изучается. Например, если должна быть изучена степень возможности появления некоторого случайного события, то необходимо рассмотреть бесконечно большое число испытаний, в части которых могло бы появиться это событие, и определить его вероятность. Это, однако, невозможно практически. Приходится ограничиваться частотостью как оценкой для вероятности, определяемой при некотором конечном числе испытаний. В этой связи в математической статистике выделяются два фундаментальных понятия: (генеральная) *совокупность* как то, что подлежит изучению, и *выборка* как то, что реально изучается. Очевидно, что выборка должна адекватно *отображать* генеральную совокупность, иначе результаты не совпадут с целями исследования. Тому, что это означает, в сущности и посвящена математическая статистика как наука.

Совокупность и выборку можно рассматривать содержательно и формально по-разному, причем формальное рассмотрение важно с точки зрения применяемого описательного аппарата теории вероятностей, а содержательное — еще и с точки зрения организации исследования. Поскольку понятие совокупности является исходным, начнем с него.

*Совокупностью* будем называть практически счетное\* множество некоторых объектов (элементов), интересующих исследователя. Понятно, что, определяя объекты содержательно (психические свойства, состояния, процессы и т. д.) или формально (события, величины, функции и т. д.), мы так же определим и всю совокупность. *Свойством* совокупности будем называть реаль-

---

\*Часто для удобства в теории рассматриваются несчетные множества — например бесконечно большое число испытаний.

ное или воображаемое качество, присущее некоторым или всем ее элементам. *Параметром* совокупности будем называть свойство, которое можно квантифицировать в виде константы или переменной величины. Свойства или параметры могут быть случайными и неслучайными. Соответственно совокупности рассматриваются как стохастические и детерминированные

*Простой* (одномерной) совокупностью назовем ту, которая характеризуется:

- отдельным свойством (например, все негры США);
- отдельным параметром в виде константы или переменной (например, все петербуржцы среднего роста, или рост петербуржцев);
- системой непересекающихся (несовместных) свойств (например, все студенты и преподаватели СПбГУ).

*Сложной* (многомерной) совокупностью назовем ту, которая характеризуется:

- системой хотя бы частично пересекающихся свойств (например, студенты физического и психологического факультетов СПбГУ, мужского и женского пола, окончившие школу с отличием);
- системой параметров: независимых, частично зависимых и зависимых в совокупности (примером может служить система параметров, изучаемая в комплексном исследовании личности\*).

*Гомогенной* (однородной) назовем совокупность, все характеристики которой присущи каждому ее элементу, т. е. распределены по всей совокупности одинаковым образом.

*Гетерогенной* (неоднородной) назовем совокупность, характеристики которой сосредоточены в отдельных подмножествах элементов, так что гетерогенную совокупность можно рассматривать как объединение гомогенных подсовкупностей.

Все стохастические простые и сложные совокупности могут быть гомогенными; гетерогенными — чаще всего сложные.

Неполная классификация совокупностей в пояснение изложенной систематики приведена на рис. 5.1. Можно полагать, что для психологической теории и практики наибольший интерес представляют стохастические гетерогенные многомерные совокупности, характеризующиеся системой (или даже системами) параметров и свойств.

Параметром, важнейшим с точки зрения возможностей исследования, является *объем* совокупности — количество образующих

---

\*Анарьев В.Г. Человек как предмет познания. Л., 1969; Анарьев В.Г., Пашков А.С. Комплексное исследование социальных проблем // Человек и общество. Вып. VIII. Л., 1971.

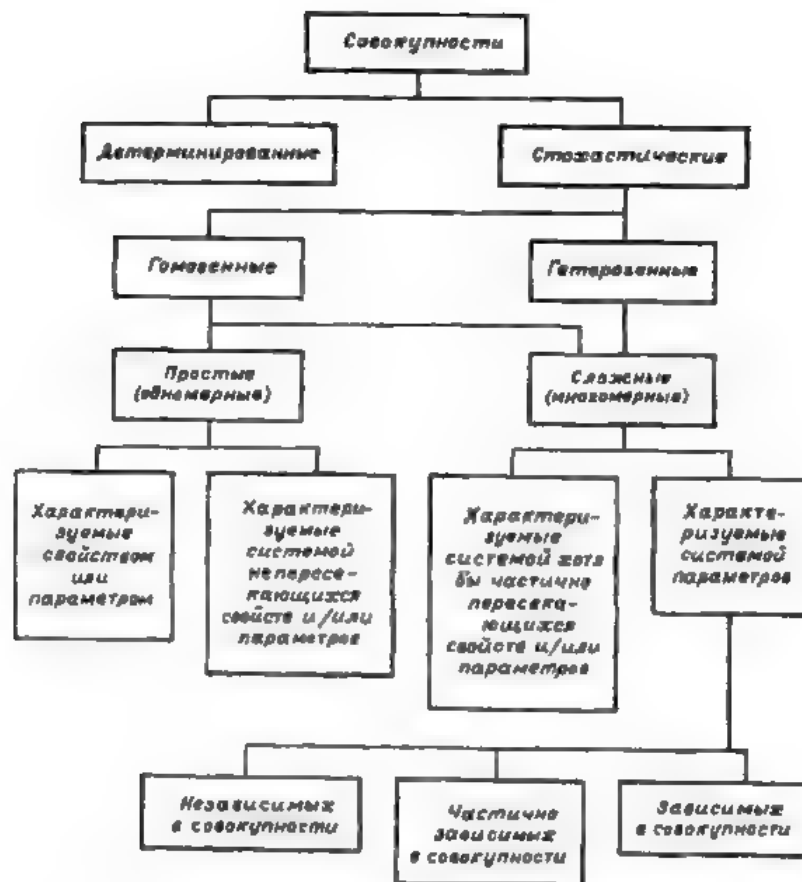


Рис. 8.1. Классификация генеральных совокупностей.

ее элементов. Величина объема часто зависит от того, как определена сама совокупность. Мы уже встречались с этим вопросом в главе 1, рассматривая число исходов опыта и полную группу событий. Действительно, если, например, нас интересует эмоциональное состояние конкретного студента 1-го курса в период сдачи конкретного зачета в зимнюю сессию, то генеральная совокупность исчерпывается дискретным числом оценок эмоционального состояния данного студента, полученных в течение получаса. Иной объем будет иметь совокупность эмоциональных состояний всех студентов первого курса, еще больший — совокупность для студентов всех первых курсов данного вуза, еще больший — при условии нескольких зачетов и экзаменов и т. д. Если совокуп-



ность из одного студента можно изучить с рассматриваемой точки зрения досконально, то совокупность из студентов всех первых курсов, не ограничивая годы изучения, исследовать уже не представляется возможным. Понятно, что общая, дифференциальная и социальная психология по сравнению с другими психологическими отраслями преимущественно имеют дело с совокупностями очень большого, хотя и конечного объема, исследовать которые иначе, чем выборочным путем, нельзя.

*Выборкой* будем называть некоторую часть генеральной совокупности. Принято классифицировать выборки по репрезентативности, по объему, по способу отбора и по схеме испытаний. *Репрезентативной* (представительной) называется выборка, адекватно отображающая генеральную совокупность в качественном и количественном отношениях. Что это конкретно означает, можно будет объяснить лишь в дальнейшем изложении. Однако заметим, что репрезентативность выборки непосредственно зависит от ее объема. Априори ясно: чем ближе объем выборки к объему совокупности, тем репрезентативнее выборка. Способы отбора и схемы испытаний, в сущности, лишь обуславливают возможность получить репрезентативную выборку при ограниченном объеме.

По способу отбора выделяют случайную и неслучайную выборки. Выборка называется *случайной*, если элементы генеральной совокупности отбираются случайным образом. Под этим обычно понимают равные шансы для каждого элемента быть выбранным. Альтернативой случайной выборки является выборка, отбор в которую тенденциозен. Так как большинство методов математической статистики основывается на понятии случайной выборки, остановимся на нем подробнее.

Рассматривая нормальное распределение, мы отмечали, что случайная величина имеет нормальное распределение при условии, что на нее действует большое число случайных факторов, равных по силе воздействия. Мы также указывали, что при  $n > 20$  и  $p \approx q$  биномиальное распределение практически не отличается от нормального. Тот факт, что композиция нормально распределенных аргументов имеет нормальное распределение, может быть обобщен и на композиции распределений аргументов, отличных от нормального, при условии большого числа равнодействующих случайных аргументов. Указанные обстоятельства и составляют существо так называемого закона больших чисел, на котором основываются все представления об ошибках оценивания свойств и параметров генеральной совокупности по выборке. В этой связи, очевидно, выборка должна быть случайной уже потому, что иначе нельзя правильно использовать разработанные в теории математической статистики приемы и методы оценивания. С другой

стороны, выборка должна быть случайной для того, чтобы преднамеренно или нечаянно не исказить «истинных» характеристик генеральной совокупности тенденциозным отбором элементов в выборку.

Считается, что любые неравные шансы для элементов попасть в выборку приводят к тенденциозному, неслучайному отбору. Существует немало методов организации случайного отбора. Не разбирая их подробно, укажем на основной — это произвольная нумерация элементов из генеральной совокупности, а затем выбор по таблицам равновероятных случайных чисел.

Заметим, что в психологических исследованиях редко заботятся о случайном отборе испытуемых, хотя внешние стимульные воздействия организуются в случайном порядке. Понятно, что из-за этого полученные экспериментальные оценки изучаемых явлений менее адекватны популяции *homo sapiens*, чем при случайной выборке испытуемых. Поясним сказанное следующим образом. Пусть изучение некоторой психической переменной осуществляется на группе испытуемых-студентов. Даже если эта группа представляет собой случайную выборку из совокупности студентов данного вуза, она является не случайной, а тенденциозной (например, относительно всех жителей данного города, имеющих тот же возраст) уже потому, что на психические переменные не может не влиять уровень образования, а студенты — люди достаточно высокообразованные. Поэтому данные, полученные на студентах, строго говоря, справедливы лишь для студентов. Эти очевидные вещи приводят к нетривиальному для математической статистики выводу: случайная выборка, как она обычно понимается, применима безоговорочно лишь для однородных совокупностей. Как же изучать выборочным путем гетерогенные совокупности?

Очевидна необходимость репрезентативно отобразить в выборке структурные (качественные и количественные) характеристики гетерогенной совокупности. Столь же очевидно, что этого можно достичь средствами случайного отбора лишь при условии, что объем случайной выборки приближается к объему генеральной совокупности. Поскольку выборка такого объема столь же нереальна, как и изучение всей генеральной совокупности, возникает парадоксальная необходимость использовать неслучайную выборку.

Неслучайный отбор может быть механическим, типическим, серийным и комбинированным. Все эти виды, в сущности, сочетают тенденциозный и случайный отбор.

При *механическом* отборе вся совокупность делится на столько частей, сколько единиц планируется в объеме выборки, после чего случайным образом из каждой части отбирается один эле-

мент, включаемый в выборку. При *типическом* отборе совокупность делится на гомогенные части, после чего из каждой части осуществляется случайная выборка. При *серийном* отборе генеральную совокупность делят на большое число равновеликих серий, после чего случайную выборку делают не из единиц, а из серий совокупности, причем серии, попавшие в выборку, изучаются сплошь. При *комбинированном* отборе сочетаются на разных этапах уже рассмотренные виды отбора. Одной из разновидностей комбинированного отбора является *двухступенчатый* отбор, при котором на первой ступени осуществляется *серийный* отбор, а на второй — из каждой серии, попавшей в случайную выборку серий, выполняется случайная выборка элементов. Другая разновидность комбинированного отбора состоит в следующем. При отсутствии достоверной априорной информации любая совокупность считается гомогенной и из нее на первом этапе случайным образом делается выборка большого объема, по которой апостериори выявляется гетерогенный характер совокупности и определяется многомерное распределение вероятностей ее гомогенных частей. На втором этапе, уже на основе апостериорной информации о типических характеристиках совокупности, осуществляется *типический* отбор, и в результате нового выборочного исследования уточняются сведения о генеральной совокупности. Далее могут следовать третий и другие этапы с повторными уточняющими типическими выборками.

По схеме испытаний выборки делятся на *независимые* (повторные, простые) и *зависимые* (бесповторные, сложные). Суть этого разделения в том, чтобы вероятностные характеристики генеральной совокупности не изменялись под бесцеремонными воздействиями исследователя. Простая выборка образуется по схеме независимых испытаний, т. е. элементы, вошедшие в выборку, возвращаются обратно в генеральную совокупность, благодаря чему безусловная вероятность каждого элемента быть избранным не меняется в процессе отбора. При бесповторной выборке элементы, однажды выбранные, уже не могут выбираться снова: они исключаются. Таким путем по ходу отбора объем совокупности уменьшается, и состав ее изменяется, так что условные вероятности быть выбранными для оставшихся элементов все время увеличиваются. В свою очередь это означает, что элементы выборки оказываются зависимыми, причем эта фиктивная зависимость должна быть учтена, иначе ее можно ошибочно приписать самой генеральной совокупности. Понятно, что чем больше объем исходной совокупности, тем меньше различия между простой и бесповторной выборками.

По объему принято выделять малые и большие выборки. Малы-

ми считают выборки, объем которых  $n \leq 30$ . Понятие большой выборки не определено. Рассматривая массивы данных, полученных при изучении двумерной системы, мы выделили три класса объемов выборок, основываясь на возможности сгруппировать данные и оценить распределения величин в системе, а также определить значения всех или только некоторых числовых характеристик. При таком практически полезном подходе малая выборка имеет объем  $n < 30$ , средняя  $30 \leq n \leq 200$  и большая  $n > 200$ . Конечно, это деление весьма условно. Наивно было бы судить о неизвестных свойствах совокупности по выборке малого объема. Поэтому малые выборки используются при статистическом контроле известных свойств изученных совокупностей. Большие выборки, наоборот, используются как раз для установления неизвестных свойств и параметров совокупности. Однако, что считать здесь большим, зависит от этих свойств и параметров. Во избежание порочного круга вводится понятие *кратического объема выборки*, которое мы рассмотрим дальше.

Приведенная типология не исчерпывает разнообразия выборок. Так, по масштабам охвата исследуемых людей в нашей стране целесообразно выделять национальную, региональные, городские, районные выборки, а также выборки для психологического изучения различных социальных общностей, в том числе — выборки на предприятиях, в учреждениях и организациях. Национальная выборка применяется для стандартизации и адаптации зарубежных тестов как стандартных средств психологических измерений. Для этой цели можно использовать и выборки меньших масштабов, адаптируя психодиагностическую методику в рамках отрасли или даже отдельного предприятия. При этом полученные нормативы следует использовать повсеместно, как того требует наука об измерениях.

По длительности периода использования выделяются краткосрочные выборки, которые применяются в большинстве традиционных научных исследований, и долгосрочные выборки — так называемые панели, которые применяются для изучения общественных мнений, мотивов, предпочтений и прочих массовых психических явлений в экономической, политической, социальной и других отраслях психологии. Особенностью панели служит обеспечение инвариантности качественно-количественной структуры, репрезентативной в отношении той социальной общности, феномены которой подлежат текущему контролю, в условиях естественной динамики людей, образующих панель. Обеспечение инвариантности достигается путем создания специального выборочного резерва, из которого замещаются выбывающие по каким-либо причинам люди. Таким образом панель сохраняет гомогенность при

многочисленных периодически повторяющихся обследованиях

По количеству использований выделяются однократные и многократные (серийные) выборки. Как правило, однократные выборки создаются и применяются с ограниченной целью разведки, т. е., как говорят социологи, в пилотажных исследованиях. Для установления научных фактов необходимо воспроизводить эмпирические результаты в стационарных условиях, а для выявления научных законов нужно измерять характерные изменения результатов при целенаправленном варьировании условий, от которых эти результаты могут зависеть. В обоих случаях требуются повторные, иногда многосерийные выборки, причем гомогенные по стохастической структуре от серии к серии. В отличие от панели такие выборки состоят из переменного состава людей, но с одинаковыми наборами свойств в различных сериях. Это снижает возможный «консерватизм» панели и увеличивает статистику столь нужную при выборочном изучении человеческих совокупностей.

Назначение выборки исчерпывается получением сведений о генеральной совокупности. Поэтому совокупность и выборка должны содержательно и формально характеризоваться на качественном уровне одними и теми же свойствами, параметрами и их системами, а на количественном уровне — одними и теми же числовыми и функциональными мерами. В этой связи можно подвести итоги основным средствам формального описания случайных явлений, рассмотренным в предыдущих главах, разделяя все количественные характеристики совокупностей и выборок на две группы: параметрические (числовые) и непараметрические (функциональные), а затем классифицируя их, как показано на рис. 5.2. и 5.3.

С формальной точки зрения различия между выборкой и генеральной совокупностью могут состоять в следующем.

1. Выборка как система с меньшим числом описывающих факторов (событий, величин, функций), чем генеральная совокупность, — такая выборка часто нерепрезентативна (или малореизентативна).

2. Функциональные характеристики выборки отличаются от соответствующих характеристик генеральной совокупности. В зависимости от степени (приемлемости) отличий оценивается репрезентативность выборки.

3. Параметры выборки отличаются от параметров генеральной совокупности, причем степень отличия (приемлемая или нет) вы-

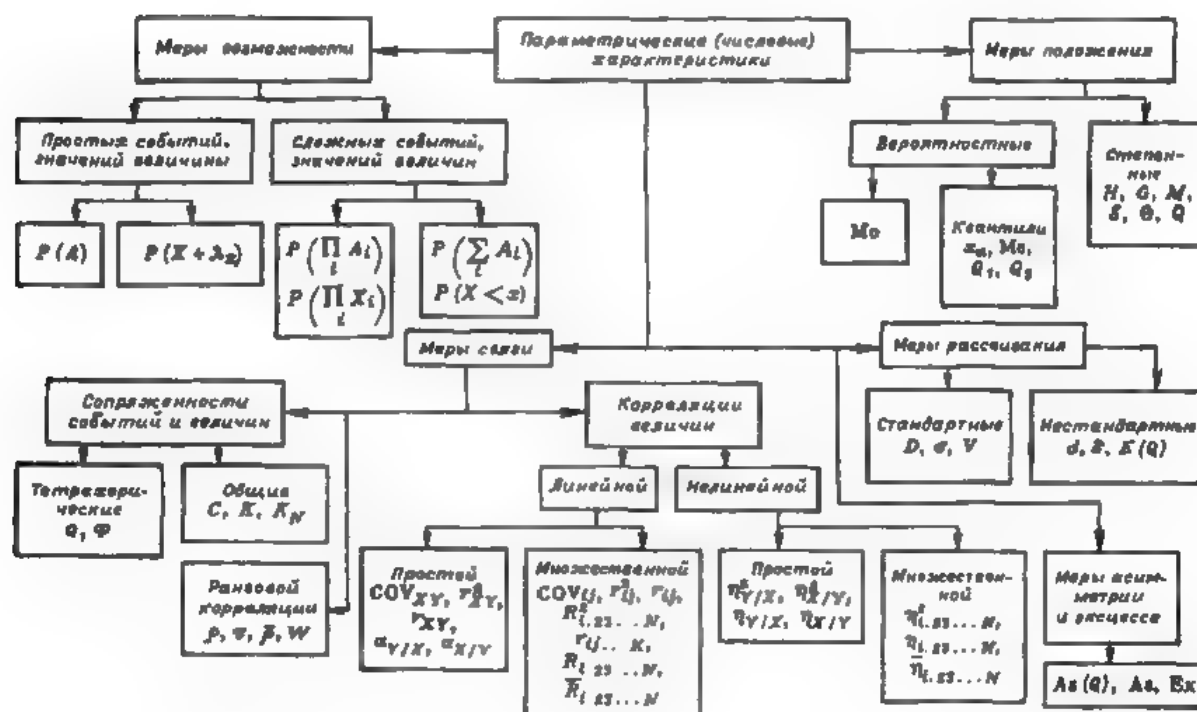


Рис. 5.2. Классификация параметрических характеристик совокупностей и выборок.

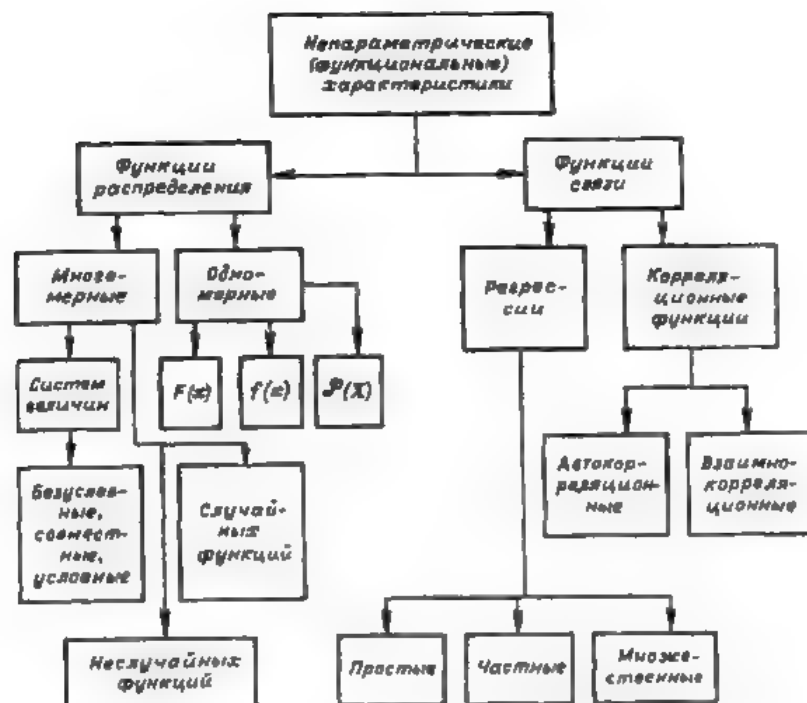


Рис. 3.3. Классификация непараметрических характеристик совокупностей и выборок

ражает репрезентативность выборки. Так как многие функциональные характеристики могут быть определены через параметры, оценивание параметров генеральной совокупности посредством параметров выборки наиболее распространено.

Нетрудно понять, что все указанные различия в конечном счете по степени находятся в обратной зависимости от объема выборки. Действительно, на рис. 1.1 было показано, как изменяются средние значения частоты появления цифры «7» от выборки к выборке (объемом  $n = 50$ ). На рис. 1.2 можно видеть, что размах, характеризующий рассеивание выборочных средних, уменьшается при увеличении  $n$ . В общем случае при небольших  $n$  от выборки к выборке меняется и форма распределения случайных переменных. Так что, например, из нормально распределенной совокупности можно при малом  $n$  получить выборочные распределения любой произвольной формы.

Обращаясь еще раз к определению частоты как отношению частоты ( $f$ ) к числу наблюдений ( $n$ ), подчеркнем ее смысл. Частотность

означает, что событие (число) в массе серий (выборок) по  $n$  испытаний в среднем встречается  $f$  раз. Это, следовательно, не исключает того, что оно вообще не встретится или встретится все  $n$  раз:  $0 \leq f \leq n$ , как следует из определения частоты и биномиального закона распределения. Но тогда очевидно, что редкие события можно наблюдать при большом  $n$ , так как они лишь случайно могут появиться в выборке с малым  $n$ . Наоборот, в малой выборке преимущественно появляются частые события.

Теперь представим себе, что объем генеральной совокупности  $N$  позволяет сделать большое число ( $R$ ) случайных выборок малого объема  $n_i$  ( $N \gg n_i, i = 1, 2, \dots, R$ ). Будем «вычерпывать» объем  $N$  выборками объема  $n_i$ , тогда при зависимых испытаниях  $N = \sum_{i=1}^R n_i$ . Если допустить, что изучаемый параметр в генеральной совокупности распределен нормально, то при условии случайного отбора очевидно, что с вероятностью 0,683 примерно две трети всех выборок охватят лишь значения неизвестного параметра  $\theta$  в пределах  $\theta \pm \sigma_\theta$ , и лишь 0,046 всех выборок охватят значения параметра в пределах  $\theta < -2\sigma_\theta$  и  $\theta > 2\sigma_\theta$ . Отсюда следует практически важный вывод. Функции распределения случайных величин в генеральной совокупности можно оценивать разными путями: 1) обобщением многих случайных выборок небольшого объема, а потому в отдельности нерепрезентативных; 2) отображением с помощью одной большой случайной выборки, объем которой с классических позиций (см. § 5.3) достаточен для репрезентативности, 3) моделированием по результатам специальных социолого-психологических исследований, по данным переписей либо анкетным данным в службах кадров организаций и предприятий. Первый путь не гарантирует научно обоснованной репрезентативности результата, второй — связан с весьма значительным числом необходимых наблюдений, а значит, с большой потребностью в ресурсах. Третий путь заменяет проблему репрезентативности проблемой адекватности модели генеральной совокупности. Но именно третий путь представляется перспективным для психологической практики.

Суть моделирования генеральной совокупности сводится к следующему. Сначала выбираются свойства, существенные для целей исследования, и признаки либо градации этих свойств, которые принимаются за базис модели. Затем из теоретических соображений (равномерное, нормальное распределение) либо эмпирически — по данным переписей, социологических обследований, анкетным сведениям и даже по результатам оценок, полученных по первому или второму из вышеказанных путей, определяется дифференциальная функция распределения частот в полном со-  
вмещенном распределении либо в частных распределениях, сово-



Например, в параграфе 1.3 была рассмотрена трехмерная система событий, полезная для диагностических целей:  $\{X \otimes Y \otimes Z\} = \{(m, j) \cdot (e, i) (\bar{n}, n)\}$ , где  $X = (m, j)$  — мужской или женский пол,  $Y = (e, i)$  — экстраверсия — интроверсия,  $Z = (\bar{n}, n)$  — отсутствие или наличие выраженного нейротизма (по Г. Айзенку) у обследуемых людей. Для этой системы базис модели образуется декартовым произведением выделенных градаций:  $\{X \otimes Y \otimes Z\} = \{m\bar{n}\bar{n}, m\bar{n}n, m\bar{n}i\bar{n}, m\bar{n}in, j\bar{n}\bar{n}, j\bar{n}n, j\bar{n}i\bar{n}, j\bar{n}in\}$ . Так как нам уже известно, что эти совмещенные события неравновозможны, то пользоваться равномерными распределениями нельзя и, как можно думать, считать компоненты системы независимыми некорректно. Поэтому целесообразно воспользоваться восстановлением полного распределения модели по частным распределениям, которые необходимы и достаточны по (1.27) для этой цели. Так,

Ради примера зададимся правдоподобными данными и вычислим по ним распределение частот модели:

Для проверки расчета суммируем столбцы полученной матрицы и установим распределение по полу:

Таким образом, расчет верен.

Отредактировал и опубликовал на сайте



Параметрические характеристики выборки принято называть *оценками* в отличие от параметрических характеристик совокупности, которые называются *параметрами*. Таким образом, среднее арифметическое значение выборки есть оценка среднего арифметического значения генеральной совокупности; частота (эмпирическая вероятность) — это оценка вероятности, и т. д. Понятно, что величина оценки может отличаться от величины параметра во всех случаях, если объем выборки меньше объема совокупности. При этом в силу случайности отбора элементов в выборку любая оценка является случайной величиной. Действительно, пусть имеется большое число  $R$  выборок фиксированного объема  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, R$ ), в каждой из которых определена оценка  $t_i$  некоторого параметра  $\theta$  генеральной совокупности. Флуктуируя от выборки к выборке, значения  $t_i$  распределяются в некоторой области возможных значений  $t_{\min} \leq \theta \leq t_{\max}$  с вероятностями  $P(\theta \leq t_i)$ , совокупность которых образует функцию распределения  $F(t)$  произвольного вида. Если  $\theta$  — величина непрерывная, то существует и плотность вероятности  $f(t) = \frac{1}{\lambda_i} P(t_i \leq \theta \leq t_i + \lambda_i)$ , где  $P(t_i \leq \theta \leq t_i + \lambda_i)$  — вероятности параметру  $\theta$  быть оцененным по выборке значениями  $t_i$  на интервале квантования  $\lambda_i$ . Таким образом, оценка  $t_i$  некоторого параметра  $\theta$  является «полноправной» случайной величиной и описывается уже рассмотренным аппаратом качественных свойств и количественных характеристик.

Для распределений оценок принято учитывать свойства положения, рассеивания, асимметрии, а также связи (в случае выборки по схеме зависимых испытаний). При этом используются соответствующие меры; в частности, среднее арифметическое значение оценки как мера ее положения, дисперсия и стандартное отклонение оценки как меры ее рассеивания. С учетом этих свойств распределения выборочной оценки обычно определяют два вида оценивания: точечное и интервальное (доверительное).

*Точечное* оценивание основывается на учете положения, рассеивания, а также асимметрии распределения оценки. Мерой здесь служит *математическое ожидание* параметра  $\theta$ , определяемое

для конечных по объему совокупностей как среднее арифметическое из оценок  $t_i$ :  $M[\theta] = \sum_{i=1}^R t_i P(t_i \leq \theta \leq t_i + \lambda_i)$ , а для  $R \rightarrow \infty$ :  $M[\theta] = \int_1^\infty t f(t) dt$ . Таким образом, математическое ожидание параметра есть среднее арифметическое из оценок, которые, в свою очередь, являются выборочными средними из значений параметра, т. е. это среднее из средних.

В предыдущих главах мы рассматривали значительное число разных мер положения, рассеивания и т. д. (см. рис. 5.2) Какие же из этих мер более всего подходят для оценки соответствующих параметров совокупности? Выбор оценки должен основываться на критериях, предложенных Р. А. Фишером, с позиции которых оценкам приписываются свойства состоятельности, эффективности, несмещенности и достаточности.

Оценка  $t$  является *состоятельной* (или *подходящей*) для параметра  $\theta$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} t = \theta$ , где  $n$  — объем выборки, а  $N$  — объем совокупности. Иначе говоря, при  $n \rightarrow N$  вероятность разности  $t - \theta$  стремится к нулю, если  $t$  — состоятельная оценка  $\theta$ . Рассмотренные нами оценки в своем большинстве являются состоятельными. Поэтому чтобы выбрать из них наилучшую, учитывают дисперсию  $D(t)$ . *Эффективной* называется оценка, у которой наименьшая дисперсия. Степень эффективности оценивают дисперсионным отношением:  $F = D_0(t) / D_m(t)$ , где  $D_0(t)$  — большая и  $D_m(t)$  — меньшая по величине дисперсия оценки. Чем больше отличается  $F$  от единицы, тем эффективнее оценка  $t$ , имеющая меньшую дисперсию  $D_m(t)$ \*. Оценка должна быть *несмещенной*. Это означает, что  $M[t] = \theta$ , т. е. математическое ожидание выборочной оценки равно значению параметра в генеральной совокупности. Здесь отметим, что несмещенность оценок обеспечивается, во-первых, симметричностью их распределений, а во-вторых, случайным отбором. Оценка, наконец, должна быть *достаточной* в том смысле, что никакая другая оценка не дает дополнительной информации об изучаемом параметре.

Представление об указанных свойствах для некоторых мер (из числа рассмотренных нами) при их использовании в качестве оценок можно получить из табл. 5.1. В этой связи принято считать, что наилучшей (в смысле удовлетворения критериям) оценкой положения является среднее арифметическое. Оценки рассеивания и связи уже удовлетворяют лишь части критериев. Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности служит величина  $s^2 = \frac{n}{n-1} D$ , где  $s$  — оценка стандартного отклонения,  $D$  — выборочная дисперсия,  $n$  — объем выборки. Заметим, что  $s^2$  не

\*Более подробно дисперсионное отношение  $F$  будет рассмотрено в параграфе 5.2.

Таблица 5.1

## Свойства точечных оценок

Оценка	Состоя- тельная	Эффек- тивная	Несме- щенная	Доста- точная
Частость ( $p$ ) .....	Да	Да	Да	Да
Мода ( $Mo$ ) .....	Да	Нет	Да	Нет
Медиана ( $Me$ ) .....	Да	Нет	Да	Нет
Среднее арифметическое ( $M$ ) .....	Да	Да	Да	Да
Дисперсия ( $D$ ) .....	Да	Да	Нет	Да
Стандартное отклонение ( $\sigma$ ) .....	Да	Да	Нет	Да
Коэффициент сопряженности Чупрова ( $K$ ) .....	Да	Да	Да	Да
Коэффициент корреляции Брауэ — Пирсона ( $r_{ij}$ ) ...	Да	Да	Нет	Нет

является выборочной дисперсией. Это просто случайная величина, служащая несмещенной оценкой генеральной дисперсии, но смещающая выборочную дисперсию на величину  $\pi \cdot (n-1)$ . Легко понять, что с увеличением  $n$  отношение  $\pi : (n-1)$  быстро сходится к единице и  $s^2$  сходится к  $\sigma^2 = D$ . Наиболее распространенная линейная мера корреляции — коэффициент Брауэ — Пирсона  $r_{ij}$  — является смещенной оценкой, причем смещение увеличивается с увеличением модуля значения  $|r_{ij}|$ , как видно из рис. 5.4. В этой связи в качестве несмещенной оценки используется предложенное Фишером  $z$ -преобразование:

$$z_{ij} = 0,5 \ln \frac{1 + r_{ij}}{1 - r_{ij}}.$$

Определить  $z_{ij}$  для  $r_{ij}$  можно по табл. III Приложения 2.

Для построения оценок, удовлетворяющих указанным выше критериям, Фишер разработал статистический метод точечного оценивания — метод максимального правдоподобия, который мы рассмотрим в § 5.3.

*Интервальное* (доверительное) оценивание базируется на учете рассеивания, преимущественно симметричного. Существо этого способа оценивания состоит в том, чтобы указать *доверительный интервал*:

$$t_i - t_\alpha \sigma(\theta) \leq \theta \leq t_i + t_\alpha \sigma(\theta), \quad (5.1)$$

в котором  $\theta$  — значение искомого параметра — заключено с доверительной вероятностью  $1 - \alpha$ , если  $\sigma(\theta)$  — стандартное отклонение параметра, и  $t_\alpha$  — квантиль распределения параметра, отсекающий слева и справа долю вероятности, равную  $\alpha$ . Обычно при-

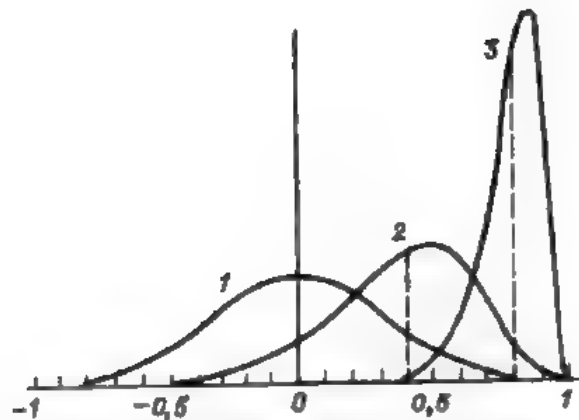


Рис. 5.4. Распределение выборочной оценки коэффициента линейной корреляции ( $\tilde{r}$ )

По оси ординат — объем выборки ( $n = 13$ ), по оси абсцисс — выборочная оценка коэффициента. 1 —  $\tilde{r} = 0$ ; 2 —  $\tilde{r} = 0,4$ ; 3 —  $\tilde{r} = 0,8$ .

нимают  $\alpha = 0,05$ ,  $0,01$ , реже —  $\alpha = 0,1$  и  $0,001$ . Смысл интервального оценивания параметра (на примере арифметического среднего) поясняется на рис. 5.5.

На основе интервальных оценок параметров, образующих функцию распределения, осуществляется оценивание доверительной области. Наиболее распространено построение доверительной области для простой регрессии (рис. 5.10), что будет рассмотрено ниже.

Для получения интервальных оценок необходимо уметь вычислять  $\sigma(\theta)$  — стандартные отклонения параметров, которые принято называть *стандартными ошибками* (погрешностями) выборочных оценок параметров. Определение этих ошибок зависит от многих факторов, но прежде всего от объема выборки. Сводка формул для оценки стандартных погрешностей многих параметрических характеристик представлена в табл. 5.2. Там же даны соответствующие разъяснения. Дополнительно заметим, что, строго говоря, применение стандартных погрешностей правомерно лишь тогда, когда распределение статистик сходится к нормальному закону. Но это выполняется для разных статистик с различной скоростью.

Для психодиагностических методик важное значение имеет точность результата измерения, зависящая от конструкции методики как инструмента измерения. Оценивается эта точность с помощью так называемой *инструментальной погрешности*. Она представляет собой стандартное отклонение результата измерения как выборочного среднего от среднего в совокупности и определяет-

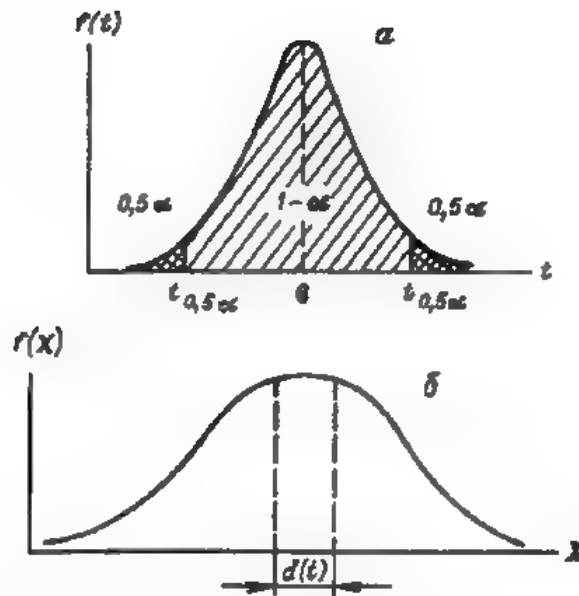


Рис. 5.5. Интервальное оценивание параметра.

$a$  — плотность выборочного распределения оценок  $t$ , параметра  $\theta$  в стандартном масштабе:  $t = (t_i - \theta) : \sigma(\theta)$ , где  $\sigma(\theta) = \sqrt{D(X) : n}$  ( $D(X)$  — выборочная дисперсия,  $n$  — объем выборки),  $1 - \alpha$  — доверительная вероятность,  $t_{0.5\alpha}$  — квантили распределения Стьюдента,  $\theta$  — математическое ожидание параметра в совокупности;  $b$  — плотность распределения изучаемой случайной величины  $X$ , параметр которой оценивается (в данном случае это среднее арифметическое значение),  $d(t)$  — доверительный интервал в стандартном масштабе:  $d(t) = t_i \pm t_{\alpha} \sigma(\theta)$ .

ся из отношения остаточной дисперсии методики (теста) к объему той выборки, на которой была стандартизована либо адаптирована методика:

$$\sigma = \sqrt{D_o : n}.$$

Здесь  $\sigma$  — инструментальная погрешность теста,  $D_o$  — остаточная дисперсия, которая определяется в общем случае формулами (3.13), а применительно к линейной функции от случайных аргументов  $X_i$  (см. раздел 4.2.2) как результат по субтестам теста (блокам анкеты и т. п.) — суммой ковариаций из ковариационной матрицы теста, взвешенных произведениями коэффициентов регрессии:

$$D_o(Y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \text{COV}_{ij},$$

Таблица 5.2

Стандартные погрешности статистического оценивания параметров  
 $n$  — везде объем выборки

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
<b>Для параметров возможности</b>		
Вероятность события (значения величин): $P(A)$ ; $P(A/B)$ ; $P(X = x)$ ; $P(X < x)$	$\sigma(P) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}P(1-P)}, \\ \sqrt{\frac{1}{n}F(x)(1-F(x))} \end{cases}$	Для вероятностей событий, для функций распределения
Плотность вероятности $f(x)$	$\sigma[f(x)] = \sqrt{\left[ \frac{f'(x)}{24f(x)} \lambda_x \right]^2 + \frac{1}{n\lambda_x f(x)}}$	Для плотностей распределения
<b>Для параметров положения</b>		
Медиана $Me$	$\sigma(Me) = \begin{cases} \frac{0,5}{\sqrt{n}} u_0, \\ \frac{1,2533}{\sqrt{n}} \sigma \end{cases}$	$u_0$ — ордината плотности, соответствующая медиане, $\sigma$ — стандартное отклонение нормально распределенной генеральной совокупности
Квартиль $Q_i$ ( $i = 1, 3$ )	$\sigma(Q_i) = \begin{cases} \frac{4u_0 \sqrt{\frac{3}{n}}}{1,3628}, \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$	То же
Начальный момент $k$ -й степени $m_k$	$\sigma(m_k) = \sqrt{\frac{1}{n}(m_{2k} - m_k^2)}$	В любых условиях

Продолжение табл. 5.2

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Среднее арифметическое значение $M(X)$	$\sigma[M(X)] = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$	$\sigma(X)$ — стандартное отклонение в генеральной совокупности. Если оно неизвестно, то заменяется выборочной оценкой $S(X)$
Разность двух средних арифметических значений $M(X_1)$ и $M(X_2)$	$\sigma\{ M(X_1) - M(X_2) \} = \sqrt{\frac{\sigma^2(X_1)}{n_1} + \frac{\sigma^2(X_2)}{n_2}}$	$n_1$ — для выборки $X_1$ и $n_2$ — для выборки $X_2$ ; $\sigma(X_1)$ и $\sigma(X_2)$ — генеральные стандартные отклонения
То же	$\sigma\{ M(X_1) - M(X_2) \} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} [x_i - M(X_1)]^2 + \sum_{j=1}^{n_2} [x_j - M(X_2)]^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}}$	Если $\sigma(X_1)$ и $\sigma(X_2)$ неизвестны
<b>Для параметров рассеивания</b>		
Размах распределения $d$	$\sigma(d) = \sqrt{\frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)^2}}$	Без ограничений
Сумма абсолютных отклонений $\pi \delta_x = \sum_{i=1}^n  x_i - M(X) $	$\sigma(\pi \delta_x) = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$	$\pi \approx 3,14$ ; $\sigma(\pi \delta_x)$ — так называемый коэффициент Питера
Среднее арифметическое отклонение $\delta_x$	$\sigma(\delta_x) = \sigma(x) \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)}$	Для нормального распределения с генеральным стандартом $\sigma(x)$

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Дисперсия D	$\sigma(D) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}(\mu_4 - \mu_2^2)}, \\ D\sqrt{\frac{2}{n}} \end{cases}$	Для любого распределения, для нормального распределения
Стандартное отклонение $\sigma(X)$	$\sigma[\sigma(X)] = 0,5\sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\mu_2}}$ $\sigma[\sigma(X)] \cong \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$	В любом случае, приближенно — в случае асимптотически нормального распределения, точно — для нормального распределения
Разность двух выборочных дисперсий $ S_1^2 - S_2^2 $	$\sigma( S_1^2 - S_2^2 ) = \begin{cases} 2S_1S_2\sqrt{\frac{1 - r_{12}^2}{n - 2}}, \\ \frac{2S_1S_2}{\sqrt{n - 2}}, \\ 2S_1S_2\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{(n_1 + n_2 - 2)n_1n_2}} \end{cases}$	Для зависимых выборок равного объема, для независимых выборок равного объема, для независимых выборок неравных объемов $n_1$ и $n_2$
Коэффициент вариации Пирсона V (в %)	$\sigma(V) = V\sqrt{\frac{1}{2n}\left[1 + 2\left(\frac{V}{100}\right)^2\right]}$	Для асимптотически нормального распределения
Для параметров асимметрии и эксцесса		
Коэффициент асимметрии $A_3$	$\sigma(A_3) = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} \approx \sqrt{\frac{6}{n+3}}$	Приближение допустимо при больших $n$
Коэффициент эксцесса $E_3$	$\sigma(E_3) = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}} \approx \sqrt{\frac{24}{n+5}}$	То же

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Для параметров связи		
Коэффициент ранговой корреляции Кендалла $\tau$	$\sigma(\tau) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4n+10}{n(n-1)}}$	—
Коэффициент ранговой корреляции Спирмена $\rho$	$\sigma(\rho) = \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{n - 2}}$	В предположении, что ранжированная непрерывная переменная
Коэффициент детерминации $\eta_{u/s}^2$	$\sigma(\eta_{u/s}^2) = \sqrt{\frac{1 - \eta_{u/s}^2}{n - N}}$	$u$ — функция, $s$ — аргумент, $N$ — число рассматриваемых значений $u$ , из которых вычислен $\eta_{u/s}^2$
Коэффициент линейной корреляции Браве—Пирсона $r_{12}$	$\sigma(r_{12}) = \begin{cases} \frac{1 - r_{12}^2}{\sqrt{n}}, \\ \frac{1 - r_{12}^2}{\sqrt{n - 1}}, \\ \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2}{n - 2}} \end{cases}$	Формула Пирсона — Филоно для выборок $n > 500$ , при $n > 100$ , при $n < 100$
$\lambda_{12}$ -преобразование Фишера для $r_{12}$	$\sigma(z_{12}) = \frac{1}{\sqrt{n - 3}}$	Для любых условий
Разность $\lambda$ -преобразований $ z_1 - z_2 $	$\sigma( z_1 - z_2 ) = \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 6}{(n_1 - 3)(n_2 - 3)}}$	При отсутствии (или неучете) частных корреляций первого и более высоких порядков

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Степень линейности простой регрессии, определяемая разностью $\eta^2_{u/x} - r^2_{u/x}$	$\sigma(\eta^2_{u/x} - r^2_{u/x}) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{\eta^2 - r^2}{n} [1 - (\eta^2 - r^2)(2 - \eta^2 - r^2)]}, \\ \sqrt{\frac{\eta^2 - r^2}{N-2}} \end{cases}$	В зависимости от объема выборки, в зависимости от числа $N$ рассматриваемых значений $u$
Угловой коэффициент простой линейной регрессии $a_{u/x}$	$\sigma(a_{u/x}) = \begin{cases} \frac{\sigma(u)}{\sigma(z)} \sqrt{\frac{1 - r^2_{u/x}}{n-2}}, \\ \frac{\sigma(u)}{\sigma(z)} \frac{1 - r^2_{u/x}}{\sqrt{n-1}} \end{cases}$	При малых $n < 100$ , при больших ( $n > 100$ ) выборках
Свободный член простой линейной регрессии $a_{0u}$	$\sigma(a_{0u}) = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [u_i - M(u)]^2}{\frac{1}{n} + \frac{[M(u)]^2}{\sum_{i=1}^n [z_i - M(z)]^2}}}$	—
Коэффициент множественной нелинейной детерминации $\eta^2_{1,23...N}$	$\sigma(\eta^2_{1,23...N}) = \sqrt{\frac{1 - \eta^2_{1,23...N}}{n - N}}$	$N$ — число величин в системе
Коэффициент множественной корреляции $R^2_{1,23...N}$	$\sigma(R^2_{1,23...N}) = \frac{1 - R^2_{1,23...N}}{\sqrt{n - N}}$	То же
Коэффициент частной корреляции $r^2_{1,23...N}$	$\sigma(r^2_{1,23...N}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - r^2_{1,23...N}}{n - N}}, \\ \frac{1 - r^2_{1,23...N}}{\sqrt{n - N}} \end{cases}$	При малых $n < 100$ , при больших ( $n > 100$ ) выборках
Коэффициент множественной линейной регрессии $\beta_j$	$\sigma(\beta_j) = \frac{1 - R^2_{1,23...N}}{(1 - R^2_{1,23...N})^{(n-N)}}$	—

Оцениваемый параметр	Формулы стандартной погрешности	Обозначения и условия применимости
Парциальный коэффициент множественной линейной регрессии $a_{1j}$	$\sigma(a_{1j}) = \frac{\sigma_{1,23...N}}{\sigma_{1,23...N} \sqrt{n-N}}$	$\sigma_{1,23...N}$ и $\sigma_{j,23...N}$ определяются из формулы (4.11)
Разность двух коэффициентов множественной детерминации $\Delta\eta^2_{12}$	$\sigma(\Delta\eta^2_{12}) = \sqrt{\frac{ \Delta\eta^2_{12} }{ N_1 - N_2 }}$	$\Delta\eta^2_{12} = \eta^2_{1,23...N_1} - \eta^2_{1,23...N_2}$ , где $N_1$ и $N_2$ — число случайных аргументов. Справедливо и для линейной регрессии

Для величины функционально характеризуемого параметра

Теоретическое значение условного среднего $u^*$ в простой регрессии	$\sigma(u^*) = \sigma(u) \sqrt{1 - \eta^2_{u/x}}$	Для регрессии $u = \psi(x)$ любой формы; $\sigma(u)$ — стандартное отклонение в совокупности — можно заменить выборочной оценкой $s(u)$ , $\eta^2_{u/x}$ — коэффициент детерминации
То же в линейной множественной регрессии $u^* = \sum_{i=1}^N a_i X_i$	$\sigma(u^*) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \text{COV}(X_i, X_j)}, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2 D[X_i]} \end{cases}$	В общем случае, при независимых слагаемых
То же в множественной регрессии произвольной формы $u^* = \psi(X_1, X_2, \dots, X_N)$	$\sigma(u^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \frac{\partial \psi}{\partial X_j} \text{COV}(X_i, X_j)}$	$\frac{\partial \psi}{\partial X_i}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial X_j}$ — частные производные функции $\psi$ по $i$ -му и $j$ -му аргументам соответственно



где

$$Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i + b,$$

$N$  — число,  $i, j \in N$  — номера субтестов,  $X$  — шкальные оценки по субтестам,  $a$  и  $b$  — коэффициенты регрессии.

К сожалению, в руководствах по тестам оценка инструментальных погрешностей не приводится и отсутствуют ковариационные матрицы, так что их приходится вычислять по корреляционным матрицам. В результате качество многих распространенных тестов как средств психологического измерения остается неопределенным, а достоверность результатов тестирования зачастую вызывает сомнения даже у малосведущих в метрологии психологов. Однако качество тщательно отработанного эмпирически и стандартизованного в национальном масштабе теста может быть весьма высоким. Так, известный тест Векслера для диагностики уровня интеллекта взрослых людей (тип WAIS) имеет, по нашим подсчетам, инструментальную погрешность порядка  $\pm 0,5$  единицы IQ (при доверительной вероятности 0,999) и, таким образом, является первоклассным измерительным прибором.

#### 5.1.4. Надежность статистических оценок

В отличие от обычного предположения научная гипотеза является предположением, допускающим практическую проверку хотя бы в будущем. Статистическая гипотеза — это научная гипотеза, допускающая статистическую проверку. Под статистической гипотезой обычно понимают формальное предположение о том, что сходство (или различие) некоторых параметрических либо функциональных характеристик случайно (или, наоборот, неслучайно). Поэтому содержательные предположения по поводу исследуемых явлений должны быть переформулированы определенным образом. Например, изучается влияние на время реакции ( $u$ ) фактора  $z$ . Пусть имеются две серии опытов: экспериментальная, где  $z \neq 0$ , и контрольная, где  $z = 0$ . Обычная научная гипотеза в такой ситуации гласит: фактор  $z$  влияет (или не влияет) на время реакции. Статистическая гипотеза формулируется иначе: безусловное распределение времени реакции  $F(u)$  неслучайно (или случайно) отличается от условного распределения  $F(u/z)$ . В дальнейшем изложении будут приведены и другие формулировки статистических гипотез.

Проверка статистической гипотезы состоит в том, чтобы определить вероятность случайности или неслучайности различий (или сходства). При этом гипотеза о случайности (все равно

различия или сходства) называется «нуль»-гипотезой ( $H_0$ ), а гипотеза о неслучайности называется альтернативной ( $H_1$ ). Заметим, что проверка предполагает, во-первых, сомнение в истинности гипотезы и, во-вторых, наличие хотя бы двух возможных исходов: принять гипотезу или отбросить ее. Следовательно, можно рассматривать двумерную систему альтернативных событий: проверяемая гипотеза объективно истинна или ложна и действия исследователя, проверяющего гипотезу, — принять ее либо отклонить. Введя подходящие обозначения, записываем:  $\mathcal{F} = (И, Л), \mathcal{Z} = (П, О)$ . Для этой системы принято в общем виде задавать безусловное распределение априорных вероятностей гипотезы

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \{P(И), P(Л)\} \quad (5.2)$$

и матрицу условных распределений вероятностей для действий лица, проверяющего гипотезу,

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}/\mathcal{F}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} И & Л \end{matrix} \\ \begin{matrix} П \\ О \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (5.3)$$

где  $1-\alpha = P(П/И)$ ,  $\alpha = P(О/И)$  — условные вероятности принять или отклонить гипотезу, если она истинна, а  $\beta = P(П/Л)$ ,  $1-\beta = P(О/Л)$  — условные вероятности тех же действий, когда гипотеза ложна (обозначения  $\alpha$  и  $\beta$  общеприняты).

Распределения (5.2 и 5.3) необходимы и достаточны, чтобы восстановить полное распределение вероятностей данной системы по формуле (1.22):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{Z} \cdot \mathcal{F}) &= \mathcal{P}(\mathcal{F}) \circ \mathcal{P}(\mathcal{Z}/\mathcal{F}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} И & Л \end{matrix} \\ \begin{matrix} П \\ О \end{matrix} & \left[ \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} P(И) \quad \begin{pmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix} P(Л) \right] \end{matrix} = \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} И & Л \end{matrix} \\ \begin{matrix} П \\ О \end{matrix} & \begin{bmatrix} (1-\alpha)P(И) & \beta P(Л) \\ \alpha P(И) & (1-\beta)P(Л) \end{bmatrix} \end{matrix}. \end{aligned}$$

Теперь по полному распределению можно установить частное распределение действий исследователя:

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \sum_{\mathcal{F}} \mathcal{P}(\mathcal{Z} \cdot \mathcal{F}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} П & О \end{matrix} \\ \begin{matrix} П \\ О \end{matrix} & \begin{bmatrix} (1-\alpha)P(И) + \beta P(Л) & \\ \alpha P(И) + (1-\beta)P(Л) & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

и вторую матрицу условных распределений так называемых апостериорных вероятностей гипотезы по формулам (1.23):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\mathcal{T}/\mathcal{Z}) &= \mathcal{P}(\mathcal{Z}\mathcal{T})\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \frac{\Pi}{\text{O}} \left( \frac{P(\text{И}/\Pi) \quad P(\text{Л}/\Pi)}{P(\text{И}/\text{O}) \quad P(\text{Л}/\text{O})} \right) = \\
 &= \frac{\Pi}{\text{O}} \left\{ \begin{array}{c} [(1-\alpha)P(\text{И}), \beta P(\text{Л})] : [(1-\alpha)P(\text{И}) + \beta P(\text{Л})] \\ \hline [\alpha P(\text{И}), (1-\beta)P(\text{Л})] : [\alpha P(\text{И}) + (1-\beta)P(\text{Л})] \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{\Pi}{\text{O}} \left[ \begin{array}{cc} \text{Л} & \text{И} \\ \frac{(1-\alpha)P(\text{И})}{(1-\alpha)P(\text{И}) + \beta P(\text{Л})} & \frac{\beta P(\text{Л})}{(1-\alpha)P(\text{И}) + \beta P(\text{Л})} \\ \frac{\alpha P(\text{И})}{\alpha P(\text{И}) + (1-\beta)P(\text{Л})} & \frac{(1-\beta)P(\text{Л})}{\alpha P(\text{И}) + (1-\beta)P(\text{Л})} \end{array} \right], \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

где по-прежнему условные распределения разделены пунктиром. Отметим, что апостериорные условные вероятности в (5.4) определяются на основании принципа Байеса (см. раздел 5.3.2) и служат для эмпирического уточнения априорно выбранных безусловных вероятностей истинности или ложности гипотезы.

Поведение исследователя, проверяющего статистическую гипотезу, может быть верным или неверным. Верное поведение (событие ВП) объединяет принятие объективно истинной гипотезы (событие ПИ) и отклонение ложной (событие ОЛ). Неверное поведение (событие НП) объединяет ошибки первого (ОИ) и второго (ПЛ) рода. Тогда вероятности верного и неверного поведения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P(\text{ВП}) &= P(\text{ПИ}) + P(\text{ОЛ}) = P(\text{И})(1-\alpha) + (1-\beta)P(\text{Л}), \\
 P(\text{НП}) &= P(\text{ПЛ}) + P(\text{ОИ}) = P(\text{И})\alpha + \beta P(\text{Л}), \\
 P(\text{ВП}) + P(\text{НП}) &= 1.
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отсюда можно видеть, что при фиксированных значениях  $P(\text{И})$  и  $P(\text{Л})$  вероятности верного и неверного поведения непосредственно зависят от  $\alpha$ - и  $\beta$ -вероятностей ошибок первого и второго рода. Поэтому, задаваясь подходящими значениями  $\alpha$  и  $\beta$ , можно максимизировать  $P(\text{ВП})$  или минимизировать  $P(\text{НП})$ . Практически важным, в этой связи, является вопрос о выборе величин  $\alpha$  и  $\beta$  с учетом величины  $P(\text{И})$  и  $P(\text{Л})$ . Здесь выделяют следующие случаи.

*Симметричные зависимости* — при  $P(\text{И}) \approx P(\text{Л})$ . Заметим, что из (5.5) тогда имеем

$$P(\text{ВП}) = 1 - 0,5(\alpha + \beta),$$

т. е. верное поведение зависит лишь от  $\alpha$  и  $\beta$ , причем при прочих равных условиях безразлично:  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha > \beta$  или  $\alpha < \beta$ , лишь бы сумма  $\alpha + \beta$  была поменьше.

**Несимметричные гипотезы** — при  $P(И) > P(Л)$  или  $P(И) < P(Л)$ . Здесь положение иное. Если  $P(И) > P(Л)$ , то  $P(ВП)$  определяется преимущественно первым слагаемым в правой части (5.5), даже при  $\alpha = \beta$ . Но можно еще увеличить  $P(ВП)$ , уменьшая  $\alpha$ , хотя бы и за счет  $\beta$ , т. е. выгодно выбирать  $\alpha < \beta$ . Если же, наоборот,  $P(И) < P(Л)$ , тогда  $P(ВП)$  преимущественно определяется вторым слагаемым в (5.5), и следует максимизировать его, уменьшая  $\beta$ , т. е. выбирая  $\alpha > \beta$ . Заметим, что это модели ожидания и неожиданности: при ожидании у человека повышается  $\beta$ -вероятность, а при неожиданности, наоборот, —  $\alpha$ -вероятность.

Таким образом, выбор стратегии поведения исследователя при проверке статистической гипотезы определяется наличием априорной информации о  $P(И)$  и  $P(Л)$  — об истинности или ложности проверяемой гипотезы. Если таковая информация полностью отсутствует, то выгодно считать  $P(Л) = P(И)$  и, минимизируя  $\alpha$  и  $\beta$ , одинаково часто принимать решение об истинности и ложности гипотезы. При наличии верной априорной информации выбирают  $\alpha < \beta$  или, наоборот, соответственно  $P(И) > P(Л)$  или  $P(И) < P(Л)$ . Но такой выбор затрудняет дело при неверной априорной информации. В этой связи  $\alpha$  и  $\beta$  выступают в качестве непосредственных мер ненадежности, а вероятности  $1 - \alpha$  и  $1 - \beta$  — в качестве мер надежности статистических оценок.

### § 1.1 Задачи статистической проверки гипотез в психологических исследованиях

Первой основной задачей статистической проверки гипотез является репрезентативное выборочное описание свойств генеральных совокупностей. С учетом вышесказанного о различиях между выборками и генеральными совокупностями ясно, что для такого описания значительных по объему совокупностей психических свойств, состояний, процессов и функций требуется накопление огромного выборочного материала путем многократных, зачастую крупномасштабных исследований. Несмотря на значительное количество экспериментальных работ, накопленный материал недостаточен, а крупномасштабных исследований, необходимых в психологии, пока не проводится. Отсутствуют и выборки панельного типа. Поэтому задача репрезентативного описания, решение которой предполагает накопление материала, сводится ко второй основной задаче, а именно — к проверке однородности выборочных описаний, полученных в разных исследованиях, и к

обобщению однородных данных. Заметим в этой связи, что для проверки однородности необходима однообразность статистических описаний одних и тех же психических явлений разными авторами с указанием в публикациях объема выборок, по которым вычислялись статистические оценки параметров и функций.

Можно выделить также ряд частных задач, решение которых способствует решению указанных основных. Для любых генеральных совокупностей это, во-первых, сопоставление выборочных параметрических и функциональных характеристик с аналогичными характеристиками известных генеральных совокупностей (или, по крайней мере, с выборками большего объема), во-вторых, аппроксимация функций распределения и связи теоретическими кривыми. Для гетерогенных совокупностей это выявление структуры совокупности (в частности, определение числа существенных переменных, необходимого и достаточного для описания совокупности), определение вида и характера связей между переменными и минимизация числа переменных. Дальнейшую детализацию задач можно проводить в соответствии с конкретными видами параметрических и функциональных характеристик совокупностей и выборок (см. рис. 5.1–5.3)

Резюмируя, подчеркнем, что задачи статистической проверки гипотез являются необходимой частью научных задач, стоящих перед психологами и представителями смежных наук, но не исчерпывают всего множества таких задач. Поэтому формальные методы математической статистики должны не заменять, а дополнять содержательные методы психологических дисциплин

## 1.1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ И ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

### 1.1.1. Понятие о статистических критериях

Под критерием вообще понимается решающее правило, обуславливающее поведение в ситуации выбора. *Статистическим критерием* (в отличие от других научных критериев) называется правило, обеспечивающее надежное поведение, т. е. принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью.

В качестве критериев в математической статистике используются определенные случайные величины, которые являются неслучайными функциями от изучаемых случайных величин и от так называемого числа степеней свободы, зависящего от числа наблюдений. Пусть критерием является случайная величина  $Y^* = \psi(\theta^*, \nu)$ , где  $\psi$  — неслучайная функция от параметра  $\theta^*$  и числа степеней свободы  $\nu$ . Должна быть известна функция распределе-

ния  $F(Y_{\alpha}^*, \nu)$ , которая обычно табулируется (как это сделано в табл. VII—X Приложения 2). Тогда использование критерия  $Y^*$  для оценки  $\theta$  параметра  $\theta^*$  или проверки статистической гипотезы об этом параметре состоит в следующем. При оценке неизвестного параметра  $\theta^*$  доверительным интервалом (5.1) для выбранной  $\alpha$  по таблицам распределения  $F(Y_{\alpha}^*, \nu)$  определяется теоретическое значение квантиля критерия  $Y_{\alpha, \nu}^*$ , которое показывает, насколько стандартных погрешностей  $\sigma(\theta)$  может отклоняться значение параметра  $\theta^*$  от его выборочной оценки  $\theta$  при данном числе степеней свободы (как функции от объема выборки):

$$\theta - Y_{\alpha, \nu}^* \sigma(\theta) \leq \theta^* \leq \theta + Y_{\alpha, \nu}^* \sigma(\theta).$$

При проверке гипотезы относительно  $\theta^*$  всегда в сущности проверяется вопрос, может служить  $\theta$  оценкой  $\theta^*$  или нет. При этом формулировать «нулевую» гипотезу можно относительно различия  $\theta$  и  $\theta^*$ : «различие случайно», но тогда альтернативная гипотеза формулируется относительно сходства: «сходство неслучайно». Можно, наоборот, формулировать «нулевую» гипотезу относительно сходства  $\theta$  и  $\theta^*$ : «сходство случайно», но тогда альтернативная гипотеза касается различия: «различие неслучайно». При такой классической (альтернативной) формулировке гипотез по выборке находят оценку параметра  $\theta$ . По функции  $\psi$  вычисляют эмпирическое значение критерия  $Y^*$ , а по таблице  $F(Y_{\alpha}^*, \nu)$  находят для заданного  $\alpha$  и обусловленного объемом выборки  $\nu$  теоретическое значение квантиля  $Y_{\alpha, \nu}^*$  и производят сравнение:

$$Y^* \leq Y_{\alpha, \nu}^* \quad \text{или} \quad Y^* > Y_{\alpha, \nu}^* \quad (5.6)$$

Смысл выражения (5.6) можно пояснить следующим образом. Вспомним, что квантиль  $Y_{\alpha}$  есть значение переменной  $Y$ , которому соответствует доля площади под кривой плотности, численно равная вероятности  $\alpha$ . Тогда, изображая вероятности  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ , как показано на рис. 5.6, а, б, и учитывая табл. 5.2, можем записать правила выбора. Если  $Y^* \leq Y_{\alpha, \nu}^*$ , то различие  $\theta$  и  $\theta^*$  случайно,

а сходство неслучайно (рис. 5.6, а), следовательно, принимается гипотеза о сходстве эмпирической оценки  $\theta$  с теоретическим параметром  $\theta^*$ . Если же  $Y^* > Y_{\alpha, \nu}^*$ , то сходство  $\theta$  и  $\theta^*$  случайно, а

различие неслучайно (рис. 5.6, б), следовательно, принимается гипотеза о различии между оценкой  $\theta$  и параметром  $\theta^*$ . Заметим, что, проверяя в качестве «нулевой» гипотезу о сходстве, мы принимаем альтернативную гипотезу о различии, и наоборот, проверяя в качестве «нулевой» гипотезу о различии, мы принимаем

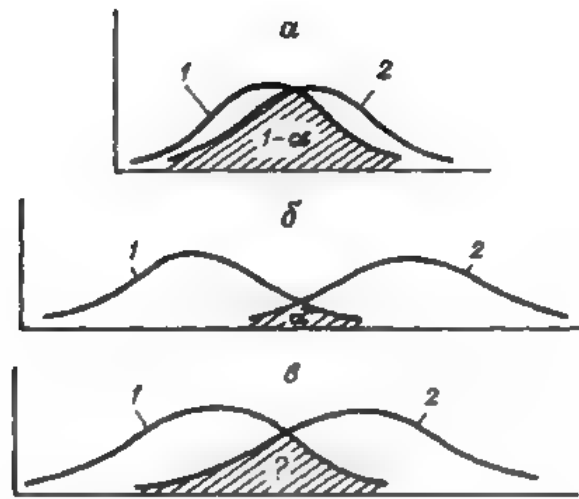


Рис. 5.6. Сопоставление эмпирического и критического значений квантилей

1 — эмпирическое, 2 — теоретическое распределения. По оси ординат — плотности вероятностей  $f(Y)$ , по оси абсцисс — значения  $Y$ . а — незаштрихованная площадь под кривыми равна  $\alpha$ ,  $Y^* \leq Y_{\alpha, \nu}^*$  — различие случайно, а сходство неслучайно; б — незаштрихованная площадь под кривыми равна  $1 - \alpha$ ,  $Y^* > Y_{\alpha, \nu}^*$  — сходство случайно, а различие неслучайно; в — заштрихованная область пересечения мала для  $1 - \alpha$  и велика для  $\alpha$ , при этом  $Y_{\alpha_1, \nu}^* < Y^* \leq Y_{\alpha_2, \nu}^*$ , где  $\alpha_1 \div \alpha_2$  — интервал неопределенности; чтобы обоснованно принять или отклонить гипотезу, необходимо провести дополнительные наблюдения.

альтернативную гипотезу о сходстве, т. е. статистическую гипотезу проверяют доказательством «от противного».

Среди возможных статистических критериев выделяют: односторонние и двусторонние, параметрические и непараметрические, более мощные и менее мощные.

Понятие одностороннего либо двустороннего критерия связано с формулировкой гипотез. Если «нулевая» гипотеза формулируется о равенстве (сходстве)  $\theta = \theta^*$ , то для проверки используется двусторонний критерий, теоретический квантиль которого  $Y_{\alpha, \nu}^*$  определяется, в сущности, для  $0,5\alpha$ , как показано на рис. 5.7, а. Если же «нулевая» гипотеза формулируется о неравенстве (различии), то возможны три формулировки:  $\theta \neq \theta^*$ ,  $\theta > \theta^*$  и  $\theta < \theta^*$ . Для первой формулировки снова используется двусторонний критерий, но для второй и третьей — односторонние. Смысл одностороннего критерия — это нижняя и верхняя граница доверительно-

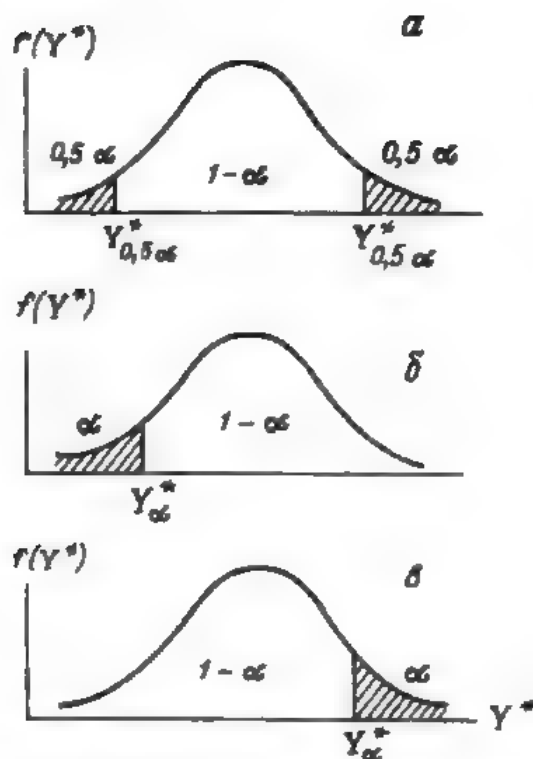


Рис. 5.7. Двусторонний (а) и односторонние (б, в) критерии. Объяснения в тексте.

го интервала (рис. 5.7, б и в), соответственно говорят о нижнем критическом значении (рис. 5.7, б) и верхнем критическом значении (рис. 5.7, в) критерия  $Y^*$ .

Параметрические критерии — это некоторые функции от параметров совокупности. Они служат для проверки гипотез об этих параметрах или для их оценивания. Непараметрические критерии — это некоторые функции от функций распределения или непосредственно от вариационного ряда наблюдавшихся значений изучаемого случайного явления. Они служат только для проверки гипотез о функциях распределения или о рядах наблюдавшихся значений.

Важнейшей характеристикой любого статистического критерия является его *мощность*. Под мощностью критерия понимается его способность правильно отбрасывать ложную гипотезу. Мощность оценивается вероятностью  $1 - \beta$  и, следовательно, согласно уравнениям (5.5), зависит от вероятностей  $P(I)$ ,  $P(II)$  и  $\alpha$ , так что один и тот же критерий может иметь разную мощность

для различных сочетаний этих вероятностей. Функция, определяющая значения  $1 - \beta$  в зависимости от указанных вероятностей и числа наблюдений, называется *функцией мощности* критерия. Она позволяет, смотря по обстоятельствам, выбрать подходящий критерий для практического использования, а также учитывается при разработке новых критериев.

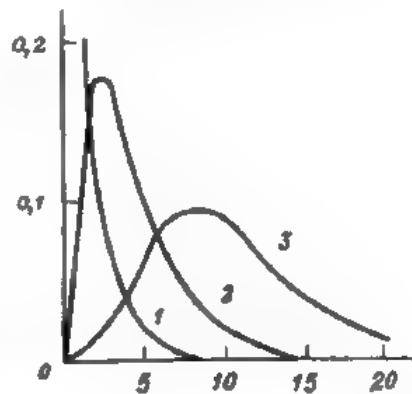
В математической статистике для различных приложений создано большое количество параметрических и непараметрических критериев, многие из которых маломощны или не определены по мощности. Поэтому в психологических приложениях лучше пользоваться сравнительно небольшим набором основных критериев, наиболее мощных в большинстве случаев. Их мы и рассмотрим ниже.

### 5.1.1. $\chi^2$ -критерий Пирсона



Наиболее мощным непараметрическим критерием является критерий  $\chi^2$  по Пирсону. Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — независимые случайные величины, распределенные нормально со средним арифметическим, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Тогда сумма квадратов этих величин  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$  распределена с плотностью, зависящей только от  $n$  и при увеличении  $n$  асимптотически стремящейся к нормальной плотности, как показано на рис. 5.8.

Рис. 5.8. Плотность  $\chi^2$ -распределения.  
По оси ординат — плотность, по оси абсцисс — значения  $\chi^2$ . 1 —  $\nu = 1$ ; 2 —  $\nu = 4$ ; 3 —  $\nu = 10$ .



Величина  $\nu$  называется числом степеней свободы. Остановимся на этом понятии подробно. В математической статистике под *числом степеней свободы* понимается число фактически возможных направлений изменчивости. В этой связи выделяются следующие понятия: число (теоретически) возможных степеней свободы, число «связанных» степеней свободы и число «свободных», т. е. фактически возможных, степеней свободы.

Число *возможных* степеней свободы есть количество наблюдений. Это для отдельного события — число случаев его появления и не появления ( $n$ ). Для отдельной случайной величины — это вектор значений величины числом  $n$ , а для вариационного ряда — число классов группировки  $k$ . Для двумерной системы величин (или событий) при несгруппированных данных — это  $n^2$ , а при сгруппированных —  $k_x k_y$ . Наконец, в общем случае  $N$ -мерной случайной системы — это общее число пересечений интервалов квантования  $L$ , причем величины  $k_i$  и  $L$  являются функциями от числа наблюдений.

Число «*связанных*» («несвободных») степеней свободы понимается следующим образом. Пусть суммируются  $n$  значений  $x_i$  вектора  $\vec{X}$ , результатом чего является  $\sum_{i=1}^n x_i$ . Тогда можно сохранять их сумму фиксированной при любом случайном сочетании  $n - 1$  значений  $x_i$ , лишь бы одно из этих значений неслучайным образом дополняло остальные. Следовательно, одно значение является «связанным» при всяком суммировании. Аналогично при  $r$  суммированиях связывается  $r$  степеней свободы. Заметим, что, вычисляя  $r$  моментов распределения (считая нулевые моменты), мы суммируем  $r$  раз, так что для одномерного распределения с числом параметров  $l$  всегда «связывается»  $r = l + 1$  степень свободы. Так, для нормального, гамма- и биномиального распределений число связываемых степеней свободы  $r = 3$ , для пуассоновского —  $r = 2$ .

Число *фактически* возможных («свободных») степеней свободы ( $\nu$ ) определяется разностью между числом теоретически возможных и числом «связанных» степеней свободы. Для вектора значений (или вероятностей) случайной величины  $\nu = n - 1$ ; для ее распределения, полученного группировкой наблюдений в  $k$  интервалов,  $\nu = k - r$ ; для таблицы  $N$ -мерного распределения вероятностей системы событий (или случайных величин)  $\nu = (n - 1) \times (m - 1)$ , где  $n$  — число строк, а  $m$  — число столбцов такой таблицы.

Основные направления в применении  $\chi^2$ -критерия: а) оценка сходства (различия) двух и более распределений; б) оценка стохастической независимости (зависимости) систем случайных событий и величин, а также сравнение матриц переходных вероятностей для оценки цепи событий как бернуллиевской или марковской (простой или сложной); в) проверка однородности парных корреляций; г) формирование других статистических критериев.

Сравнение *двух* распределений может осуществляться как сравнение выборочного распределения с каким-либо теоретическим законом или как сравнение двух и более выборочных распределений. В первом случае проверяется гипотеза о том, можно ли рассматривать отличия выборочного распределения от его теорети-

ческой аппроксимации данного вида как случайные, иначе говоря, является ли выборочное распределение нормальным, гамма- или каким-нибудь другим. Во втором случае ставится вопрос о том, случайны ли различия между двумя или несколькими выборочными распределениями (к какому бы виду они не принадлежали). Рассмотрим оба случая на примерах.

**Пример 5.1.** В примере 2.6 эмпирический ряд распределения значений амплитуды установившихся колебаний руки человека был аппроксимирован нормальным распределением. Значения частот  $p_i$  и вероятностей  $P_i^*$  приводились в табл. 2.11. Проверим для этих данных, пользуясь критерием  $\chi^2$ , следующую «нулевую» гипотезу: отличия выборочного распределения частот от теоретического нормального распределения вероятностей являются случайными.

При сравнении выборочного и аппроксимирующего распределений используется следующая формула  $\chi^2$ -критерия:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*} = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - P_i^*)^2}{P_i^*} \quad (5.7a)$$

или

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{f_i^*} - n = n \left| \sum_{i=1}^k \frac{p_i^2}{P_i^*} - 1 \right|, \quad (5.7b)$$

где  $f_i$  и  $f_i^*$  — эмпирическая и теоретическая частоты  $i$ -го интервала группировки;  $p_i$  и  $P_i^*$  — частоты и аппроксимирующие вероятности;  $n$  — число наблюдений;  $np_i = f_i$ ,  $nP_i^* = f_i^*$ ;  $k$  — число интервалов группировки после объединения интервалов, в которых  $f_i < 5$ .

Так как два верхних интервала в эмпирическом распределении имеют частоты меньше пяти, их следует объединить, суммируя частоты. Аналогично следует частоту последнего интервала суммировать с частотой третьего снизу интервала. Соответственно суммируются и вероятности  $P_i^*$ . В результате для вычисления эмпирического  $\chi^2$  используются  $p_i$  и  $P_i^*$ , представленные в табл. 5.3; там же показано и вычисление  $\chi^2$  по формуле (5.7a).

Мы проверяем гипотезу о нормальном распределении, у которого два параметра; значит,  $r = 3$  и  $\nu = k - 3$ . По табл. VII Приложения 2 находим, что с доверительной вероятностью 0,95 квантиль  $\chi_{0,05/\nu=6}^2 = 11,1$ . Это больше эмпирического  $\chi^2 = 9,88$ . Следовательно, отличия эмпирического распределения от нормального можно считать случайными, аппроксимация удовлетворительна.

Сравнивать две или более эмпирических совокупностей обычно требуется для того, чтобы установить, являются ли они выборками из одной и той же генеральной совокупности и можно ли их

Таблица 5.3

Вычисление  $\chi^2$  к примеру 5.1

$p_i$	$P_i^*$	$ p_i - P_i^* $	$(p_i - P_i^*)^2$	$(p_i - P_i^*)^2 / P_i^*$
0,025	0,018	0,006	0,000036	0,0025
0,045	0,054	0,010	0,001000	0,0185
0,125	0,119	0,006	0,000036	0,0003
0,145	0,193	0,048	0,002304	0,0119
0,290	0,231	0,059	0,003481	0,0151
0,185	0,193	0,008	0,000064	0,0003
0,110	0,119	0,009	0,000081	0,0007
0,075	0,072	0,003	0,000009	0,0001

 $n = 200$  $\chi^2 = 200 \cdot 0,0494 = 9,88$  $\nu = 8 - 3 = 5$ 

$$\chi^2 < \chi_{0,05/5}^2 = 11,1$$

объединить, чтобы получить выборку большего объема. Пусть имеется  $s$  эмпирических распределений, полученных в несколько различных условиях (например, разными авторами) и имеющих (в общем случае) неодинаковые объемы  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ). Если это случайные выборки из одной совокупности, то логично предполагать, что их частоты  $p_{ij}$  в каждом  $i$ -м интервале случайным образом рассеиваются вокруг теоретической вероятности  $P_i^*$   $i$ -го интервала группировки. Тогда ожидаемую частоту  $P_i^*$  выборки суммарного объема  $\sum_{j=1}^s n_j$  разумно определить как взвешенное среднее арифметическое частот  $p_{ij}$  объединяемых выборок:

$$P_i^* = \frac{\sum_{j=1}^s n_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^s n_j}. \quad (5.8)$$

Для получения расчетной формулы  $\chi^2$ -критерия в случае сравнения произвольного числа  $s$  выборок неравных объемов  $n_j$  воспользуемся свойством  $\chi^2$ -распределения, согласно которому сумма из  $s$  независимых слагаемых, имеющих  $\chi_j^2$ -распределение с  $\nu_j$  степенями свободы, также имеет  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы  $\sum_{j=1}^s \nu_j$ . Тогда

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^s n_j \left[ \sum_{i=1}^k \frac{(p_{ij} - P_i^*)^2}{P_i^*} \right] = \sum_{j=1}^s n_j \left| \sum_{i=1}^k \frac{p_{ij}^2}{P_i^*} - 1 \right|, \quad (5.9)$$

где  $k$  — равное для проверяемых (объединяемых) выборок число интервалов группировки,  $P_i^*$  определено выше уравнением (5.8),  $p_{ij}$  — частоты  $i$ -го интервала  $j$ -го эмпирического распределения. Так как  $\sum_{i=1}^k \frac{p_{ij}^2}{P_i^*}$  может быть больше либо меньше единицы, берется абсолютное отклонение этой суммы от единицы. Число степеней свободы  $\nu$ , необходимое в этом случае для определения кван-

тия  $\chi^2_{\alpha, \nu}$  из табл. VII Приложения 2, находят следующим образом. Каждое из слагаемых  $\chi^2$  определяют, исходя из  $\nu = k - 1$  степеней свободы (одна степень «связывается» на нулевой начальный момент). Но суммируют  $s$  слагаемых, и на эту сумму тоже «связывается» одна степень свободы, так что всего получается степеней свободы

$$\nu = \sum_{j=1}^{s-1} (k-1) = (s-1)(k-1). \quad (5.10)$$

**Пример 5.2.** Существует три способа группировки, различающихся принципом размещения «граничных» значений вариант по интервалам. Требуется оценить, будут ли однородными эмпирические распределения, получаемые такими разными способами. Исходные данные приведены в табл. 5.4

Таблица 5.4

Вычисление $\chi^2$ к примеру 5.2			
$p_i$	$p_{ij}$	$p_{ij}^2$	$p_{ij}^2 : p_i^2$
$p_{i1}$	0,025	0,000625	$6,25 : 275 \approx 0,0227$
	0,045	0,002025	$20,25 : 575 \approx 0,0352$
	0,125	0,015625	и т.д. 0,1250
	0,145	0,021025	0,1237
	0,290	0,084100	0,3058
	0,185	0,029425	0,1658
	0,110	0,012100	0,1180
	0,075	0,005625	0,0865
	0,030	0,000900	$9 : 275 \approx 0,0327$
	0,070	0,004900	$49 : 575 \approx 0,0852$
$p_{i2}$	0,125	0,015625	и т.д. 0,1250
	0,195	0,038025	0,2237
	0,260	0,067600	0,2458
	0,170	0,028900	0,1628
	0,085	0,009025	0,0881
	0,055	0,003025	0,0466
	0,0275		
	0,0575		
$p_{i3}$	0,1250	$\sum_{i=1}^8 \frac{p_{i1}^2}{p_{i2}} = 0,9827, \quad \sum_{i=1}^8 \frac{p_{i2}^2}{p_{i3}} = 1,0099,$ $\chi^2 = 200( 0,9827 - 1  +  1,0099 - 1 ) = 4,72,$ $\nu = (2-1)(8-1) = 7, \quad \chi^2_{0,05/\nu=7} = 14,1,$ $\chi^2 < \chi^2_{0,05/7}$	
	0,1700		
	0,2750		
	0,1775		
	0,1025		
	0,0850		
$n = 200$			

Теоретическая вероятность (как частость объединенной выборки) определяется здесь, очевидно, как  $p_i^* = (p_{i1} + p_{i2} + p_{i3}) : 3 = p_{i3}$ .

При этом ни к чему вычислять  $p_{i3}^2/p_{i3}$ , а  $\sum_{i=1}^k p_{i3} = 1$ . Следовательно, вычислительная формула  $\chi^2$  для нашего примера получается из формулы (5.9) путем несложных преобразований:

$$\chi^2 = n \left[ \sum_{j=1}^2 \left| \sum_{i=1}^8 \frac{p_{ij}^2}{p_{i3}} - 1 \right| \right] \quad \text{при } j = 1, 2.$$

Результаты вычислений и проверки гипотезы приведены в табл. 5.4. Можно видеть, что эмпирические распределения, полученные разными способами группировки, однородны. Следует, однако, заметить, что данный вывод справедлив лишь при  $n = 200$ . Нетрудно видеть, что уже при  $n > 500$  различие в способах группировки приведет к неоднородности получаемых эмпирических распределений, а это в конечном счете означает неадекватность выборочного описания генеральной совокупности.

Оценка статистической однородности может выполняться для двух и более многомерных распределений частот событий (величин). Тем самым решается вопрос о возможности объединения соответствующих выборок в одну большего объема.

**Пример 5.3.** В примере 4.1 оценивалось распределение значений социометрического статуса, эмоциональной экспансивности и нейротизма для выборки объемом  $n_1 = 42$  у студентов одного курса психологического факультета (табл. 4.4). Для студентов другого курса получена новая выборка, объемом  $n_2 = 57$ , для которой распределение частот приведено в табл. 5.5. Требуется проверить, однородны ли обе выборки в статистическом смысле, и если да, то объединить их.

Таблица 5.5

Частоты совместного распределения социометрического статуса ( $X_1$ ), нейротизма ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) второй выборки студентов (к примеру 5.3)

	$x_{21} \equiv X_2 < 13,5$		$x_{22} \equiv X_2 > 13,5$	
	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geq 0$	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geq 0$
$x_{11} \equiv X_1 < 0$	$p_{111} = 0$	$p_{112} = 0,12$	$p_{121} = 0$	$p_{122} = 0,02$
$x_{12} \equiv X_1 \geq 0$	$p_{211} = 0,04$	$p_{212} = 0,52$	$p_{221} = 0$	$p_{222} = 0,30$

Пользуясь формулой (5.8), вычислим ожидаемые значения частот в объединенной выборке:

$$p_{111}^{**} = \frac{1}{99}(0,07 \cdot 42 + 0,00 \cdot 57) \approx 0,03,$$

$$p_{112}^{**} = \frac{1}{99}(0,07 \cdot 42 + 0,12 \cdot 57) \approx 0,10$$

Таблица 5.6

Вычисление  $\chi^2$  к примеру 5.3

$p_{k=1,2}$	$p_{ijk}$	$p_{ijk}^2$	$p_{ijk}^2/p_{ijm}^{**}$
$p_1$	0,07	0,0049	0,163
	0,07	0,0049	0,049
	0,10	0,0100	0,250
	0,02	0,0004	0,020
	0,07	0,0049	0,010
	0,34	0,1156	0,256
	0,07	0,0049	0,163
	0,26	0,0676	0,241
$p_2$	0,00	0,0000	0,000
	0,12	0,0144	0,144
	0,00	0,0000	0,000
	0,02	0,0004	0,020
	0,04	0,0016	0,032
	0,52	0,2704	0,601
	0,00	0,0000	0,000
	0,30	0,0900	0,321
$p_{ijm}^{**}$	0,03		
	0,10		
	0,04	$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{p_{ijm1}^2}{p_{ijm}^{**}} = 1,152,$	
	0,02		
	0,05		
	0,45		
	0,03	$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{p_{ijm2}^2}{p_{ijm}^{**}} = 1,118,$	
	0,28		

---

$n_1 = 42, n_2 = 57, \chi^2 = 42(1,152 - 1) + 57(1,118 - 1) \approx 13,1,$   
 $n = 99$   
 $\nu = (2 - 1)(8 - 1) = 7,$   
 $\chi_{0,05/7}^2 = 14,1 > \chi^2 \approx 13,1$

и т. д. — результаты проведены в табл. 5.6. Остальной расчет  $\chi^2$  осуществим по формуле (5.9), как показано в табл. 5.6. Можно видеть, что различия частот случайны, значит, обе выборки статистически однородны и допустимо объединение. Частоты объединенной выборки приведены в табл. 5.7. Заметим, что это те же самые ожидаемые частоты  $p_{ijm}^{**}$ , что и в табл. 5.6.

Оценка стохастической независимости компонентов в системе случайных событий (величин) осуществляется путем сопоставле-

ния эмпирической величины  $\chi^2$ , образующей числитель в формулах (2.48а-в) и (4.15) для коэффициента Чупрова, с табличным значением квантиля  $\chi^2_{\alpha, \nu}$ . Причем число степеней свободы всегда определяется по уравнению (5.10) как  $\nu = (m - 1)(n - 1)$ , где  $m$  — число строк таблицы совместного распределения частот событий (величин), а  $n$  — число столбцов; для формулы (4.15)  $m \equiv t$  и  $n \equiv g$ . «Нулевая» гипотеза в этом случае формулируется, например, так: «величина коэффициента Чупрова случайно отличается от нуля (незначима)», т. е. стохастическая связь отсутствует, события (величины) независимы в стохастическом смысле.

Таблица 5.7

Частоты совместного распределения социометрического статуса ( $X_1$ ), нейротизма ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) в объединенной выборке ( $n = 99$ )

	$x_{21} \equiv X_2 < 13,5$		$x_{22} \equiv X_2 > 13,5$	
	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geq 0$	$x_{31} \equiv X_3 < 0$	$x_{32} \equiv X_3 \geq 0$
$x_{11} \equiv X_1 < 0$	$p_{111} = 0,03$	$p_{112} = 0,10$	$p_{121} = 0,04$	$p_{122} = 0,02$
$x_{12} \equiv X_1 \geq 0$	$p_{211} = 0,05$	$p_{212} = 0,45$	$p_{221} = 0,03$	$p_{222} = 0,28$

**Пример 5.4.** Проверим значимость коэффициента Чупрова, вычисленного в примерах 1.11 и 4.1. В первом из них оценивалась сопряженность между цветом волос и цветом глаз. Эмпирическое значение  $\chi^2 = 106$ ; при  $\nu = (3 - 1)(4 - 1) = 6$  из табл. VII Приложения 2 находим:  $\chi^2_{0,01/6} = 16,8$ , что значительно меньше эмпирического  $\chi^2$ . Следовательно, искомая сопряженность несомненна, и  $K = 0,25$  значимо отличается от нуля.

Во втором примере эмпирическое значение  $\chi^2 \approx 9,28$ . При числе степеней свободы  $\nu = (2 - 1)(4 - 1) = 3$  квантиль  $\chi^2_{0,01/3} = 11,3$ , а квантиль  $\chi^2_{0,05/3} = 7,82$ . Оказывается, что имеет место не предусмотренный нами до сих пор случай:  $\chi^2_{0,05/3} < \chi^2 < \chi^2_{0,01/3}$ . Этот случай будет подробнее рассмотрен в § 5.3, а здесь отметим, что в такой ситуации обоснованное решение принять нельзя: требуются дополнительные наблюдения. Можно, однако, предполагать, что при увеличении числа наблюдений наличие стохастической связи статуса, эмоциональной экспансивности и нейротизма будет статистически обосновано. Действительно, по результатам предшествующего примера для объединенной выборки (99 студентов) значение  $\chi^2 \approx 13,1$ . В силу свойства аддитивности  $\chi^2$ -распределения, упомянутого выше, эта величина  $\chi^2$  соответствует числителю коэффициента совместной детермина-



ции (4.15), определяемого для совместного распределения частот объединенной выборки, представленных в табл. 5.7. Так как  $\chi^2 = 13,1 > \chi_{0,01/2}^2 = 11,3$ , можно считать, что статус, экспансивность и нейротизм стохастически зависимы. Определяя заново по (4.15) коэффициент совместной детерминации, получаем достоверно отличные от нуля значения:  $K_N^2 \approx 0,0765$  и  $K_N \approx 0,28$ .

Оценка эмпирической последовательности событий как бернуллиевской или марковской цепи (простой или сложной) может состоять в проверке однородности матриц переходных частот, вычисленных для разных начал отсчета перехода, либо (для проверки «простоты» цепи Маркова) в сопоставлении  $s$  эмпирических матриц последовательных переходов  $A_2, \dots, A_{s+1}$  с матрицами  $A_2^* = A_1^2, A_3^* = A_1^3, \dots, A_{s+1}^* = A_1^{s+1}$ , вычисленными в предположении, что аппроксимирующая цепь Маркова — простая. При такой проверке эмпирическое значение  $\chi^2$  вычисляется по формуле (5.9), а число степеней свободы для квантиля  $\chi_{\alpha, \nu}^2$  определяется по формуле (5.10), где  $k$  — порядок матриц перехода.

Проверка однородности парных корреляций может осуществляться для диагональных элементов корреляционной матрицы с целью установить, стационарна или нет случайная функция, либо для некоторых корреляционных матриц с целью установить их однородность. Поскольку корреляционную матрицу можно рассматривать как объединение векторов коэффициентов корреляции (строк или диагоналей), то начнем с более общего случая проверки однородности корреляционных матриц.

Пусть требуется проверить однородность  $s$  корреляционных матриц порядка  $N$ . Для каждого из  $0,5N(N-1)$  различных коэффициентов корреляции  $r_{ijk}$  ( $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$ ; но  $i \neq j; k = 1, 2, \dots, s$ ) по табл. III Приложения 2 определяется соответствующее  $z_{ijk}$ -преобразование Фишера. Тогда для каждого коэффициента корреляции  $r_{ij}$  имеем в сопоставляемых матрицах  $i$ -й вектор из  $s$   $z_{ijk}$ -преобразований, распределенных асимптотически нормально, с общим средним арифметическим  $z_{ij}^*$  и дисперсией ошибки

$$D(z_{ijk}) = \frac{1}{n_k - 3},$$

где  $n_k$  — объем выборки, из которой определены коэффициенты корреляции  $k$ -й матрицы. Как и прежде, будем считать, что ожидаемое среднее арифметическое значение  $z_{ij}^*$  для  $i$ -го вектора есть

среднее взвешенное:

$$z_{ijl}^* = \begin{cases} \frac{\sum_{k=1}^s (n_k - 3) z_{ijk}}{\sum_{k=1}^s (n_k - 3)}, \\ \frac{1}{s_l} \sum_{k=1}^s z_{ijk} \quad \text{при } n_1 = n_2 = \dots = n_s. \end{cases}$$

Для  $s$  матриц порядка  $N$  всего имеется  $L = 0,5N(N-1)$  различных  $l$ -х векторов ( $l = 1, 2, \dots, L$ ), которые надо сопоставлять. В этой связи эмпирическое значение  $\chi^2$  может быть получено как сумма по  $L$  и  $s$  взвешенных частотой  $(n_k - 3)$  квадратов центральных отклонений  $(z_{ijk} - z_{ijl}^*)^2$ :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^s (n_k - 3) (z_{ijk} - z_{ijl}^*)^2 = \\ &= \sum_{l=1}^L \left\{ \sum_{k=1}^s (n_k - 3) z_{ijk}^2 - \frac{[\sum_{k=1}^s (n_k - 3) z_{ijk}]^2}{\sum_{k=1}^s (n_k - 3)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $l = 1, 2, \dots, L$  — номера вектора проверяемых на однородность коэффициентов корреляции. При одинаковых объемах выборок все  $n_k \equiv n$ , и формула (5.11) упрощается:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= (n - 3) \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^s (z_{ijk} - z_{ijl}^*)^2 = \\ &= (n - 3) \sum_{l=1}^L \left[ \sum_{k=1}^s z_{ijk}^2 - \frac{1}{s} \left( \sum_{k=1}^s z_{ijk} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

При сопоставлении матриц корреляций, как и для матриц вероятностей, число степеней свободы определяется формулой (5.10), что в новых обозначениях дает  $\nu = (L-1)(s-1)$ .

Сопоставление  $s$  коэффициентов корреляции «внутри»  $l$ -го вектора, очевидно, должно осуществляться по тем же формулам (5.11 или 5.12), если  $\sum_{l=1}^L \equiv 1$ . Соответственно число степеней свободы будет  $\nu = s - 1$ .

**Пример 5.5.** В табл. 4.7,  $z$  представлены коэффициенты линейной корреляции между социометрическим статусом ( $X_1$ ), нейротизмом ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивностью ( $X_3$ ), полученные на второй выборке студентов ( $n_2 = 57$ ). Проверить однородность этих корреляций с полученными на первой выборке (табл. 4.7, б).

В данном случае  $s = 2$  и  $L = 3$ . Определив по табл. III Приложения 2 необходимые  $z_{ij}$ -преобразования, произведем вычисления по формуле (5.11). Все промежуточные и окончательные результаты

**Таблица 5.8**  
**Проверка однородности двух корреляционных матриц**  
**к примеру 5.5**

Выборка	$r_{ijk}$	$z_{ijk}$	$z_{ijk} - z_{ij\cdot}$	$(z_{ijk} - z_{ij\cdot})^2$	$(n_k - 3)(z_{ijk} - z_{ij\cdot})^2$
Первая	-0,234	-0,2342	0,0308	0,00013664	0,00540696
	0,302	0,3095	0,0853	0,00727609	0,28376751
	-0,238	-0,2448	0,0694	0,00481636	0,18783804
Вторая	-0,276	-0,2877	0,0277	0,00051529	0,02782566
	0,162	0,1614	0,0628	0,00394384	0,21296736
	-0,347	-0,3654	0,0512	0,00262144	0,14155776
Объединенная	-0,259	-0,2650			
	0,220	0,2242			
	-0,304	-0,3142			

$$z_{121}^* = \frac{1}{99}(0,2342 \cdot 42 + 0,2877 \cdot 57) = 0,2650,$$

$$z_{132}^* = \frac{1}{99}(0,3095 \cdot 42 + 0,1614 \cdot 57) = 0,2242,$$

$$n_1 = 42, \quad n_2 = 57,$$

$$n = 99$$

$$z_{233}^* = \frac{1}{99}(0,2448 \cdot 42 + 0,3654 \cdot 57) = 0,3142,$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^3 (n_k - 3)(z_{ijk} - z_{ij\cdot}^*)^2 \cong 0,85936329 \approx 0,86,$$

$$\nu = (2 - 1)(3 - 1) = 2, \quad \chi_{0,05/2}^2 = 5,99 > \chi^2 = 0,86, \text{ т. е. выборки однородны}$$

представлены в табл. 5.8. Так как выборки однородны, корреляционную матрицу объединенной выборки объемом 99 человек получаем, выполнив по табл. IV Приложения 2 обратное преобразование средних  $z_{ij\cdot}^*$  в коэффициенты корреляции  $r_{ij}$  (они представлены в табл. 5.8):  $r_{12} = -0,259$ ;  $r_{13} = 0,220$ ;  $r_{23} = -0,304$ .

**Пример 5.6.** В примере 4.2 рассматривалась нормированная автокорреляционная функция случайной ошибки слежения. Чтобы установить, стационарна ошибка слежения как случайный процесс или нет, надо проверить, зависят ли значения нормированной автокорреляционной функции от начала отсчета сдвига  $\tau$ . Если они не зависят от начала отсчета, то  $r_{ij}$ , лежащие на  $i$ -й диагонали корреляционной матрицы (табл. 4.1), должны быть однородны. Проверим однородность коэффициентов  $r_{ij}$ , лежащих на первой диагонали (считая вверх и вправо от главной диагонали) табл. 4.13

Так как число наблюдений  $n$  одинаково для всех  $s = 10$  коэффициентов  $r_{ij}$ , то вычисление  $\chi^2$  произведем по формуле (5.12), полагая  $\sum_{i=1}^L \equiv 1$ , как показано в табл. 5.9. Можно видеть, что при данном числе наблюдений ( $n = 23$ ) нет оснований отклонять гипотезу об однородности  $r_{ij}$ , вычисленных при одинаковых сдвигах  $\tau$ , но разных началах отсчета  $\tau$ . Следовательно, можно усреднять коэффициенты, вычисляя  $\bar{R}_{yy}$ , как и сделано в табл. 4.13.

Таблица 5.9

Проверка однородности вектора коэффициентов  
корреляции к примеру 5.6

$r_{ij}$	$z_{ijk}$	$z_{ijk} - z_{ij}^*$	$(z_{ijk} - z_{ij}^*)^2$
0,16	0,1614	0,2204	0,04857616
0,42	0,4477	0,0659	0,00434281
0,46	0,4973	0,1155	0,01334025
0,18	0,1820	0,1998	0,03992004
0,47	0,5101	0,1283	0,01646089
0,51	0,5627	0,1809	0,03272481
0,63	0,7414	0,3596	0,12931216
-0,20	-0,2027	0,5845	0,34164025
0,58	0,6625	0,2807	0,07879249
0,25	0,2554	0,1264	0,01597696
$r_{ij}^* = 0,36$ $n = 23$	$z_{ij}^* = 0,3818$		Сумма: 0,72108682
		$\chi^2 = 20 \cdot 0,72108682 \approx 14,4$ $\nu = 9$	

$\chi_{0,05/9}^2 = 16,9 > \chi^2 = 14,4$ , т.е. можно принять гипотезу  
об однородности  $r_{ij}$

Мы рассмотрели основные аспекты применения  $\chi^2$ -критерия к экспериментальным данным. Но он используется и для формирования многих параметрических критериев, которые и рассмотрим ниже.

### 1.1.1 Основные параметрические критерии

#### *t*-критерий Стьюдента

Если  $X$  — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией, равной единице, а независимая от нее случайная величина  $\chi^2$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $\nu$  степенями свободы, то случайная величина

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}} \quad (5.13)$$

имеет *t*-распределение Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы. Плотность этого распределения зависит только от  $\nu$ , имеет симметричную форму и при увеличении  $\nu$  асимптотически стремится к плотности нормального распределения (рис. 5.9).

Квантили  $t_{\alpha, \nu}$  распределения Стьюдента приведены для  $\alpha = 0,05, 0,01$  и  $0,001$  в табл. VIII Приложения 2. Они используются для интервального оценивания и для проверки гипотез о случайности различия (сходства) параметров.

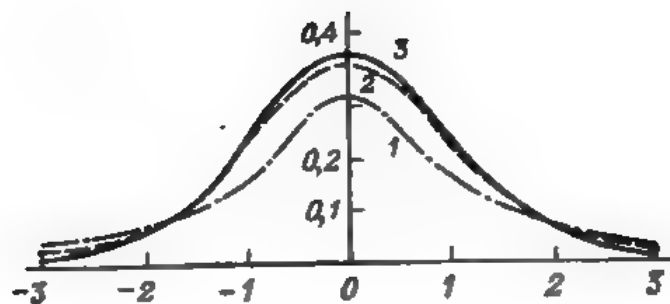


Рис. 5.9. Плотность  $t$ -распределения Стьюдента.  
По оси ординат — плотность, по оси абсцисс — значения  $t$ .  
1 —  $\nu = 1$ ; 2 —  $\nu = 5$ ; 3 —  $\nu = \infty$

При интервальном оценивании квантиль  $t_{\alpha, \nu}$  показывает, как отмечалось выше (уравнение (5.1)), на сколько стандартных погрешностей  $\sigma(\theta)$  может отклониться в меньшую и большую стороны выборочная оценка  $\theta$  от значения параметра  $\theta^*$  в генеральной совокупности. При интервальном оценивании параметров  $\theta^*$ , согласно классификации на рис. 5.1, поступают следующим образом.

По выборочной оценке  $\theta$  в соответствии с табл. 5.2 вычисляют оценку стандартной погрешности  $\sigma(\theta)$ . Далее вычисляют эмпирическое значение  $t$ -критерия.

$$t^* = \frac{\theta}{\sigma(\theta)}, \quad (5.14)$$

и по табл. VIII Приложения 2 находят для  $\nu = n - 1$  (или  $n - 2$ , или  $n - 3$ ) ближайшее к  $t^*$  снизу теоретическое значение квантиля  $t_{\alpha, \nu}$ , которое и принимается для указания границ доверительного интервала (с доверительной вероятностью  $1 - \alpha$ ).

$$\theta^* = \theta \pm t_{\alpha, \nu} \sigma(\theta). \quad (5.15)$$

Важной разновидностью интервального оценивания является построение доверительной зоны (области) простой линейной регрессии  $u^* = a_{u/z} z + a_{0u}$ . Существо дела здесь состоит в следующем. Определяются доверительные значения среднего арифметического  $M(u)$ :

$$u_{\min} = M(u) - t_{\alpha, \nu} \sigma[M(u)],$$

$$u_{\max} = M(u) + t_{\alpha, \nu} \sigma[M(u)],$$

а также доверительные значения углового коэффициента:

$$a_{\min} = a_{u/z} - t_{\alpha, \nu} \sigma(a_{u/z}),$$

$$a_{\max} = a_{u/z} + t_{\alpha, \nu} \sigma(a_{u/z}),$$

где стандартные ошибки вычисляются по формулам из табл. 5.2. Далее, как показано на рис. 5.10, через точки с координатами  $(u_{\max}, M[Z])$  и  $(u_{\min}, M[Z])$  проводят по две прямые, одну под углом  $\alpha_1$  к оси абсцисс, а другую — под углом  $\alpha_2$  так, чтобы  $\operatorname{tg} \alpha_1 = a_{\min}$  и  $\operatorname{tg} \alpha_2 = a_{\max}$  соответственно. В результате заштрихованная на рисунке часть плоскости и является доверительной зоной линии регрессии, в которой с вероятностью  $1 - \alpha$  заключена регрессия, соответствующая генеральной совокупности.

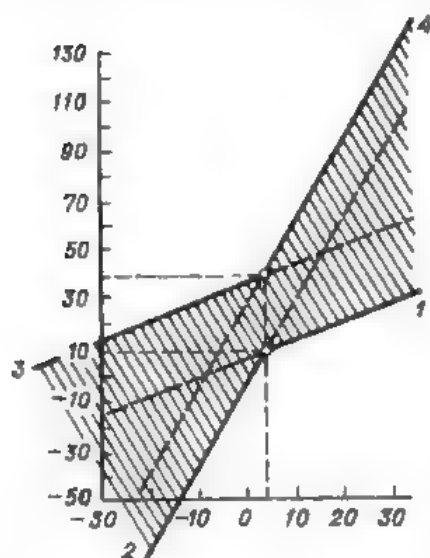


Рис. 5.10. Доверительная область (заштрихована) линии регрессии ( $1 - \alpha = 0,999$ ) к примеру 5.8

По оси абсцисс — статус в своей группе ( $x$ ); по оси ординат — статус на курсе ( $y$ ), %.

- 1 — при  $[M(Y)]_{\min}$  и  $[a_{y/x}]_{\min}$ ,
- 2 — при  $[M(Y)]_{\min}$  и  $[a_{y/x}]_{\max}$ ,
- 3 — при  $[M(Y)]_{\max}$  и  $[a_{y/x}]_{\min}$ ,
- 4 — при  $[M(Y)]_{\max}$  и  $[a_{y/x}]_{\max}$ .

При проверке гипотез о случайности (неслучайности) сходства (различия) используют в сущности оценку вероятности совместного перекрытия (неперекрытия) доверительных интервалов. Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — две выборочные оценки некоторого параметра  $\theta^*$ . Тогда эмпирическое значение  $t$ -критерия вычисляется по формуле (5.14), в которой  $\theta = |\theta_1 - \theta_2|$ :

$$t^* = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\sigma(|\theta_1 - \theta_2|)}, \quad (5.16)$$

где  $\sigma(|\theta_1 - \theta_2|)$  — стандартная погрешность разности выборочных оценок, определяемая по формулам из табл. 5.2. Далее по числу степеней свободы  $\nu = n - 1$  (или  $n - 2$ ,  $n - 3$ ) из табл. VIII Приложения 2 определяется квантиль  $t_{\alpha, \nu}$ , для которого либо  $t^* \leq t_{0,05/\nu}$ , и тогда принимается проверяемая «нулевая» гипотеза, либо  $t^* > t_{0,01/\nu}$ , и тогда принимается альтернативная гипотеза.

Если  $t_{0,05/\nu} < t^p \leq t_{0,01/\nu}$ , необходимо увеличить число наблюдений.

Специальным случаем проверки гипотез с помощью  $t$ -критерия является оценка значимости некоторого параметра, т.е. оценка достоверности отличия величины параметра от нуля. Это относится к мерам асимметрии и эксцесса, к мерам детерминации и связи. При этом используется формула (5.14), а гипотеза проверяется так же, как и при оценке сходства (различия). Заметим, что проверка значимости коэффициентов корреляции и регрессии составляет существо классического корреляционного и регрессионного анализа.

**Пример 5.7.** Определить доверительный интервал для вероятности записывания цифры «7» испытуемым (пример 1.2), если число наблюдений  $n = 1300$ , а частота  $p(\text{«7»}) = 0,108$ .

По табл. 5.2 находим формулу для  $\sigma(p)$ :

$$\sigma(p) = \sqrt{\frac{(1-p)p}{n}} = \sqrt{\frac{0,108 \cdot 0,892}{1300}} \approx 0,00861.$$

По формуле (5.14) определяем

$$t^p = 0,108 : 0,00861 \approx 12,5.$$

Из табл. VIII Приложения 2 можно видеть, что при  $\nu = \infty$   $t_{0,01/\nu} = 2,58 < t^p$ . Следовательно, по формуле (5.15) можем определить интервал:

$$0,108 - 2,58 \cdot 0,00861 \leq p(\text{«7»}) \leq 0,108 + 2,58 \cdot 0,00861$$

или  $0,086 \leq p(\text{«7»}) \leq 0,130,$

в котором с доверительной вероятностью 0,99 заключена вероятность появления цифры «7» в последовательности цифр, записываемых данным испытуемым

**Пример 5.8.** В примере 3.3 для 42 студентов были определены линейная регрессия социометрического статуса на курсе ( $Y$ ) в зависимости от статуса в своей группе ( $X$ ):  $y = 2x + 18$ , а также безусловные средние арифметические  $M[Y] = 25$  и  $M[X] = 3,34$ ; стандартные отклонения  $\sigma[Y] = 28,8$  и  $\sigma[X] = 9,54$ , коэффициенты линейной корреляции  $r_{xy} = 0,63$  и нелинейной детерминации  $\eta_{y/x}^2 = 0,33$  и  $\eta_{x/y}^2 = 0,477$ . Требуется проверить, удовлетворительна ли линейная аппроксимация регрессии « $y$  по  $x$ », и, определив доверительные интервалы для  $M[Y]$  и  $a_{y/x}$ , установить доверительную область теоретической регрессии социометрического статуса на курсе в зависимости от статуса в своей группе.

Проверка удовлетворительности аппроксимации сводится к проверке значимости различий между наибольшим из коэффициентов

нелинейной детерминации и квадратом коэффициента линейной корреляции.

$$\eta_{x/y}^2 - r_{xy}^2 = 0,477 - 0,397 = 0,08.$$

По табл. 5.2 находим, что в зависимости от числа условных средних  $M(x/y)$ , из которых вычислялся коэффициент детерминации  $\eta_{x/y}^2$  (их было 7), стандартная погрешность

$$\sigma(\eta_{x/y}^2 - r_{xy}^2) = \sqrt{0,08 : 5} \approx 0,13.$$

По (5.14) вычисляем эмпирическое значение  $t$ -критерия:

$$t^* = (\eta_{x/y}^2 - r_{xy}^2) : \sigma(\eta_{x/y}^2 - r_{xy}^2) \approx 0,6,$$

что меньше любого наименьшего теоретического квантиля  $t_{\alpha, \nu}$ . Следовательно, гипотеза о линейности не отвергается (различия случайны).

Определим далее доверительные интервалы для  $M(Y)$  и  $a_{y/x}$  и вычислим их минимальные и максимальные значения. Формулы стандартных погрешностей находим в табл. 5.2.

$$\sigma[M(Y)] = \sigma(Y) : \sqrt{n} = 28,8 : \sqrt{42} \approx 4,4,$$

$$\sigma(a_{y/x}) = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}} = \frac{28,8}{9,54} \sqrt{\frac{1 - 0,397}{40}} \approx 0,37.$$

Тогда для  $\nu = 40$  и  $\alpha = 0,001$  из табл. VIII Приложения 2 определяем  $t_{\alpha, \nu} = 3,55$  и находим

$$[M(Y)]_{\min} = 9,4, \quad [M(Y)]_{\max} = 40,6;$$

$$[a_{y/x}]_{\min} = 0,7, \quad [a_{y/x}]_{\max} = 3,3.$$

Чтобы построить доверительную область регрессии, нужно через точки «центров рассеивания» (9,4; 3,34) и (40,6; 3,34) провести прямые с минимальными и максимальными угловыми коэффициентами. Проще всего поступить следующим образом. Найдем дополнительные точки, через которые пройдут искомые границы доверительной зоны. Так как  $t g \alpha = \Delta y / \Delta x = a_{y/x}$ , то  $\Delta y = \Delta x a_{y/x}$ . Выберем координату по  $x$  для искомым точек:  $x \approx 30$ ; тогда  $\Delta x \approx 30 - M(X) = 26,66$  и, следовательно, координаты по  $y$  будут:

$$y_1 = [M(Y)]_{\min} + \Delta y_{\min} = 9,4 + 26,66[a_{y/x}]_{\min} = 28,1,$$

$$y_2 = [M(Y)]_{\min} + \Delta y_{\max} = 9,4 + 26,66[a_{y/x}]_{\max} = 97,4,$$

$$y_3 = [M(Y)]_{\max} + \Delta y_{\min} = 40,6 + 26,66[a_{y/x}]_{\min} = 59,3,$$

$$y_4 = [M(Y)]_{\max} + \Delta y_{\max} = 40,6 + 26,66[a_{y/x}]_{\max} = 128,6.$$



Через найденные точки с координатами  $(y_1; x)$ ,  $(y_2; x)$ ,  $(y_3; x)$  и  $(y_4; x)$  и точки «центров рассеивания» проводятся, как показано на рис. 5.10, «границные» прямые. Ограниченная ими область (на рисунке заштрихована) и есть зона, в которой с доверительной вероятностью  $1 - \alpha = 0,999$  располагается теоретическая регрессия. Заметим, что мы построили максимально широкую область. Ограничиваясь меньшей доверительной вероятностью, можно существенно сузить и доверительную зону регрессии. Но выбор доверительной вероятности — это не статистическая задача.

**Пример 5.9.** Осуществим элементарный анализ коэффициентов корреляции статуса на курсе ( $X_1$ ), нейротизма ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) в первой выборке объемом 42 человека и в объединенной выборке объемом 99 человек (см. пример 5.5). Будем считать коэффициент корреляции  $r_{ij}$  значимо отличным от нуля, если для его  $z_{ij}$ -преобразования справедливо, что

$$t = |z_{ij}| : \sigma(z_{ij}) > t_{0,01/n-1}.$$

Тогда, используя табл. 5.8, где приведены  $z_{ij}$ -преобразования для рассматриваемых коэффициентов, вычисляем

$$\sigma(z_{ij}) = 1 : \sqrt{42 - 3} \approx 0,16 \text{ — для всех } z_{ij},$$

$$t = |z_{12}| : 0,16 = 0,2342 : 0,16 \approx 1,46 < t_{0,01/40} = 2,70 \text{ — незначимо,}$$

$$t = |z_{13}| : 0,16 = 0,3095 : 0,16 \approx 1,93 \text{ — незначимо,}$$

$$t = |z_{23}| : 0,16 = 0,2448 : 0,16 \approx 1,53 \text{ — незначимо.}$$

Но для объединенной выборки оказывается:

$$\sigma(z_{ij}) = 1 : \sqrt{99 - 3} \approx 0,1 \text{ — для всех } z_{ij},$$

$$t = |z_{12}^*| : 0,1 \approx 2,65 > t_{0,01/100} = 2,63 \text{ — значимо,}$$

$$t = |z_{13}^*| : 0,1 \approx 2,24 \text{ — сомнительно,}$$

$$t = |z_{23}^*| : 0,1 \approx 3,14 \text{ — значимо.}$$

Можно видеть, что увеличение объема выборки приводит к тому, что статистически незначимые оценки превращаются в статистически значимые. Разумеется, это можно установить, лишь проводя дополнительные наблюдения. Таким образом, статистическая незначимость оценок при малом объеме выборок еще ни о чем не свидетельствует, кроме того, что необходимы дополнительные испытания.

Чтобы избежать громоздких вычислений при проверке значимости коэффициентов в корреляционных матрицах высокого порядка, можно по квантилям  $t$ -распределения и  $z$ -преобразованию (прямого и обратного) заранее вычислить критические значения  $g_{\alpha,n}^*$ , с которыми сопоставляются эмпирические коэффициенты

корреляции  $r_{ij}$  с целью проверки их значимости. Такие критические значения  $r_{\alpha,n}^*$  для  $\alpha = 0,05$  и  $0,01$  и для  $4 \leq n \leq 1000$  приведены в табл. V Приложения 2. Аналогично критические значения  $\rho_{\alpha,n}^*$  коэффициента ранговой корреляции Спирмена представлены для  $5 \leq n \leq 40$  в табл. VI Приложения 2.

На использовании  $t$ -критерия Стьюдента основывается метод расчленения корреляционного графа на части, отличающиеся по степени тесноты корреляций. Такие части, как упоминалось выше, называются корреляционными плеядами. Следовательно, корреляционная плеяда — это некоторая часть исходного корреляционного графа (или соответственно — корреляционной матрицы), полученная удалением некоторых дуг и вершин.

Имеются два взгляда на содержательную интерпретацию корреляционных плеяд и несколько формальных методов их выделения из корреляционного графа. Согласно первому взгляду корреляционная плеяда есть «пучок» переменных, относительно тесно коррелирующих друг с другом. Одна (или более) из переменных в пучке имеет наибольшее число тесных связей с остальными переменными и рассматривается как *индикатор*, обуславливающий связи внутри пучка\*. Согласно второму взгляду корреляционная плеяда — тоже «пучок» относительно тесно коррелированных переменных, а причина этих корреляций находится вне данной системы переменных — это некоторая *латентная* переменная, влияние которой и проявляется в корреляциях преимущественно данного пучка\*\*. Оба взгляда основываются на интерпретации факта парной корреляции либо как взаимодействия между самими коррелирующими переменными, либо как следствия их взаимодействия с некоторой неконтролируемой переменной. Нетрудно видеть, что эти взгляды не противоречат, а дополняют друг друга.

Из формальных методов выделения корреляционных плеяд наиболее распространены методы расслоения (срезов) и методы факторного анализа. Здесь мы рассмотрим методы расслоения.

Существо методов расслоения состоит в следующем. Величины коэффициентов парной корреляции  $r_{ij}$  можно изобразить, как показано на рис. 5.11, в виде перпендикуляров длиной  $r_{ij}$  к плоскости коррелируемых переменных  $X_i O X_j$ . Проводя секущие плоскости через  $\Delta r_{ij}$ , начиная от некоторой достоверно отличающейся от нуля величины  $r_{\text{зад}}$ , можно расслоить «тело» корреляций на  $s$  частей, корреляции «внутри» которых и образуют  $s$  плеяд. Так, для сечений, показанных в общем виде на рис. 5.11, выделяются шесть

\*Терентьев П.В. Метод корреляционных плеяд // Вестн. Ленингр. ун-та. 1959. № 9.

\*\*Терентьев П.В. Дальнейшее развитие метода корреляционных плеяд // Применение математических методов в биологии. Л., 1960.

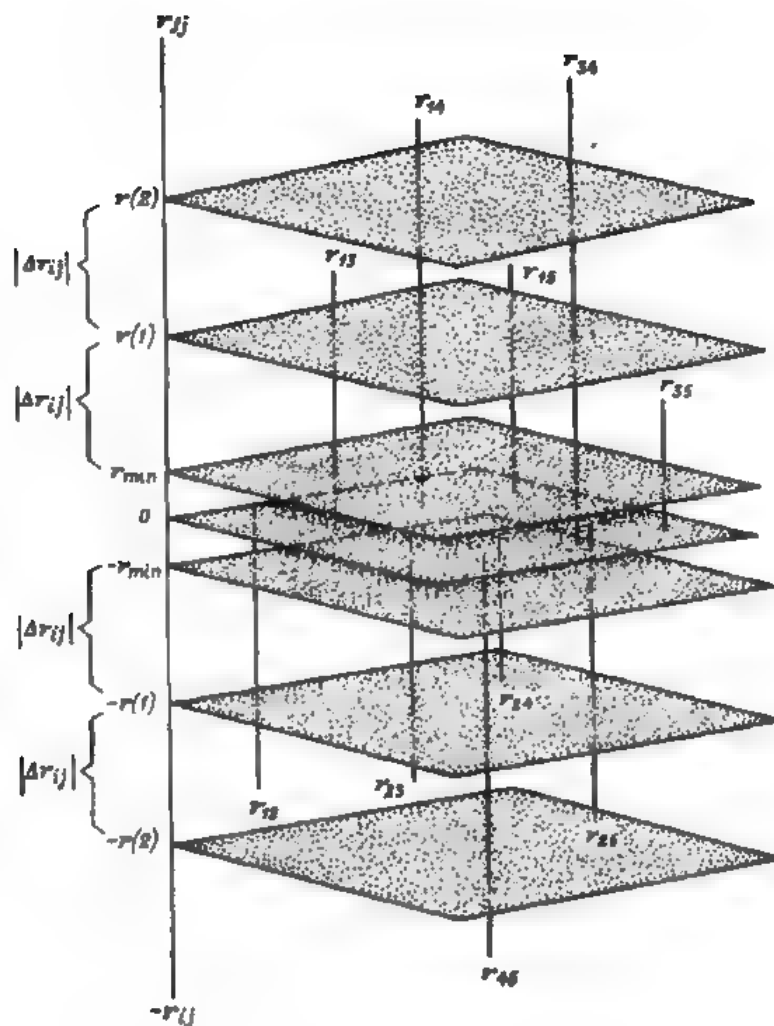


Рис. 5.11. Расслоение корреляционной матрицы.  
 $r(h)$  — текущие плоскости (границы слоев);  $|\Delta r_{ij}|$  — шаг расслоения;  $r_{min}$  — минимальное значение коэффициента корреляции, достоверно отличающегося от нуля.

плеяд, которые в обычной форме корреляционных подграфов изображены на рис. 5.12.

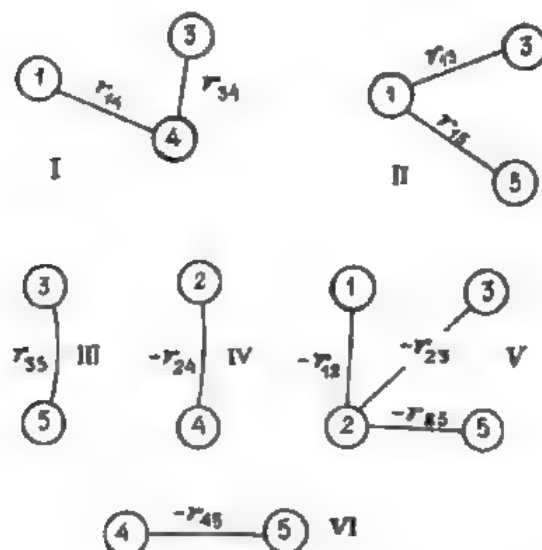


Рис. 5.12. Корреляционные плеяды, выделяемые по методу расслоения

I —  $r(2) < r_{12}$ ; II —  $r(1) \leq r_{13} < r(2)$ ; III —  $r_{\min} \leq r_{ij} < r(1)$ ; IV —  $-r_{\min} \geq r_{12} > -r(1)$ ; V —  $-r(1) \geq r_{12} > -r(2)$ ; VI —  $-r(2) \geq r_{12}$ .

Вместо расслоения можно проводить отслаивание плеяд, последовательно отсекая часть связей с  $r_{ij}$ , согласно неравенству  $|r_{ij}| < |r(k)|$ , так что остаются лишь переменные, все более и более тесно связанные, либо, наоборот, согласно неравенству  $|r_{ij}| > |r(k)|$ , так что остаются переменные, все менее и менее тесно связанные. Заметим, что если расслоение рассматривать как аналог дифференциальной функции распределения, то отслаивание аналогично интегральной функции.

Существенным для техники выделения плеяд расслоением (или отслаиванием) является выбор начала отсчета  $r_{\min}$  и определение «шага»  $|\Delta r_{ij}|$ . Очевидно, что нет смысла выделять статистически недостоверные плеяды. Следовательно, во-первых, выделять плеяды можно лишь из числа  $r_{ij}$ , значимо отличных от нуля, и, во-вторых, коэффициенты «соседних» плеяд должны неслучайным образом отличаться друг от друга. Поэтому началом отсчета плеяд должно быть критическое значение  $r_{\alpha,n}^*$ , как оно определено

выше ( $r_{\min} \equiv r_{\alpha,n}^*$ ), а «шаг» расслоения  $|\Delta r_{ij}|$ , очевидно, следует определять по уравнению (5.16).

Используя прямое ( $z$ ) и обратное ( $z^{-1}$ ) преобразования Фишера, можем определить для заданного объема выборки ( $n$ ).

$$|r_{\min}| = |z_{\alpha\nu}|^{-1},$$

где

$$|z_{\alpha,\nu}| = t_{\alpha,\nu} : \sqrt{n-3}, \quad (5.17)$$

$$\nu = n-1, \quad \alpha \leq 0,01;$$

$$|\Delta r| = |\Delta z|^{-1},$$

где

$$|\Delta z| = |z_i - z_{i+1}| = t_{\alpha,\nu} \sqrt{\frac{2}{n-3}}, \quad (5.18)$$

$$\nu = n_i + n_{i-1} - 2, \quad \alpha \leq 0,01.$$

После этого границы слоев определяются формулами

$$r(1) = r_{\min} + \Delta r \quad \text{и} \quad r(i+1) = r(i) + \Delta r. \quad (5.19)$$

Очевидно, для фиксированного  $n$  можно статистически достоверно выделить лишь  $s$  корреляционных плеяд

$$s = \text{ant} \left\{ \frac{1 - |r_{\min}|}{|\Delta r|} - 1 \right\}. \quad (5.20)$$

Для удобства практического использования по формулам (5.17) — (5.20) вычислены для ряда  $n$  значения  $r_{\min}$ ,  $|\Delta r|$  и  $r(i)$  при доверительной вероятности  $1 - \alpha = 0,99$ , они приведены в табл. XI Приложения 2.

**Пример 5.10.** В табл. 5.10 представлены интеркорреляции одиннадцати переменных, тестируемых по методике Векслера. Эти данные получены усреднением (через  $z$ -преобразование) восьми статистически однородных выборок по сто человек в возрасте от 18 до 25 лет, так что объем объединенной выборки ( $n = 800$ ) позволяет достоверно выделить пять корреляционных плеяд.

Перед расслоением корреляционную матрицу целесообразно ранжировать. Для этого через  $z$ -преобразование в исходной матрице вычисляются средние значения коэффициентов корреляции каждой переменной со всеми остальными (десятью):

$$M[r_{ij}] = (M[z_{ij}])^{-1},$$

где

$$M[z_{ij}] = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i}^{N-1} z_{ij},$$

Таблица 5.10

## Исходная корреляционная матрица к примеру 5.10

1—общая осведомленность, 2—понятливость, 3—внимательность, 4—способность к обобщению, 5—непосредственное запоминание (на цифрах), 6—уровень овладения родным языком, 7—скорость овладения сенсомоторным навыком (кодирование символами), 8—наблюдательность, 9—комбинаторная способность (к анализу и синтезу), 10—способность к организации частей в осмысленное целое, 11—способность к эвристическому синтезу.

Переменные	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$M[r_{ij}]$	Ранг
1	1	0,537	0,438	0,623	0,282	0,647	0,371	0,485	0,371	0,363	0,336	0,454	1
2		1	0,310	0,551	0,291	0,508	0,273	0,485	0,371	0,273	0,273	0,363	4
3			1	0,345	0,291	0,405	0,300	0,318	0,345	0,291	0,282	0,336	7
4				1	0,273	0,572	0,318	0,422	0,310	0,318	0,291	0,414	3
5					1	0,354	0,254	0,216	0,238	0,207	0,149	0,254	11
6						1	0,345	0,405	0,336	0,345	0,282	0,430	2
7							1	0,310	0,388	0,354	0,245	0,310	9
8								1	0,397	0,363	0,368	0,363	5
9									1	0,388	0,430	0,345	6
10										1	0,336	0,310	8
11											1	0,300	10

Примечание. Подчеркнуты соответствующим образом элементы корреляционных плеяд, представленных на рис. 5.13 и 5.14, кроме элементов IV плеяды.

Таблица 5.11

## Размороженная корреляционная матрица к примеру 5.10

Ранг	Переменные	1	6	4	2	8	9	3	10	7	11	5	$M[r_{ij}]$
1	1	1	0,647	0,623	0,537	0,485	0,371	0,438	0,363	0,371	0,336	0,282	0,454
2	6		1	0,572	0,508	0,405	0,336	0,405	0,345	0,345	0,282	0,354	0,430
3	4			1	0,551	0,422	0,310	0,345	0,318	0,318	0,291	0,273	0,414
4	2				1	0,485	0,371	0,310	0,273	0,273	0,273	0,291	0,363
5	8					1	0,397	0,318	0,363	0,310	0,388	0,216	0,363
6	9						1	0,345	0,388	0,388	0,430	0,236	0,345
7	3							1	0,291	0,300	0,282	0,291	0,336
8	10								1	0,254	0,336	0,207	0,310
9	7									1	0,245	0,254	0,310
10	11										1	0,149	0,300
11	5											1	0,254

Примечание. Контурами выделены достоверные слои, плеяды внутри которых представлены на рис. 5.13 и 5.14.

$N$  — порядок корреляционной матрицы;  $(\dots)^{-1}$  — символ обратного  $z$ -преобразования. Эти средние значения показывают степень связи остальных  $N - 1$  переменных с  $i$ -й. Переставляя одноименные столбцы и строки исходной корреляционной матрицы в соответствии с убыванием рангов по  $M[r_{ij}]$ , получаем *ранжированную корреляционную матрицу* (табл. 5.11), в которой корреляции преимущественно убывают слева направо и сверху вниз.

По табл. XI Приложения 2 для  $n = 800$  находим значения  $r_{\text{max}}$  и границы  $r(i)$ , после чего расслаиваем ранжированную матрицу, выделяя корреляционные плеяды внутри слоев (рис. 5.13), либо отслаиваем части корреляционной матрицы, выделяя объединения корреляционных плеяд для вышележащих слоев (рис. 5.14)

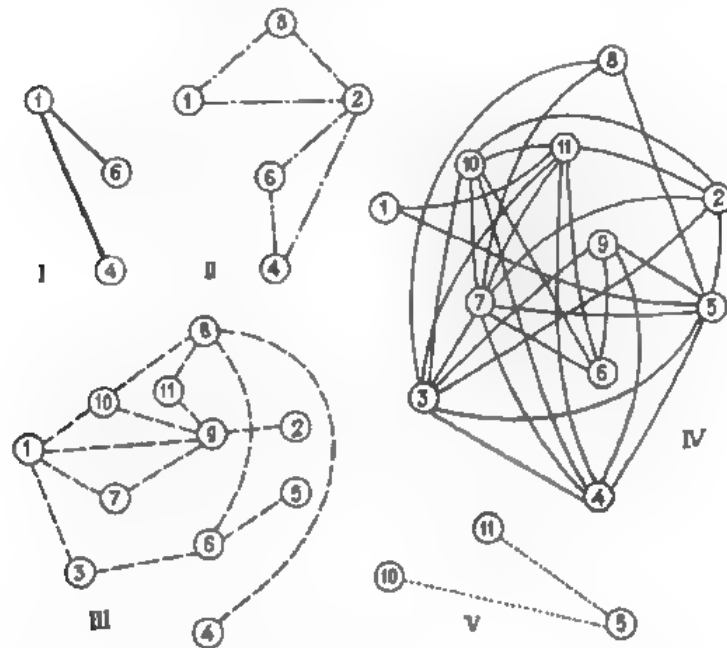


Рис. 5.13. Корреляционные плеяды, полученные расслоением матрицы интеркорреляций (табл. 5.11).

[ $r_{ij} \geq 0,607$  — плеяда образована переменными с теснотой связей выше средней; II —  $0,478 \leq r_{ij} < 0,607$  — плеяда из переменных со средней теснотой связей, III —  $0,349 \leq r_{ij} < 0,478$  — плеяда объединяет переменные с теснотой связей ниже средней; IV —  $0,220 \leq r_{ij} < 0,349$  — плеяда из слабо связанных переменных; V —  $0,091 \leq r_{ij} < 0,220$  — плеяда объединяет более слабо связанные переменные.

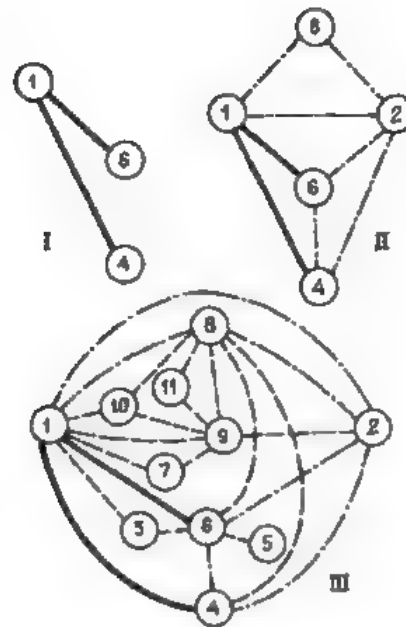


Рис. 5.14 Корреляционные плеяды, полученные отслаиванием  
 I —  $r_{12} \geq 0,607$ ; II —  $r_{12} \geq 0,478$ ,  
 III —  $r_{12} \geq 0,349$ ; плеяды IV и V не  
 приведены из-за чрезмерного чи-  
 сла связей.

Содержательный анализ полученных плеяд выходит за пределы математической статистики. Но можно отметить два формальных показателя, способствующих содержательной интерпретации плеяд, согласно первому из двух взглядов, рассмотренных выше. Одним существенным формальным показателем служит *степень вершины*, т. е. число ребер, примыкающих к вершине. Переменная с наибольшим числом ребер выступает в качестве «ядра» плеяды и может рассматриваться как индикатор остальных переменных (данной плеяды). Например, на рис. 5.13 в плеяде I индикатором служит переменная 1, для плеяды II — переменная 2, для плеяды III — переменная 9. В плеяде IV четко выделяются два групповых «ядра»: одно из переменных 7, 11, 10, а второе из переменных 3, 5, 4, причем «межъядерных» ребер больше, чем «внутриядерных», поэтому данную плеяду нельзя рассматривать как объединение двух разных плеяд — это целостное образование. Другим существенным формальным показателем служит *теснота связей*. Переменная может иметь меньше связей, но более тесных в одной плеяде, и больше связей, но менее тесных в другой плеяде (например, переменная 4 в плеядах II и IV на рис. 5.13).



### *F*-критерий Фишера

Если две случайные величины  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  имеют  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно, причем выполняется неравенство

$$\chi_1^2 : \nu_1 > \chi_2^2 : \nu_2,$$

то отношение

$$F = \frac{\chi_1^2 \nu_2}{\chi_2^2 \nu_1} \quad (5.21)$$

зависит только от числа степеней свободы  $\nu_1$  и  $\nu_2$  и имеет *F*-распределение с плотностью, показанной на рис. 5.15.

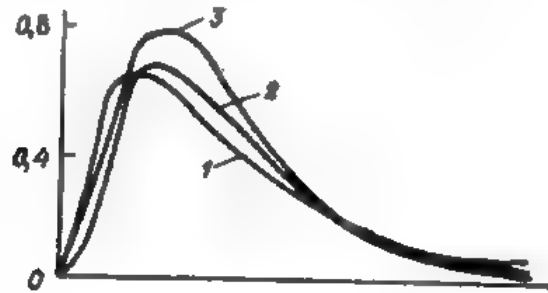


Рис. 5.15. Плотность *F*-распределения.

По оси ординат — плотность, по оси абсцисс — значения *F*  
1 —  $\nu_1 = \nu_2 = 6$ ; 2 —  $\nu_1 = 12$  и  $\nu_2 = 6$ ; 3 —  $\nu_1 = 6$  и  $\nu_2 = 60$ .

Квантили  $F_{\alpha/\nu_1, \nu_2}$  рассматриваются как критические значения отношений величин вида (5.21) и служат для проверки статистических гипотез о сходстве (различии) двух дисперсий, о значимости коэффициентов детерминации, об однородности ряда средних арифметических значений. Для  $\alpha = 0,05, 0,01$  и чисел степеней свободы  $\nu_1$  — для числителя формулы (5.21) и  $\nu_2$  — для ее знаменателя доверительные значения квантилей *F*-распределения представлены в табл. IXа и б Приложения 2.

Сравнение двух выборочных дисперсий осуществляется следующим образом. Вычисляют эмпирическое дисперсионное отношение ( $F_0$ ):

$$F_0 = \begin{cases} \frac{D_1}{D_2} & \text{при } \nu_1 = \nu_2 = n - 1, \\ \frac{D_1(n_2 - 1)}{D_2(n_1 - 1)} & \text{при } n_1 \neq n_2, \nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1, \end{cases}$$

где всегда выбирается  $D_1 > D_2$  и  $n_1$  — объем выборки с  $D_1$ , а  $n_2$  — объем выборки с  $D_2$ . Далее из табл. IXa и б Приложения 2 выбирают квантиль  $F_{\alpha/\nu_1, \nu_2}$  и проверяют условие  $F_a \leq F_{0.95/\nu_1, \nu_2}$  — дисперсии отличаются лишь случайным образом, или  $F_a > F_{0.95/\nu_1, \nu_2}$  — отличия неслучайны.

Значимость коэффициентов детерминации типа  $\eta^2_{u/e}$ ,  $\eta^2_{n/23}$  и  $\eta^2_{u/1}$  и  $R^2_{1/23}$  можно проверять по  $t$ -критерию Стьюдента, рассмотренному выше. Но так как они, в сущности, представляют собой дисперсионные отношения, то считается лучшим проверять их значимость по  $F$ -критерию. Для любого из коэффициентов детерминации эмпирическое значение  $F$ -критерия находят следующим образом:

$$F_a = \frac{\eta^2(mn - m)}{(1 - \eta^2)(m - 1)}, \quad (5.22)$$

где  $\eta^2$  — любой из перечисленных выше нелинейных (линейных), простых (множественных) коэффициентов детерминации;  $m$  — число переменных, исходя из которого вычислялся коэффициент детерминации  $\eta^2$ ;  $n$  — число значений каждой переменной (одинаковое для всех переменных);  $mn$  — общее число всех наблюдений\*.

Если вспомнить, что коэффициент нелинейной детерминации  $\eta^2_{u/e}$  есть отношение дисперсии условных средних арифметических значений случайной величины  $U$  при условии, что другая случайная величина  $Z$  принимает ряд из  $m$  фиксированных значений, то нетрудно понять смысл проверки однородности ряда средних арифметических значений. Пусть имеется  $m$  выборочных средних арифметических  $M_1, M_2, \dots, M_j, \dots, M_m$  и требуется установить, изменяются ли они от выборки к выборке (все равно, под действием контролируемых или неконтролируемых факторов). Тогда по методам, представленным в главе 3, вычисляют общее среднее значение ( $M$ ) этих средних арифметических, рассматриваемых в качестве условных средних:

$$M = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m M_j n_j,$$

и определяют их дисперсию относительно общего  $M$ :

$$D[M] = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m M_j^2 n_j - M^2.$$

\*Если число значений неодинаково для разных переменных, тогда вместо  $mn$  общее число наблюдений определяется как  $\sum_{j=1}^m n_j$ , где  $j = 1, 2, \dots, m$  — номер случайной переменной;  $n_j$  — число наблюдавшихся ее значений.

Затем рассчитывают выборочные дисперсии  $D_j$  и среднее арифметическое из этих дисперсий:

$$D_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m n_j D_j,$$

после чего вычисляют эмпирическое значение  $F$ -критерия:

$$F_0 = \frac{D[M] \left( \sum_{j=1}^m n_j - m \right)}{D_0(m-1)}, \quad (5.23)$$

и осуществляют проверку аналогично тому, как показано выше для сравнения двух дисперсий. Если  $m$  средних  $M_j$  оказываются статистически неоднородными, следовательно, можно ожидать присутствия явной (при контролируемых факторах) или неявной (при неконтролируемых факторах) регрессионной зависимости.

**Пример 5.11.** В примере 3.3 рассматривалась корреляционная взаимосвязь между статусом на курсе ( $Y$ ) и в своей группе ( $X$ ). Были определены коэффициент детерминации  $\eta_{y/x}^2 = 0.33$  и условные средние арифметические значения статуса на курсе (см. табл. 3.11):  $M_1 = -4$ ;  $M_2 = 24$ ;  $M_3 = 31$ ;  $M_4 = 52$ . Требуется оценить, значима ли детерминация статуса на курсе статусом в группе, т.е.  $\eta_{y/x}^2 \geq 0$ , и (что в данном случае то же самое) однородны ли четыре указанных выборочных средних арифметических значения.

По формуле (5.22) при  $mn = 42$  и  $m = 4$  получаем

$$F_0 = \frac{0,33(42-4)}{(1-0,33)(4-1)} \approx 6,2.$$

Аналогично по формуле (5.23) при  $\sum_{j=1}^m n_j = 42$ ,  $m = 4$  и вычисленных в примере 3.3  $D[M] \equiv D[M(y/x)] \approx 275,83$  и  $D_0 \equiv D_0[y/x] \approx 563,47$  определяем

$$F_0 = \frac{275,83(42-4)}{563,47(4-1)} \approx 6,2.$$

Заметим, что одинаковый результат получился потому, что формула (5.23) является частным случаем формулы (5.22)\*

Для проверки гипотез о значимости  $\eta_{y/x}^2$  и однородности четырех средних арифметических значений из табл. IX6 Приложения 2 для  $\nu_1 = m - 1 = 3$  и  $\nu_2 = mn - m = 38$  находим:

\*Обе формулы приведены потому, что для проверки однородности нескольких выборочных средних не нужно вычислять  $\eta^2$  и достаточно ограничиться формулой (5.23).

$F_{0,01/3,40} = 4,31 < F_0 = 6,2$ . Следовательно, различия между средними не случайны, они должны считаться неоднородными; коэффициент детерминации статуса на курсе статусом в своей группе является значимым

Если  $F$ -критерий используется для проверки однородности нескольких средних арифметических, то для проверки однородности более чем двух дисперсий его применять нельзя. Для проверки однородности нескольких выборочных дисперсий при выборках неравного объема используется критерий Бартлетта, а в случае одинакового объема — более простой критерий Кохрана.

### Критерий Бартлетта

Пусть имеется  $m$  выборок объемом  $n_j$  и с дисперсией  $D_j$ , каждая. Тогда отношение  $B/C$ , где

$$B = 2,3026 \left[ \left( \sum_{j=1}^m n_j - m \right) \lg D - \sum_{j=1}^m (n_j - 1) \lg D_j \right],$$

$$D = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m n_j D_j, \quad (5.24)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j - m} \right)$$

распределено приблизительно как  $\chi^2$ -распределение с  $m-1$  степенями свободы независимо от  $n_j$ , лишь бы все  $n_j \geq 5$ . Следовательно, гипотеза об однородности всех  $D_j$  принимается, если  $B/C \leq \chi_{0,05/m-1}^2$ , и отклоняется, если  $B/C > \chi_{0,01/m-1}^2$ . Из уравнений (5.24) можно видеть, что всегда  $C > 1$ , поэтому сначала вычисляют  $B$  и сопоставляют с критическим значением  $\chi_{\alpha,\nu}^2$ . Если  $B \leq \chi_{\alpha}^2$ , то гипотеза об однородности принимается, если же нет, то приходится вычислять  $C$ .

**Пример 5.12\*.** Ученики шестого — одиннадцатого классов оценивались по тесту «числовые ряды» (табл. 5.12). Требуется определить, изменяется ли дисперсия оценок при переходе от младших классов к старшим. Иначе говоря, нужно проверить однородность дисперсий по критерию Бартлетта. Значения промежуточных расчетов представлены в табл. 5.13.

\*См.: Claus G., Ebner H. Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Berlin, 1967

Таблица 5.12

Исходные данные к примеру 5.12

	Классы					
	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
Оценки по тесту ( $x_{ij}$ )	13,5	18,0	15,0	18,0	18,0	23,0
	9,5	13,0	18,5	19,5	19,5	18,5
	12,0	18,5	14,0	17,0	23,5	18,5
	14,0	13,5	15,0	14,5	16,5	16,5
	12,0	17,5	11,0	20,0	22,0	19,5
	10,0	11,0	15,0	19,0	19,0	18,5
	14,5	15,0	14,5	23,0	15,0	18,5
	15,5	13,0	13,0	22,0	19,5	21,5
	15,0	18,5	19,0	17,5	25,0	19,5
	12,0	16,5	15,0	13,0	15,5	16,5
	9,0	14,5	18,0	17,5	21,0	20,5
	14,5	11,5	16,5	19,5	20,5	17,5
	12,0	16,5	11,5	22,5	18,0	17,0
	18,5	14,0	13,5	15,5	20,0	21,5
	20,0	10,5	10,0	13,0	21,0	23,0
	14,5	16,5	13,5	17,0	17,5	18,0
	11,0	20,5	10,5	19,0	16,0	18,0
	9,0	16,5	13,5	19,0	22,0	22,0
	16,5	15,0	18,5	18,0	22,0	16,5
	12,5	13,5	14,5	21,0	20,5	19,5
	20,0	12,5	14,0	21,5	17,0	22,0
	14,0	14,0	18,0	17,0	20,0	22,5
	12,0	22,5	20,5	17,5	20,5	19,0
	11,5	16,5	13,0	20,5	16,5	—
	13,0	7,5	14,5	18,5	16,5	—
	14,0	—	19,0	—	20,0	—
	13,0	—	—	—	—	—
$S_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$	363,0	376,5	389,0	460,5	502,5	447,5
$n_j$	27	26	26	25	26	23

Таблица 5.13

К расчету критерия Вартлетта при неравных объемах выборок

$j$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2$	$\frac{S_j^2}{n_j}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{S_j^2}{n_j}$	$n_j - 1$	$D_j$	$\lg D_j$	$(n_j - 1) \times \lg D_j$
1	5100,5	4880,3	220,2	26	8,47	0,9279	24,1254
2	5933,2	5670,1	263,1	24	10,96	1,0398	24,9552
3	6018,0	5820,0	198,0	25	7,92	0,8987	22,4675
4	8650,8	8482,4	168,4	24	7,02	0,8463	20,3112
5	9874,8	9711,8	163,0	25	6,52	0,8142	20,3550
6	8807,8	8706,8	101,0	22	4,59	0,6618	14,5586
$\sum_{j=1}^m$	44385,1	43271,4	1113,7	$146 \approx m(n-1)$	45,48	—	126,7739

Общую дисперсию  $D$  можем определить либо по формуле (5.24), либо по формуле

$$D = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{S_j^2}{n_j} \right),$$

где обозначенные величины приведены в табл. 5.12 и 5.13.

$$D \approx 7,63 \quad \text{и} \quad \lg D = 0,8825.$$

Тогда по формуле (5.24)

$$B = 2,3026(146 \cdot 0,8825 - 126,7739) \approx 4,77.$$

Из табл. VII Приложения 2 находим для  $\nu = m - 1 = 5$

$$\chi_{0,05/5}^2 = 11,1 > B = 4,77,$$

следовательно, гипотеза об однородности дисперсий может быть принята.

### *G-критерий Кохрана*

В. Кохран показал, что отношение максимально большой из выборочных дисперсий к сумме всех  $m$  сравниваемых дисперсий

$$G = \frac{\max D_j}{\sum_{j=1}^m D_j} \quad (5.25)$$

зависит только от  $m$  и от числа степеней свободы  $\nu = n - 1$ , где  $n$  — одинаковый объем выборок. В табл. X Приложения 2 приведены квантили  $G$ -распределения Кохрана, вычисленные для  $\alpha = 0,05$  и  $0,01$ . Проверка гипотез осуществляется стандартным для всех критериев способом.

**Пример 5.13\*.** Требуется сравнить три варианта метода преподавания (А, В и С), которые отличаются всего одним признаком — применением наглядного материала. Был проведен эксперимент, состоявший в том, что для каждого из трех равных по объему случайных контингентов учеников из параллельных классов преподавание определенного учебного материала осуществлялось только по одному из указанных вариантов. В заключение была проведена контрольная работа, результаты которой оценивались в баллах. Первичные данные эксперимента представлены в табл. 5.14. Определим, однородны ли дисперсии оценок, полученных учениками, обучение которых проводилось с различным использованием наглядного материала.

\*См.: Claus G., Ebner H. Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Berlin, 1967.

Таблица 5.14

Исходные данные к примеру 5.13

	Метод А	Метод В	Метод С
Оценки в баллах ( $x_{ij}, i = 1, 2, \dots, 15$ )	9	15	18
	11	16	14
	10	15	17
	12	10	9
	7	13	14
	11	14	17
	12	15	16
	10	7	15
	13	13	16
	11	15	8
	13	15	14
	11	14	10
	10	11	16
	12	15	15
	13	10	17
$S_j$	165	198	216

Вычисляя любым известным способом дисперсии, получаем

$$D_A = 2,7; \quad D_B = 6,6; \quad D_C = 9,4.$$

Определяем по уравнению (5.25)

$$G = \frac{9,4}{2,7 + 6,6 + 9,4} \approx 0,503$$

Из табл. X Приложения 2 для  $m = 3$  и  $\nu \approx 16$  (ближайшее большее, чем  $\nu = 14$ , значение) находим, что  $G_{0,05} = 0,547 > G = 0,503$ , т. е. дисперсии можно считать однородными.

## § 5. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

### § 5.1. Метод максимального правдоподобия

Выше были рассмотрены методы проверки статистических гипотез с помощью специальных критериев. Однако наряду с «критериальными» методами в математической статистике имеются методы точечного и интервального оценивания, не использующие критериев в том виде, как это показано. К таким методам можно отнести и метод максимального правдоподобия.

Этот метод, предложенный Р. Фишером, служит для точечной оценки любых параметров генеральной совокупности по выборке объемом  $n$  и состоит в следующем. Пусть случайная величина  $X$

имеет функцию распределения известного вида, определяемую некоторыми параметрами  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j, \dots, \theta_N$ , которые необходимо оценить по выборке значений  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , где  $n$  — объем выборки. Тогда вероятность появиться в выборке любому значению  $x_i$  зависит (для данного закона распределения) только от совокупности из  $N$  конкретных значений параметров  $\theta_j$ ; обозначим эту вероятность

$$P_i(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N). \quad (5.26)$$

Вероятность совместного появления в выборке  $n$  наблюдавшихся значений  $x_i$ , обозначим ее

$$L \left( \bigcap_{i=1}^n x_i, \bigcap_{j=1}^N \theta_j \right),$$

очевидно, является произведением вероятностей вида (5.26) и называется *функцией правдоподобия*<sup>\*</sup>:

$$L \left( \bigcap_{i=1}^n x_i, \bigcap_{j=1}^N \theta_j \right) = \prod_{i=1}^n P_i \left( x_i, \bigcap_{j=1}^N \theta_j \right). \quad (5.27)$$

Для упрощения вычислений на практике чаще используется логарифм функции правдоподобия

$$\log L = \sum_{i=1}^n \log P_i \left( x_i, \bigcap_{j=1}^N \theta_j \right), \quad (5.28)$$

причем в зависимости от обстоятельств логарифмирование проводится в натуральных ( $\ln$ ), десятичных ( $\lg$ ) или двоичных ( $\log_2$ ) логарифмах.

Смысл отыскания оценок для параметров  $\theta_j$  состоит в том, чтобы принять в качестве оценок такие значения всех  $\theta_j$ , при которых для выборочных значений  $x_i$  функции (5.27) или (5.28) обратились бы в максимум. Математически это задача отыскания экстремума функции многих переменных<sup>\*\*</sup>, и в общем виде она не всегда может быть решена. К счастью исследователей психологического, педагогического и других смежных профилей, для наиболее употребительных функций распределения и их параметров эта задача

<sup>\*</sup>Знак  $\bigcap_{i=1}^n$  — это знак пересечения (логического умножения) всех элементов от  $i = 1, 2, \dots, n$ . Аналогично знаку суммы  $\sum$ , и произведения  $\prod$ , он используется для сокращения записи.

<sup>\*\*</sup>Отыскание экстремума функции  $N$  переменных заключается в том, что ее дифференцируют в частных производных по каждому из аргументов, получая  $N$  уравнений, которые приравнивают к нулю и совместно решают. В результате и определяются значения оценок  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ .

раз и навсегда решена, и можно пользоваться готовыми результатами. А именно: максимизация функции правдоподобия достигается при оценке вероятности частотой, при оценке моментов генеральной совокупности выборочными моментами и т. д., согласно приводившимся формулам. При этом все рассмотренные оценки состоятельны, в большинстве случаев эффективны и достаточны, но могут быть смещенными (см. табл. 5.1). Заметим также, что многие формулы рассмотренных выше критериев могут быть получены с использованием метода максимального правдоподобия; в частности, формулы (5.9) и (5.11)<sup>\*</sup>. В качестве особой разновидности метода максимального правдоподобия можно рассматривать метод оценки апостериорной вероятности гипотез, предложенный задолго до Р. Фишера английским священником Т. Бейесом.

### 5.1.1. Метод Бейеса



Особенностью этого метода является использование априорных вероятностей истинности (или ложности) гипотез, для того чтобы на основе апостериорных оценок вероятностей событий, интересующих исследователя, оценить (в виде апостериорной вероятности) истинность или ложность гипотез, т. е. уточнить априорную информацию опытным путем.

Пусть  $P(I)$  и  $P(L)$  — заранее известные (априорные) вероятности истинности и соответственно ложности гипотез (см. формулу (5.2)). Производя опыт, благодаря которому (апостериори) определяются условные вероятности  $P(P/I)$  — приема истинной и  $P(P/L)$  — приема ложной гипотезы, можем оценить вероятность принятия истинной гипотезы

$$P(PI) = P(I)P(P/I) = P(P)P(I/P) \quad (5.29)$$

и вероятность принятия ложной гипотезы

$$P(PL) = P(L)P(P/L) = P(P)P(L/P), \quad (5.30)$$

где полная вероятность принять истинную или ложную гипотезу:

$$P(P) = P(PI) + P(PL). \quad (5.31)$$

Тогда из равенств (5.29) и (5.31) можем определить апостериорную вероятность истинности принимаемой гипотезы:

$$P(I/P) = \frac{P(I)P(P/I)}{P(P)} = \frac{P(I)P(P/I)}{P(PI) + P(PL)}. \quad (5.32)$$

---

\*См.: Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения. М., 1969.

Аналогично из равенств (5.30) и (5.31) можем определить апостериорную вероятность ложности принимаемой гипотезы:

$$P(Л/П) = \frac{P(Л)P(П/Л)}{P(ПИ) + P(ПЛ)}. \quad (5.33)$$

Заметим, что сумма левых и соответственно правых частей равенств (5.32) и (5.33) равна единице, так как принятие истинной и принятие ложной гипотезы образуют полную группу событий.

Равенства (5.32) и (5.33) называются формулами апостериорных (условных) вероятностей принятия гипотез. Точно так же можно построить формулы для  $P(И/О)$  и  $P(Л/О)$  — апостериорных (условных) вероятностей отклонения гипотез. Все эти и подобные им формулы для произвольного числа гипотез известны под названием формулы Байеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^N P(H_i)P(A/H_i)}, \quad (5.34)$$

где  $P(H_i/A)$  — апостериорная вероятность истинности (ложности) гипотезы  $H_i$  при условии опыта  $A$ ;  $H_i$  —  $i$ -я принимаемая (отклоняемая) гипотеза;  $N$  — полная группа несовместимых гипотез;  $A$  — опыт, дающий информацию об истинности (ложности)  $i$ -й гипотезы;  $P(H_i)$  — априорная вероятность  $i$ -й гипотезы;  $P(A/H_i)$  — апостериорная вероятность принятия (отклонения)  $i$ -й гипотезы в опыте  $A$ ;  $\sum_{i=1}^N P(H_i)P(A/H_i) = P(A)$  — полная вероятность принятия (отклонения) в опыте всех гипотез.

Поясним использование метода Байеса для частного случая проверки двух гипотез (или, что то же самое, — проверки истинности или ложности одной гипотезы) по формулам (5.32) и (5.33).

**Пример 5.14.** Согласно результатам многочисленных исследований только около 80% людей пригодны к профессии оператора (летчик, диспетчер энергетического, химического и других производств и т. д.). Для отбора специалистов-операторов проводятся пробы на профессиональную пригодность. При этом, допустим, человека считают пригодным к данной операторской профессии, если он выполняет 95% проб (специальных заданий), и непригодным, если он выполняет только 50% проб. Таким образом, дано: гипотеза  $H_1$  — пригоден и  $P(H_1) = 0,8$ ; гипотеза  $H_2$  — непригоден и  $P(H_2) = 0,2$ ; апостериорные вероятности принять гипотезы:  $P(П/H_1) = 0,95$  и  $P(П/H_2) = 0,5$ . Спрашивается, каковы вероятности  $P(H_1/П)$  и  $P(H_2/П)$  того, что среди выполнивших 95% проб окажутся люди, действительно пригодные к профессии оператора и соответственно непригодные к ней?

Пользуясь формулой (5.32), определяем

$$P(H_1/\Pi) = \frac{P(H_1)P(\Pi/H_1)}{P(H_1)P(\Pi/H_1) + P(H_2)P(\Pi/H_2)} = \\ = \frac{0,8 \cdot 0,95}{0,8 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,5} \approx 0,88.$$

Точно так же, пользуясь формулой (5.33), определяем

$$P(H_2/\Pi) = \frac{P(H_2)P(\Pi/H_2)}{P(H_1)P(\Pi/H_1) + P(H_2)P(\Pi/H_2)} = \\ = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,5} \approx 0,12.$$

Можно видеть, что действительно опыт позволяет уточнить априорную информацию. В этой связи допустим, что проведено новое испытание для людей, отобранных в первом опыте как профессионально пригодных. Пусть снова апостериорные вероятности  $P(\Pi/H_1) = 0,95$  и  $P(\Pi/H_2) = 0,5$ . Спрашивается, какова вероятность прошедшим и второе испытание оказаться пригодными к операторской деятельности?

Очевидно, целесообразно использовать информацию, полученную после первого испытания. Поэтому вместо априорных вероятностей  $P(H_1) = 0,8$  и  $P(H_2) = 0,2$  используем апостериорные вероятности гипотез  $P(H_1/\Pi) = 0,88$  и  $P(H_2/\Pi) = 0,12$ . Тогда по формуле (5.34) вычисляем

$$P(H_1/\Pi, \Pi) = \frac{P(H_1/\Pi)P(\Pi/H_1)}{\sum_{i=1}^2 P(H_i/\Pi)P(\Pi/H_i)} = \\ = \frac{0,88 \cdot 0,95}{0,88 \cdot 0,95 + 0,12 \cdot 0,5} \approx 0,93$$

Можем видеть, что благодаря новому опыту апостериорная вероятность принятия истинной гипотезы еще увеличилась. Заметим, однако, что увеличение после второго опыта оказалось меньше, чем после первого опыта. Если бы последовательно проводились все новые и новые опыты, то искомая апостериорная вероятность увеличивалась бы, асимптотически приближаясь к единице как к своему пределу, при бесконечном увеличении количества опытов. Причем за каждое асимптотически уменьшающееся приращение апостериорной вероятности исследователю пришлось бы расплачиваться асимптотически увеличивающимся до бесконечности числом опытов. В этой связи возникают две существенные проблемы: первая — какое число наблюдений (опытов) необходимо и достаточно провести, чтобы определить искомый параметр

(функцию) с требуемой степенью точности, и вторая — как можно распорядиться последовательным накоплением информации от опыта к опыту, чтобы по возможности уменьшить число наблюдений.

§ 1.1 Классический метод определения параметра функции с заданной точностью

Пусть по выборке объемом  $n$  требуется оценить параметр  $\theta^*$  с априори задаваемой точностью. Мерой точности является *относительная ошибка* (первого рода)  $\alpha$ , которую, как обычно, полагают равной 0,05 или 0,01, где

$$\alpha = \frac{\theta - \theta^*}{\theta^*}, \quad (5.35)$$

$\theta$  — выборочная оценка параметра  $\theta^*$ .

Мерой точности также является и *абсолютная ошибка*  $\Delta$ :

$$\Delta = |\alpha \cdot \theta^*| = |\theta - \theta^*|. \quad (5.36)$$

В соответствии с определением доверительного интервала по формулам (5.1) и (5.15) абсолютная ошибка  $\Delta$  задается следующим образом:

$$\Delta = \sigma(\theta^*) t_{\alpha, \nu}, \quad (5.37)$$

где  $\sigma(\theta^*)$  — стандартная погрешность параметра, определяемая формулами из табл. 5.2. В частности, для среднего арифметического значения  $M[X]$

$$\sigma[M(X)] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}}, \quad (5.38)$$

где  $\sigma[X]$  — стандартное отклонение, оцениваемое на выборке объемом  $n$ .

Подставляя (5.38) в (5.37) и преобразуя, получим

$$n = \frac{1}{\Delta^2} \sigma^2[X] t_{\alpha, \nu_{\max}}^2, \quad (5.39)$$

где  $n$  — объем выборки, необходимый и достаточный для оценки среднего арифметического с точностью до  $\alpha$ ;  $\Delta$  — заданная исследователем абсолютная ошибка определения среднего арифметического значения по формуле (5.36) при условии выбранного по (5.35) значения  $\alpha$ ;  $\sigma^2[X] \equiv D[X]$  — выборочная дисперсия;  $t_{\alpha, \nu_{\max}} = 1,96$ , если  $\alpha = 0,05$ , и  $t_{\alpha, \nu_{\max}} = 2,58$ , если  $\alpha = 0,01$ .

**Пример 5.15.** Известно, что для любого субтеста шкалы Векслера (тип WAIS) среднее арифметическое значение шкальной оценки  $M = 10$ , а дисперсия  $D = 9$ . Определим число наблюдений,

необходимое для оценки среднего арифметического значения для любого субтеста этой шкалы выборочным путем, чтобы относительная ошибка не превышала 5% (т. е. чтобы  $\alpha = 0,05$ ).

Абсолютная ошибка по формуле (5.36) равна:  $\Delta = 0,05 \cdot 10 = 0,5$  (шкальной оценки). Тогда по формуле (5.39) находим

$$n = \frac{9 \cdot 1,96^2}{0,5^2} \approx 139.$$

Следовательно, необходимо и достаточно иметь в выборке 139 человек.

Аналогичным путем из формулы (5.37), подставляя в нее соответствующую формулу стандартной погрешности искомого параметра (нужная формула выбирается из табл. 5.2) и преобразуя, находят формулу объема выборки, необходимого и достаточного для оценки искомого параметра с заданной ошибкой  $\alpha$ . Например, требуется оценить вероятность  $P$ , пользуясь частотой  $p$ . Дисперсия ошибки  $\sigma^2(p) = p(1-p) : n$ , следовательно, по (5.39) получаем для  $\alpha = 0,05$

$$n = \frac{(1-p)t_{\alpha/\infty}^2}{\alpha^2 p}, \quad (5.40)$$

где  $p$  — предварительно оцененная по выборке частота.

**Пример 5.16.** В примерах 1.2 и 5.7 рассматривалась оценка вероятности появления цифры «7» при свободном записывании цифр испытуемым. Частота  $p$  («7») = 0,108 при объеме выборки 1300. Спрашивается, какой нужен был бы объем выборки, чтобы определить вероятность  $P$  («7») с ошибкой в 5%? в 10%?

Для  $\alpha = 0,05$  по формуле (5.40) находим

$$n = \frac{1,96^2(1-0,108)}{0,0025 \cdot 0,108} \approx 12\,691 \text{ (наблюдений).}$$

Аналогично для  $\alpha = 0,1$ , учитывая, что  $t_{0,1/\infty} = 1,645$ , находим

$$n = \frac{1,645^2(1-0,108)}{0,01 \cdot 0,108} \approx 2235 \text{ (наблюдений)}$$

Таким образом, при  $n = 1300$  частота  $p$  («7») = 0,108 измерена более, чем с 10%-й относительной ошибкой.

Рассматриваемый классический метод фактически создан для случайных выборок из однородных совокупностей. А как определить объем выборки из гетерогенной совокупности? Если априори известно распределение вероятностей элементов гетерогенной совокупности, то в соответствии с классической процедурой можно осуществить типический отбор (по схеме независимых испытаний) следующим образом.

Будем рассматривать гетерогенные совокупности как объединения однородных частей. Тогда *простая* гетерогенная совокупность может быть представлена как состоящая из непересекающихся однородных частей (рис. 5.16, а), а *сложная* — как состоящая из пересекающихся или пересекающихся и непересекающихся частей (рис. 5.16, б).

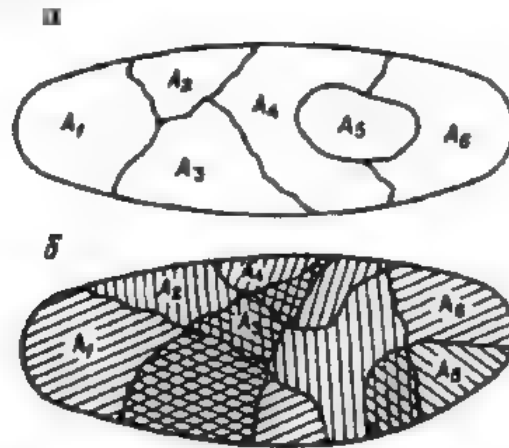


Рис. 5.16. Гетерогенные совокупности.

а — простая гетерогенная совокупность как объединение своих непересекающихся частей:  $A \equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ ; б — сложная гетерогенная совокупность как объединение своих пересекающихся и непересекающихся частей:  $A \equiv A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ .

Пусть простая гетерогенная совокупность состоит из  $s$  однородных частей, вероятности появления которых  $P_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, s$ , известны и в сумме равны единице ( $s$  — это полная группа событий). Тогда из определения величины  $t$ -критерия Стьюдента по формуле (5.13) следует:

$$t^2 = \frac{z^2}{\chi^2/\nu} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\chi^2}{z^2} t^2.$$

Полагая  $\nu = n_i$ ,  $z^2 = \Delta^2 = \alpha^2 P_i^2$  и  $\chi_i^2 = P_i(1 - P_i)$ , получаем для оценки  $i$ -й вероятности

$$n_i = t_{\alpha, \nu_{\max}}^2 (1 - P_i) / \alpha^2 P_i$$

и для всех  $s$  вероятностей

$$N = \sum_{i=1}^s n_i = t_{\alpha, \nu_{\max}}^2 \sum_{i=1}^s \frac{1 - P_i}{\alpha^2 P_i},$$

где  $n_i$  полностью соответствует уравнению (5.40).

Аналогично рассуждая, можем представить сложную гетерогенную совокупность как состоящую из  $s$  частей, повторяемых  $m$  раз, т. е. как матрицу с  $s$  строками и  $m$  столбцами, имеющую всего  $L = ms$  пересечений. Тогда

$$N = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s n_{ij} = t_{\alpha, \nu_{max}}^2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^s \frac{1 - p_{ij}}{\alpha^2 p_{ij}}, \quad (5.41)$$

где  $N$  — общий объем репрезентативной типической выборки, необходимый и достаточный для оценки многомерного распределения вероятностей изучаемой гетерогенной совокупности;  $p_{ij}$  — выборочная частота  $ij$ -го пересечения;  $n_{ij} = p_{ij}N$  — частота  $ij$ -го пересечения, необходимая и достаточная для оценки вероятности  $P_{ij}$  с ошибкой не больше  $\alpha$ ;  $n_{ij}$  рассматривается так же, как объем случайной выборки из части гетерогенной совокупности с пересечением множества фиксированных свойств.

**Пример 5.17.** В примере 5.3 было получено совместное распределение статуса ( $X_1$ ), нейротизма ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) на выборке в 99 человек (табл. 5.7). Спрашивается, какой объем выборки требуется для оценки этого распределения с ошибкой не более 5%?

Пользуясь частотами  $p_{ijm}$  из табл. 5.7 и формулой (5.41), осуществив вычисления, как показано в табл. 5.15. Результат на первый взгляд ошеломляющий.  $N \approx 260\,400$  наблюдений. Однако много и быть не может, так как речь идет об определении функции многомерного распределения, которое из опыта, как указывалось, определять нелегко именно из-за необходимости очень больших объемов выборки. Покажем, что для оценки отдельного параметра многомерной совокупности требуются выборки меньшего объема\*.

Таблица 5.15  
Вычисление объема выборки из сложной гетерогенной совокупности к примеру 5.17

Код $p_{ijm}$	Величина $p_{ijm}$	$1 - p_{ijm}$	$0,0025 \cdot p_{ijm}$	$\frac{1 - p_{ijm}}{0,0025 \cdot p_{ijm}}$	$n_{ijm}$
$p_{111}$	0,03	0,97	0,000 075	12 933,3	7 812
$p_{112}$	0,10	0,90	0,000 250	3 600,0	26 040
$p_{121}$	0,04	0,96	0,000 100	9 600,0	10 416
$p_{122}$	0,02	0,98	0,000 050	19 600,0	5 208
$p_{211}$	0,05	0,95	0,000 125	7 600,0	13 020
$p_{212}$	0,45	0,55	0,001 125	488,9	117 180
$p_{221}$	0,03	0,97	0,000 075	12 933,3	7 812
$p_{222}$	0,28	0,72	0,000 700	1 028,6	72 912
Суммы				67 784,1	260 399
$n = 1,96^2 \cdot 67\,784,1 \approx 260\,399$					

\*По той простой причине, что отдельный параметр является неполной количественной характеристикой совокупности, как мы всегда это подчеркивали.

**Пример 5.18.** В разделе 4.3.2, оценивая количественные характеристики трехмерной системы случайных величин, мы установили, что при выборке в 42 человека средние арифметические значения и дисперсии статуса на курсе ( $X_1$ ), нейротизма ( $X_2$ ) и эмоциональной экспансивности ( $X_3$ ) соответственно равны:

$$\begin{aligned} M(X_1) &= 3,34, & M(X_2) &= 13,2, & M(X_3) &= 8,9; \\ D(X_1) &= 91, & D(X_2) &= 24, & D(X_3) &= 404. \end{aligned}$$

Спрашивается, какого объема следует взять выборку, чтобы оценить средние арифметические значения статуса, нейротизма и экспансивности с ошибкой, не большей  $\alpha = 0,05$ ?

Сначала вычислим по выборочным данным абсолютные ошибки и их квадраты.

$$\begin{aligned} \Delta[M(X_1)] &= 0,05 \cdot 3,34 = 0,167, & \Delta_1^2 &= 0,167^2 \approx 0,028; \\ \Delta[M(X_2)] &= 0,05 \cdot 13,2 = 0,66, & \Delta_2^2 &= 0,66^2 \approx 0,44; \\ \Delta[M(X_3)] &= 0,05 \cdot 8,9 = 0,445, & \Delta_3^2 &= 0,445^2 \approx 0,2. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая выборочные дисперсии, по формуле (5.39) определим

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{91 \cdot 1,96^2}{0,028} \approx 12485, \\ N_2 &= \frac{24 \cdot 1,96^2}{0,44} \approx 209,6 \approx 210, \\ N_3 &= \frac{404 \cdot 1,96^2}{0,2} \approx 7760. \end{aligned}$$

Можно видеть, во-первых, что, действительно, для оценки среднего арифметического (отдельного параметра) необходимо почти в двадцать раз меньше опытов, чем для оценки трехмерного распределения (предыдущий пример). Во-вторых, чем меньше величина оцениваемого параметра по сравнению с дисперсией, тем больше требуется опытов для оценки с заданной точностью. В нашем случае фактически требуется исследовать максимально  $N_1 = 12485$  человек. При этом остальные переменные ( $X_2$  и  $X_3$ ) будут в среднем измерены с более высокой, чем  $X_1$ , степенью точности. Если же попытаться сэкономить на числе опытов, ориентируясь на минимальное  $N_2 = 210$ , то среднее арифметическое  $M[X_1]$  окажется оцененным с весьма большой ошибкой:

$$\begin{aligned} \alpha[M(x_1), N_1 = N_2] &= \Delta_1 : M(X_1) = \sigma[M(X_1), N_1 = N_2] : M(X_1) = \\ &= \frac{1}{3,34} \sqrt{\frac{91}{210}} \cdot 1,96 \approx 0,4. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы добиться измерения одноименных параметров для нескольких разнородных случайных величин с точностью не меньше заданной, необходима выборка максимального объема (из числа требуемых).

Как показано, классический метод определения необходимого и достаточного объема выборки требует значительного числа наблюдений. Однако при определенной организации исследования можно обойтись меньшим числом наблюдений, не проигрывая в точности. Такая организация предполагает в общих целях проектирование пропорциональной выборки по модели генеральной совокупности, а в частных — при изучении изменчивости средних арифметических — использование средств дисперсионного анализа и математического планирования эксперимента (глава 6), при проверке статистических гипотез относительно отдельных параметров — последовательной процедуры по А. Вальду.



С очевидностью репрезентативна выборка, распределение частот которой равно распределению вероятностей в генеральной совокупности:

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(GC). \quad (5.42)$$

Из этого равенства следует, что маргинальные частоты выборки  $f_{jk..w}^B$  должны быть пропорциональны соответствующим частотам генеральной совокупности:

$$P_{jk..w}^B = \frac{f_{jk..w}^B}{n} = \frac{f_{jk..w}^{rc}}{N} = P_{jk..w}^{rc},$$

откуда перестановкой средних членов пропорции получаем

$$\frac{f_{jk..w}^B}{f_{jk..w}^{rc}} = \frac{n}{N}, \quad (5.43)$$

где  $n$  и  $N$  — объемы выборки и генеральной совокупности. Таким образом, маргинальные частоты и объем выборки пропорциональны частотам и объему совокупности, имеющей конечный объем. Этим обусловлено название — *пропорциональная* выборка. Отметим, что это — так называемая *квотная* выборка, *квоты* (доли, частоты, проценты) элементов которой не произвольно установлены, а выбраны равными (или приближенно равными) вероятностям генеральной совокупности.

Чтобы определить критический, необходимый и достаточный, объем выборки по (5.43), следует ввести еще одно существенное

условие:

$$|f_{jk...w}|_{\min} \geq 2. \quad (5.44)$$

Это вызвано тем, что необходимы хотя бы два измерения, для того чтобы оценить воспроизводимость результатов, вычисляя среднее арифметическое и дисперсию измерений. Так как  $f_{\min} = nP_{\min}$ , то из условий (5.43 и 5.44) естественным образом следует оценка критического объема репрезентативной выборки:

$$n^* = 2 : |P_{jk...w}^s|_{\min}, \quad (5.45)$$

где, на основе равенства (5.42),

$$|P_{jk...w}^s|_{\min} = |P_{jk...w}^{rc}|_{\min}.$$

Оценив критический объем, вычисляют частоты выборочного распределения:

$$n^*P(\Gamma C) = \mathcal{F}(B) = \{f_{jk...w}^s\}, \quad (5.46)$$

которое представляет собой проект для создания реальной выборки. Этот проект в дальнейшем реализуется следующим образом.

Для каждого маргинала (пересечений градаций признаков, интервалов квантования) составляется список лиц, обладающих нужным сочетанием признаков, который в 2–3 раза превышает проектную маргинальную частоту. Из этого списка случайным отбором (например, по жребию) формируются подписки, удовлетворяющие проекту  $\mathcal{F}(B)$ , объединение которых в базе модели образует теперь уже реальный план нескольких краткосрочных гомогенных выборок или резерв для долгосрочной панели.

Разумеется, если истинное генеральное распределение неизвестно, то за исходное для (5.42) принимается стохастическая модель генеральной совокупности. В качестве примера используем модель трехмерной совокупности «пол, экстра—интроверсия и нейротизм», рассмотренную в § 5.1:

$$P(B) = P(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \begin{matrix} & \text{еН} & \text{он} & \text{иН} & \text{ин} \\ \begin{matrix} \text{м} \\ \text{ж} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,072 & 0,008 & 0,224 & 0,096 \\ 0,048 & 0,012 & 0,324 & 0,216 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Определяем по условию (5.45) оценку критического объема выборки:  $n^* = 2 : 0,008 = 250$  (человек). По (5.46) вычисляем проектные выборочные частоты:

$$\mathcal{F}(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = 250P(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = \begin{matrix} & \text{еН} & \text{он} & \text{иН} & \text{ин} \\ \begin{matrix} \text{м} \\ \text{ж} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 18 & 2 & 56 & 24 \\ 12 & 3 & 81 & 54 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Для оценки воспроизводимости (надежности) результата требуется повторять испытания, значит, необходимы повторные выборки. В психологии с этой целью используют расщепление выборочных данных, например на четные и нечетные вопросы анкеты или задания теста. Но таким путем нельзя выявить направленную изменчивость и получить эмпирическую зависимость. Для этого нужно иметь серию не менее чем из трех, а лучше — пяти выборок. Поэтому продолжим пример.

Заменим равенство (5.42) на приближенное, округлив совместные частности до десятых долей.

$$P(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B} \mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) \approx P^*(B) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{эН} & \text{вН} & \text{иН} & \text{ин} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{м} \\ \text{ж} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,0 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

и снова оценим критический объем выборки:  $n^{**} = 2 : 0,1 = 20$  (человек). Теперь проектное выборочное распределение частот таково:

$$F^*(\mathcal{K} \cdot \mathcal{B} \mathcal{U} \cdot \mathcal{K}) = 20P^*(B) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{эН} & \text{вН} & \text{иН} & \text{ин} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{м} \\ \text{ж} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & - & 4 & 2 \\ 2 & - & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Получилось, что в нем отсутствуют две категории людей обоего пола — с редким сочетанием экстраверсии и нейротизма. Поэтому нужно предусмотреть в проекте по 2 человека с сочетанием этих свойств и таким путем увеличить объем выборки до 24 человек. Реализация проекта остается той же. Заметим, что в результате допущенного отклонения от пропорциональности возможно пятисерийное выборочное исследование с общим объемом вдвое меньше против первоначального. В то же время каждая из пяти выборок объединяет в себе две части — вероятную из двадцати человек и маловероятную из четырех человек, которые можно исследовать и использовать как вместе, так и по отдельности.

### § § § Метод последовательной проверки статистических гипотез

Этот метод, предложенный А. Вальдом, изучен лишь для некоторых законов распределения и применяется, главным образом, для оценки двух вероятностей и средних значений\*. Существо последовательного (секвенциального) анализа состоит в следующем.

\*Хотя в принципе может быть применен для сравнения любых двух параметров с известной функцией распределения, что требует, однако, специальной разработки.

Вальд дополнил альтернативное поведение при классической проверке гипотез третьим исходом: продолжить испытания, если нет достаточных оснований принять одну из гипотез (см. рис. 5.6, в), и предложил использовать так называемое *отношение правдоподобия*, которое является отношением двух функций правдоподобия (5.27), одна из которых соответствует гипотезе  $H_0$ , а другая — альтернативной гипотезе  $H_1$ .

Пусть имеется некоторая выборка значений  $x_i$  случайной величины  $X(i = 1, 2, \dots, n)$ , для которой известна плотность вероятности  $f(x, \theta)$ , зависящая от рассматриваемого параметра  $\theta$ . Пусть, далее, проверяются гипотезы:  $H_0$ , состоящая в том, что  $\theta = \theta_0$  и  $H_1$ , состоящая в том, что  $\theta = \theta_1$ . Тогда отношение правдоподобия в соответствии с (5.27) можно записать так:

$$L = \frac{P_1}{P_0} = \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)}$$

или в логарифмической форме

$$\lg L = \lg P_1 - \lg P_0 = \sum_{i=1}^n [\lg f(x_i, \theta_1) - \lg f(x_i, \theta_0)].$$

Этот логарифм отношения правдоподобия вычисляется после каждого  $i$ -го испытания и сравнивается с *доверительными пределами*, которые определяются исходя из выбранных значений вероятностей ошибок первого ( $\alpha$ ) и второго ( $\beta$ ) рода.

Доверительные пределы нетрудно найти по следующим соображениям. Если исходы проверки гипотез независимы, то условные вероятности принятия истинной и ложной гипотез, а также отклонения истинной и ложной гипотез равны:

$$1 - \alpha = \beta, \quad (5.47a)$$

$$\alpha = 1 - \beta. \quad (5.47b)$$

Тогда из (5.47a) определяем *нижний предел*:

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} \leq 1,$$

а из (5.47b) — *верхний предел*:

$$1 \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

Логарифмируя эти пределы и сопоставляя их с величиной логарифма отношения правдоподобия на каждом  $i$ -м «шаге» последовательного анализа, осуществляем выбор поведения: если  $\lg L \leq \lg[\beta/(1 - \alpha)]$ , то принимается гипотеза  $H_0$ , если  $\lg L \geq \lg[(1 - \beta)/\alpha]$ , то

принимается гипотеза  $H_1$ , если  $\lg\{\beta/(1-\alpha)\} < \lg L < \lg\{(1-\beta)/\alpha\}$ , то продолжаются испытания — до тех пор пока не будет принята одна из двух проверяемых гипотез. При этом нет нужды каждый раз вычислять  $\lg L$  и значения пределов. Специальными преобразованиями для основных функций распределения получены линейные уравнения для нижнего ( $m_0$ ) и верхнего ( $m_1$ ) пределов:

$$m_0(n) = h_0 + kn \quad \text{и} \quad m_1(n) = h_1 + kn,$$

где  $n$  — последовательно увеличивающееся число испытаний, а значения  $k, h_0$  и  $h_1$  представлены в виде формул в табл. 5.16. С использованием этих формул последовательная процедура осуществляется следующим образом. Выбираются  $\theta_0$  и  $\theta_1$ , как правило, по априорным соображениям. Затем выбираются  $\alpha$  и  $\beta$ . Вычисляются  $k, h_0$  и  $h_1$ . Далее по одному (или группами в  $s$  единиц) осуществляются испытания, и для каждого  $i$ -го испытания ( $i = 1, 2, \dots, n$  или  $i = s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_n$ ) накапливается сумма

$$m_i = \sum_{j=1}^i x_j = \sum_{j=1}^i \left( \sum_{k=1}^s x_{kj} \right), \quad (5.48)$$

которая сопоставляется со значениями  $m_0$  и  $m_1$ , вычисляемыми при  $n = i$ , как показано на рис. 5.17. Одна из гипотез принимается, как только точка с координатами  $[m_i, i]$  пересечет соответствующую линию.

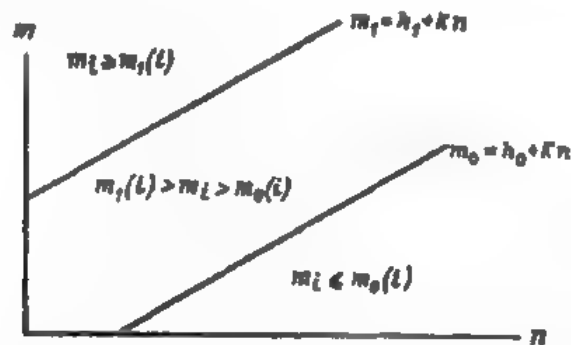


Рис. 5.17. Графическая интерпретация проверки гипотез при последовательных испытаниях.

По оси абсцисс — число испытаний ( $n \equiv i$ ); по оси ординат — значения  $m$ , определяемые по формуле (5.48). Область  $m_i \leq m_0(i)$  соответствует принятию гипотезы  $H_0$ , область  $m_i \geq m_1(i)$  соответствует принятию гипотезы  $H_1$ , между ними — область продолжения испытаний.

Формулы для определения границ областей поведения при проверке гипотез по методу последовательного анализа

Вид распределения	Угловой коэффициент (k)	Свободный член для гипотезы $H_0(h_0)$	Свободный член для гипотезы $H_1(h_1)$
Биномиальное (сравниваются две вероятности)	$\frac{\lg \frac{1-P_1}{1-P_0}}{\lg \frac{P_1}{P_0} - \lg \frac{1-P_1}{1-P_0}}$	$\frac{\lg \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lg \frac{P_1}{P_0} - \lg \frac{1-P_1}{1-P_0}}$	$\frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{P_1}{P_0} - \lg \frac{1-P_1}{1-P_0}}$
Нормальное (сравниваются два средних арифметических)	$\frac{M_1(X) + M_2(X)}{2}$	$\frac{D(X)}{M_1(X) - M_0(X)} \lg \frac{\beta}{1-\alpha}$	$\frac{D(X)}{M_1(X) - M_0(X)} \lg \frac{1-\beta}{\alpha}$
Экспоненциальное (сравниваются два значения параметра $\lambda = \frac{M(X)}{D(X)}$ )	$\frac{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_1 - \lambda_0}$	$-\frac{\lg \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lambda_1 - \lambda_0}$	$-\frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lambda_1 - \lambda_0}$

Примечание. Во всех случаях подсчитывается  $m = \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^s x_{ij} \right)$ , где для биномиального распределения  $x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{если событие не появилось,} \\ 1 & \text{если событие появилось} \end{cases}$ , для нормального и экспоненциального распределений  $x_{ij}$  — это наблюдаемое в  $i$ -й группе из  $s$  опытов ( $s \geq 1$ ) значение случайной величины  $X$ .

Таблица 5.17

Формулы для априорной оценки среднего числа шагов ( $\nu$ ) последовательной процедуры Вальда

Вид распределения	Для принятия «нуль»-гипотезы, если она истинна $M(\nu, H_0)$	Для принятия «альтернативной» гипотезы, если она истинна $M(\nu, H_1)$	Для равновероятных гипотез $M(\nu)$
Биномиальное	$\frac{(1-\alpha) \lg \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{P_0 \lg \frac{P_1}{P_0} + (1-P_0) \lg \frac{1-P_1}{1-P_0}}$	$\frac{\beta \lg \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{P_1 \lg \frac{P_1}{P_0} + (1-P_1) \lg \frac{1-P_1}{1-P_0}}$	—
Нормальное	$\frac{(1-\alpha) \lg \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\left[ \frac{M_1(X) - M_0(X)}{\sigma(X)} \right]^2}$	$\frac{\beta \lg \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\left[ \frac{M_1(X) - M_0(X)}{\sigma(X)} \right]^2}$	$\frac{-\lg \frac{\beta}{1-\alpha} \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\left[ \frac{M_1(X) - M_0(X)}{\sigma(X)} \right]^2} = -\frac{h_0 h_1}{D(X)}$
Экспоненциальное	$\frac{(1-\alpha) \lg \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1}}$	$\frac{\beta \lg \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1}}$	$\frac{-\lg \frac{\beta}{1-\alpha} \lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\left( \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^2} = -\frac{h_0 h_1 (\lambda_1 + \lambda_0)^2}{4}$

Подробнее остановимся на ограничениях к использованию процедуры Вальда. Во-первых, последовательный анализ хорошо разработан и доказан для сравнительно простых однородных совокупностей, полученных в независимых испытаниях. Во-вторых, нужно быть уверенным в устойчивости закона распределения совокупности. В-третьих, следует предварительно установить эффективность последовательной процедуры по сравнению с классической. Хотя Вальд показал, что при последовательной процедуре одна из гипотез будет в конце концов достоверно принята, все же число наблюдений может оказаться больше, чем при классической процедуре. Чтобы до опыта оценить эффективность последовательного анализа, необходимо, пользуясь априорными данными, определить число наблюдений, требуемое по классической процедуре ( $N$ ), и число «шагов» последовательного анализа ( $\nu$ ).

Число шагов  $\nu$  является случайной величиной, зависящей от степени «близости» гипотез (разница  $\theta_1 - \theta_0$ ), от величин  $\alpha$  и  $\beta$  и от вероятности истинности (ложности) гипотез. На практике по априори выбранным  $\alpha$ ,  $\beta$  и соотношению значений параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  оценивают математическое ожидание числа шагов, за которое окончится последовательный анализ:  $M(\nu, H_0)$  — для принятия гипотезы  $H_0$ , если она истинна,  $M(\nu, H_1)$  — для принятия гипотезы  $H_1$ , если она истинна, и  $M(\nu)$  — в наихудшем случае, когда  $\theta = 0,5(\theta_1 + \theta_0)$ . Формулы для априорной оценки этих величин приведены в табл. 5.17.

Эффективность последовательного анализа оценивается по формуле

$$\text{Эф} = 1 - M(\nu) : N. \quad (5.49)$$

Очевидно, что при  $\text{Эф} > 0$  последовательную процедуру стоит предпочесть классической, если позволяют указанные выше ограничения. Заметим, что они снимаются, если исследование ведется с применением психометрических шкал и методов\*.

**Пример 5.19.** При измерении интеллекта взрослых с помощью вышеупомянутой шкалы Векслера получаемые оценки нормально распределены со средним арифметическим значением 100 единиц и стандартной ошибкой не более 2 единиц IQ. Для выборки из десяти восемнадцатилетних школьников (8—10-го классов) было установлено, что  $M[\text{IQ}] = 102$  и  $D[\text{IQ}] = 38$ . Однако из предыдущих исследований известно, что у восемнадцатилетних взрослых  $\text{IQ} > 100$ . Спрашивается, сколько испытаний следует провести,

\*Гелкин А. А., Бодров В. А. Применение одного статистического алгоритма разделения входных ситуаций на классы для определения профессиональной пригодности // Вопросы психологии. 1967. № 1.

чтобы проверить  $H_0$  — является ли средний уровень интеллекта нормальным ( $M_0(IQ) = 100$ ), или  $H_1$  — он значимо выше средней нормы ( $M_1(IQ) \geq 102$ )?

Согласно классическому методу оценки параметра с заданной степенью точности, по формуле (5.39) находим при  $\alpha = \beta = 0,05$

$$N = \frac{38 \cdot 1,96^2}{2^2} \approx 37 \quad (\text{человек}).$$

Для выполнения последовательного анализа вычислим логарифмы пределов.

$$\lg[\beta/(1-\alpha)] = \lg(0,05 : 0,95) \approx -1,2790;$$

$$\lg[(1-\beta)/\alpha] = \lg(0,95 : 0,05) = 1,2788.$$

Далее по формулам из табл. 5.17 для нормального распределения получаем

$$M(\nu, H_0) = \frac{0,95(-1,279) + 0,05 \cdot 1,2788}{-\frac{4}{38}} \approx 11 \quad (\text{человек}),$$

$$M(\nu, H_1) = \frac{0,05(-1,279) + 0,95 \cdot 1,2788}{\frac{4}{38}} \approx 11 \quad (\text{человек}),$$

$$M(\nu) = \frac{1,279 \cdot 1,2788}{\frac{4}{38}} = \frac{-24,3 \cdot 24,3}{38} \approx 17 \quad (\text{человек}).$$

Определяем для  $N$  и  $M(\nu)$  эффективность последовательного анализа по формуле (5.49):

$$\text{Эф} = 1 - \frac{17}{37} \approx 0,54.$$

Следовательно, имеет смысл воспользоваться последовательным анализом.

По формулам из табл. 5.16 для нормального распределения вычислим значения  $k$ ,  $h_0$  и  $h_1$ :

$$k = 0,5(102 + 100) = 101, \quad h_0 = \frac{38}{2} \lg \frac{0,05}{0,95} \approx -24,3,$$

$$h_1 = \frac{38}{2} \lg \frac{0,95}{0,05} \approx 24,3.$$

Таким образом, получаем уравнения границ:

$$m_0 = 101n - 24,3; \quad m_1 = 101n + 24,3.$$

Далее, не прибегая к графическому изображению, реализуем последовательное, по уравнению (5.48), накопление суммы  $m_i$ , вычисление значений границ  $m_0(i)$  и  $m_1(i)$  и их сопоставление, как показано в табл. 5.18. В результате уже при  $n = 14$  оказывается, что  $m_{14} > m_1(14)$ , и, следовательно, можно принять гипотезу



Таблица 5.18

Реализация последовательной процедуры к примеру 5.19

$i \equiv n$	$x_i$	$m_i = \sum_{j=1}^n x_j$	$m_0 = 101n - 24,3$	$m_1 = 101n + 24,3$
1	111	111	76,7	125,3
2	108	217	177,7	226,3
3	95	312	278,7	327,3
4	101	413	379,7	428,3
5	100	513	480,7	529,3
6	100	613	581,7	630,3
7	98	711	682,7	731,3
8	97	808	783,7	832,3
9	90	898	884,7	933,3
10	89	987	985,7	1034,3
11	113	1100	1086,7	1135,3
12	116	1216	1187,7	1236,3
13	117	1333	1288,7	1337,3
14	114	1447	1389,7	1438,3

$H_1$  — уровень интеллекта восемнадцатилетних школьников больше среднего IQ шкалы Векслера.

В заключение отметим, что использование вместо «единичных» групповых наблюдений оказывается полезным для ускорения завершения последовательного анализа, но при этом неизбежен проигрыш в эффективности.

## ГЛАВА I ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 1.1 ПОНЯТИЕ О ДИСПЕРСИОННОМ АНАЛИЗЕ

#### 1.1.1. Сущность дисперсионного анализа

Допустим, имеется несколько переменных факторов, которые либо классифицированы, либо упорядочены, либо, наконец, измерены. Требуется установить, влияют ли эти факторы на изучаемую переменную (случайную величину или случайную функцию). Исследование влияния переменных факторов на изучаемую переменную по дисперсиям называется дисперсионным анализом (ДА).

Пусть изучается случайная величина  $X$ , о которой известно, что при определенном комплексе условий  $X$  имеет генеральную дисперсию  $D_0[X]$ . Требуется проверить, влияет ли на  $X$  некоторый фактор (условие)  $A$ , до сих пор не принимавшийся во внимание. Проводится серия наблюдений переменной  $X$  при условии  $A$  (при действии фактора  $A$ ) в дополнение к предыдущему комплексу условий. В результате получаем выборку из  $n$  значений  $X$  ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ), имеющую дисперсию  $D[X]$ . Очевидно, что если фактор  $A$  не влияет на  $X$ , то  $D[X] = D_0[X]$  — в идеальном случае. Практически это не так, но различие не должно превосходить случайного (с заданной степенью надежности), что легко определяется по  $F$ -критерию Фишера. Иначе говоря, если  $D[X] \approx D_0[X]$  — в пределах случайных флюктуаций — можно считать, что либо фактор  $A$  не влияет на  $X$ , либо это влияние несущественно при данном объеме ( $n$ ) выборки.

Если  $D[X] > D_0[X]$ , и это не случайно, то приходится признать, что фактор  $A$  влияет на переменную  $X$ . Тогда, считая действие фактора  $A$  независимым от других условий, можем написать:

$$D[X] = D_0[X] + D_A[X], \quad (6.1)$$

где  $D_0[X]$  — дисперсия, обусловленная случайными влияниями неконтролируемых условий;  $D_A[X]$  — дисперсия, характеризующая влияние фактора  $A$  на изучаемую переменную  $X$ .

Влияние фактора  $A$  на переменную  $X$  может быть различным. Здесь выделяются три случая. Первый случай: фактор  $A$  влияет только на среднюю величину  $X$ , тогда  $D_A[X]$  есть характеристика рассеивания средних значений переменной  $X$  под влиянием фактора  $A$ . Второй случай: фактор  $A$  влияет только на рассеивание значений  $X$ , т. е. на  $D_0[X]$ , тогда  $D_A[X]$  есть некоторая «добавка» к  $D_0[X]$ , выражающая степень влияния фактора  $A$ . Третий случай: фактор  $A$  влияет и на  $M[X]$ , и на  $D_0[X]$ , тогда  $D_A[X]$  суммирует эти влияния.

Если имеет место второй или третий случай, то влияние фактора  $A$  можно учесть, применяя параметрические и непараметрические критерии, меры корреляции, уравнения регрессии. Если же имеет место первый случай, то наряду с рассмотренными методами применяют дисперсионный анализ. Иначе говоря, ДА используется лишь в первом случае. Его мы и будем рассматривать в этой главе.

Пусть теперь в дополнение к фактору  $A$  требуется испытать влияние фактора  $B$ . Здесь возможны два варианта: 1) факторы  $A$  и  $B$  независимы и 2) факторы  $A$  и  $B$  зависимы. Рассмотрим эти варианты отдельно.

1) Факторы  $A$  и  $B$  независимы. Проводится новая серия наблюдений над переменной  $X$  при условии, что кроме  $A$  на  $M[X]$  действует фактор  $B$ . В результате получаем выборку из  $n$  значений переменной  $X$ , имеющую дисперсию  $D^*[X]$ . Очевидно, что

$$D^*[X] = D[X] + D_B[X], \quad (6.2)$$

где  $D_B[X]$  — доля дисперсии, обусловленная действием фактора  $B$ . Если влияние фактора  $B$  значимое (согласно  $F$ -критерию и принятому доверительному уровню), то член  $D_B[X]$  существенно отличен от нуля. Подставляя (6.1) в (6.2), получаем для двух факторов  $A$  и  $B$

$$D^*[X] = D_0[X] + D_A[X] + D_B[X], \quad (6.3)$$

где в левой части — общая дисперсия выборки, а в правой части члены  $D_A[X]$  и  $D_B[X]$  выражают долю рассеивания средних значений  $M[X]$  переменной  $X$  под влиянием факторов  $A$  и  $B$  соответственно; член  $D_0[X]$  выражает случайные флуктуации переменной под влиянием всех других (не  $A$  и не  $B$ ) факторов (условий) опыта и называется *остаточной дисперсией*.

Заметим, что в (6.2) член  $D[X]$  выражал влияние (в общем случайное) всех других, кроме  $B$ , факторов (в том числе и  $A$ ); это тоже остаточная дисперсия. Вообще под *остаточной дисперсией* понимается часть общей дисперсии выборки, которая не уходит в долю дисперсии по данному фактору или группе факторов.

2) Факторы  $A$  и  $B$  зависимы. Тогда помимо трех слагаемых в правой части (6.3) появляется еще одно слагаемое:

$$D^*[X] = D_0[X] + D_A[X] + D_B[X] + D_{AB}[X].$$

Слагаемое  $D_{AB}[X]$  выражает долю общей дисперсии  $D^*[X]$ , обусловленную совместным влиянием факторов  $A$  и  $B$  на математическое ожидание изучаемой переменной  $X$ .

Обобщим сказанное о двух факторах на произвольное количество факторов. Пусть на случайную переменную  $X$  с генеральной дисперсией  $D_0[X]$  влияет  $m$  факторов:  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Тогда, если эти факторы независимы попарно и в совокупности, то

$$D[X] = D_0[X] + D_{A_1}[X] + D_{A_2}[X] + \dots + D_{A_m}[X], \quad (6.4)$$

где  $D[X]$  — общая дисперсия выборки, полученной при воздействии указанных факторов  $A_1, A_2, \dots, A_m$ ;  $D_0[X]$  — генеральная дисперсия, которую мы здесь принимаем за остаточную дисперсию. Члены  $D_{A_i}[X]$  (при  $i = 1, 2, \dots, m$ ) выражают парциальное действие соответствующих факторов на математическое ожидание переменной  $X$ . Если факторы попарно зависимы, то к (6.4) добавляются справа слагаемые, выражающие совместное действие всех возможных пар факторов; число таких слагаемых определяется числом сочетаний из  $m$  по 2. Если факторы к тому же зависимы по три, по четыре и т. д. — по  $m$ , то добавляются еще члены, выражающие долю в общей дисперсии сочетаний факторов по три, по четыре и т. д.

На основе сказанного можно видеть, что общая дисперсия выборки, полученной при влиянии  $m$  факторов, определяется как дисперсия суммы  $m + 1$  случайных величин, где дополнительная случайная величина отображает влияние *неучитываемых условий* (ей соответствует остаточная дисперсия). При этом для независимых факторов общая дисперсия есть *линейная* сумма факторных и остаточной (всего  $m + 1$ ) дисперсий, а для зависимых (в общем случае) сюда добавляется сумма дисперсии всех факторных взаимодействий по два, по три и т. д. — по  $m$ .

Таким образом, сущность ДА состоит в том, чтобы представить общую дисперсию в виде суммы дисперсий, обусловленных влиянием контролируемых и неконтролируемых условий опыта и, оценивая дисперсионные отношения, определить меру влияния контролируемых условий (факторов) на средние значения изучаемой переменной.

### 1.1.2. Предпосылки дисперсионного анализа

Как мы видели, одной из предпосылок ДА является использование  $F$ -критерия Фишера для проверки значимости влияния факторов. Поскольку  $F$ -критерий основывается на предположении о

нормальном распределении генеральных совокупностей, из которых взяты выборки, то это обстоятельство весьма существенно для возможности применения рассматриваемого метода в целом. *Дисперсионный анализ следует применять, когда известно (или доказано), что выборки нормально распределены.* Это первое важное условие грамотного применения ДА. В противном случае истинность выводов ничем не обоснована и не гарантируется.

Второй предпосылкой ДА является, как показано, *выделение факторных и остаточной дисперсий из общей дисперсии.* Чтобы это выделение было возможным, необходимо, чтобы остаточная дисперсия не изменялась от опыта к опыту под влиянием контролируемых и неконтролируемых факторов. В противном случае изменения остаточной дисперсии не позволят однозначно решить, что вносят в рассеивание средних данных контролируемые факторы. Поэтому прежде чем применять дисперсионный анализ, необходимо убедиться в том, что дисперсия выборочных серий не меняется однонаправленно от серии к серии. Если такое изменение происходит, необходимо стабилизировать дисперсию\* и лишь потом применять ДА.

### 1.1.3. Задачи дисперсионного анализа

Основная задача ДА состоит в том, чтобы из произвольного числа факторов, которые могут (как предполагается априори) влиять на изучаемую переменную, выделить *сравнительно небольшое* количество факторов, влияющих наиболее существенно. Эта основная задача ДА, смотря по обстоятельствам, конкретизируется по-разному. В частности, иногда выделяют два этапа ДА. Первый связан с оценкой общего, недифференцированного влияния одного или нескольких факторов на среднее значение изучаемой переменной. Второй этап состоит в исследовании специфического, парциального действия факторов.

Оценка общего влияния факторов позволяет сравнительно быстро минимизировать первоначально обычно большое количество факторов. В результате первого этапа ДА многие из априори выбранных факторов отбрасываются как несущественные. Оставшееся небольшое количество факторов затем исследуется подробно, для того чтобы определить «веса» каждого из факторов и факторных комбинаций.

Таким образом, конкретизация основной задачи ДА может идти в трех направлениях. во-первых, *оценка общего влияния одного или нескольких факторов*, во-вторых, *оценка парциального влияния от-*

\*О методе стабилизации дисперсии см. в кн.: Пустыльников Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., 1968. С. 167-168.

дельных факторов и, в-третьих, оценка парциального влияния различных комбинаций факторов. Отметим, что последнее позволяет обоснованно осуществить выбор между линейной или нелинейной аппроксимациями регрессии.

До сих пор мы предполагали генеральную дисперсию  $D_0[X]$  известной и оценивали действие нового фактора, сравнивая две выборки: выборку с новым фактором и выборку без него. Но обычно имеется всего одна выборка, которая состоит из наблюдений, полученных при различных сочетаниях нескольких факторов, о влиянии которых отсутствует априорная информация. Требуется по этой выборке определить генеральную дисперсию и оценить парциальное и совместное действия всех исследуемых факторов. Тогда практически задача состоит в «расщеплении» общей дисперсии выборки на слагаемые, выражающие влияние факторов и остаточную дисперсию. После этого требуется проверить, значимо ли влияние факторов по отдельности и в комбинациях, и на основе результатов проверки отобрать факторные комбинации, существенно влияющие на исследуемую переменную, для их дальнейшего детального изучения.

## § 1.1. Виды дисперсионного анализа

Планирование и проведение эксперимента, а также схема обчета данных существенно зависят от числа исследуемых факторов, от количества градаций (уровней) каждого из них, от количества повторных (параллельных) испытаний, от того, все или только некоторые сочетания факторов на всех уровнях исследуются. В соответствии с этим выделяют следующие виды ДА.

В зависимости от количества факторов ( $k$ ): однофакторный ( $k = 1$ ), двухфакторный ( $k = 2$ ), трехфакторный ( $k = 3$ ) и т. д. — многофакторный (мультифакторный, при произвольном  $k$ ) ДА.

В зависимости от количества градаций ( $m$ ) каждого из факторов выделяют ДА на двух-, трех-, четырех- и т. д. уровнях. В этой связи обычно говорят об уровнях организации (планирования)  $k$ -факторного эксперимента, т. е. о ДА  $k, m$ , где  $k$  — число факторов, а  $m$  — число их градаций. Обычно стремятся, чтобы  $m$  было для всех  $k$  одинаково, это значительно упрощает ДА.

В зависимости от того, есть повторные испытания при каждом сочетании факторов на каждом уровне или они отсутствуют, выделяют ДА без повторных (параллельных) испытаний и ДА с повторными испытаниями. В последнем случае также стремятся, чтобы число повторных испытаний ( $n$ ) для всех  $k, m$  было одним и тем же. Но в общем случае оно может быть переменным, и это несколько усложняет расчеты.

Наконец, в зависимости от того, все ли сочетания факторов на всех уровнях ( $k, m$ ) используются в исследовании или же часть таких сочетаний пропущена, выделяют полный факторный и дробный факторный ДА.

## § 1.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

### § 1.1.1. Схема расчета при одинаковом количестве повторных испытаний

Здесь будем рассматривать принципиальную схему такого ДА, когда имеется всего один фактор А, исследуемый на произвольном количестве ( $m$ ) уровней. При этом, в сущности, не важно, какие значения принимает фактор А на каждом из рассматриваемых уровней, т. е. не важно, как эти уровни количественно определены, лишь бы это было недвусмысленно. Одним из уровней может быть и отсутствие фактора А. Сначала рассмотрим ДА при одинаковом количестве параллельных испытаний на каждом из уровней.

При одинаковом количестве параллельных испытаний мы имеем схему эксперимента  $m \times n$ , где  $m$  — число уровней фактора А, ( $j = 1, 2, 3, \dots, m$ ) и  $n$  — количество параллельных испытаний на каждом  $j$ -м уровне. Результаты этой схемы табулируются, как показано в верхней части табл. 6.1.

Прежде всего необходимо убедиться в стабильности дисперсий по уровням, применяя критерий Бартлетта или Кохрана. Если дисперсии нестабильны, их нужно стабилизировать. Дальнейшая процедура состоит в разложении общей дисперсии совокупности на части, соответствующие рассеиванию внутри уровней и между уровнями, т. е. надо определить в явном виде уравнение (6.1) Для этого необходимо вычислить и проанализировать соотношение определенных сумм квадратов, показанных в нижней части табл. 6.1.

Общая дисперсия выборки, представленной в табл. 6.1, определяется как

$$D[X] = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2. \quad (6.5)$$

Разложим двойную сумму в формуле (6.5) на составляющие ее части, одна из которых выражает рассеивание внутри уровней (столбцов табл. 6.1), а другая — рассеивание между уровнями.

Таблица 6.1

Исходная таблица однофакторного ДА при одинаковом количестве повторных испытаний

		Уровни (j) фактора А (j = 1, 2, 3, ..., m)					
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	...	A <sub>m</sub>	
Номера (i)	1	x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>13</sub>	...	x <sub>1m</sub>	N = mn
повторных	2	x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	x <sub>23</sub>	...	x <sub>2m</sub>	
испытаний	3	x <sub>31</sub>	x <sub>32</sub>	x <sub>33</sub>	...	x <sub>3m</sub>	
(i = 1, 2, 3, ..., n)	...	...	...	...	...	...	
	n	x <sub>n1</sub>	x <sub>n2</sub>	x <sub>n3</sub>	...	x <sub>nm</sub>	
$\sum_{i=1}^n x_{ij} = S_j$		S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	...	S <sub>m</sub>	$\sum_{j=1}^m S_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}$
$M[x_j] = \bar{x}_j$		$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	...	$\bar{x}_m$	$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j = M[x_{ij}]$
$\sum_{i=1}^n x_{ij}^2$		$\sum_{i=1}^n x_{i1}^2$	$\sum_{i=1}^n x_{i2}^2$	$\sum_{i=1}^n x_{i3}^2$	...	$\sum_{i=1}^n x_{im}^2$	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}^2$
$(\sum_{i=1}^n x_{ij})^2 = S_j^2$		S <sub>1</sub> <sup>2</sup>	S <sub>2</sub> <sup>2</sup>	S <sub>3</sub> <sup>2</sup>	...	S <sub>m</sub> <sup>2</sup>	$\sum_{j=1}^m S_j^2 = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n x_{ij})^2$
$\frac{S_j^2}{n}$		$\frac{S_1^2}{n}$	$\frac{S_2^2}{n}$	$\frac{S_3^2}{n}$	...	$\frac{S_m^2}{n}$	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m S_j^2$

Это разложение представлено следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + n \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2.$$

Преобразуя члены этого уравнения и вводя обозначения, получаем рабочие формулы для вычисления сумм квадратов отклонений:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2, \\ Q_o &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2, \\ Q_A &= n \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из уравнений (6.6) легко видеть, что всегда

$$Q = Q_o + Q_A. \quad (6.7)$$

Теперь, чтобы получить соответствующие дисперсии, нужно равенство (6.7) почленно разделить на число степеней свободы. Но прежде чем идти дальше, нам придется разобраться в одной распространенной ошибке.

Создатель дисперсионного анализа Р. Фишер предложил вычислять дисперсии с учетом их числа степеней свободы, а именно:

$$\begin{aligned} D[X] &= \frac{Q}{mn - 1}, \\ D_o[X] &= \frac{Q_o}{m(n - 1)}, \\ D_A[X] &= \frac{1}{n} \left[ \frac{Q_A}{m - 1} - \frac{Q_o}{m(n - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

При таком расчете дисперсий общая дисперсия есть средняя арифметическая случайной и факторной дисперсий, взвешенных по числу степеней свободы:

$$D[X] \stackrel{?}{=} \frac{mn - m}{mn - 1} D_o[X] + \frac{m - 1}{mn - 1} D_A[X]. \quad (6.9)$$

При  $m \geq 2$  и  $n \geq 2$  дробные множители перед  $D_0[X]$  и  $D_A[X]$  в уравнении (6.9) всегда меньше единицы, т. е. всегда

$$D[X] < D_0[X] + D_A[X],$$

и основное уравнение дисперсионного анализа — уравнение (6.1) — оказывается нарушенным. Заметим при этом, что общая дисперсия  $D[X] = \frac{Q}{mn-1}$  вычисляется правильно. Следовательно, по методике Фишера всегда получаются завышенные значения  $D_0[X]$  и  $D_A[X]$ \*. К сожалению, методика Фишера излагается почти во всех руководствах по математической статистике. Учитывая это, мы сначала будем рассматривать для примера метод Фишера, а затем излагать ДА так, чтобы основное уравнение (6.1) не нарушалось.

Результаты ДА всегда представляют в виде таблицы, где указаны вариативность значения сумм квадратов отклонений (согласно уравнениям (6.6)), количество степеней свободы, оцениваемые дисперсии, а также (часто) граничное значение  $F$ -критерия и доверительная вероятность. Результаты ДА по методике Фишера представлены в табл. 6.2. В табл. 6.3 показаны результаты ДА по исправленной методике вычисления дисперсий. Можно видеть, что различия между этими методиками, как и отмечалось, затрагивают только способ вычисления дисперсий и порядок проверки дисперсионного отношения, но не затрагивают основной процедуры расчета сумм квадратов отклонений.

Таблица 6.2  
Табулированные результаты однофакторного ДА по методу Фишера при одинаковом количестве повторных испытаний на всех уровнях

Вариативность	Суммы квадратов отклонений	Кол-во степеней свободы	Средние квадратов отклонений	Оцениваемые компоненты дисперсии	Значение $F$ -критерия
Между уровнями (факторная)	$Q_A$	$m - 1$	$\frac{Q_A}{m-1}$	$nD_A[X] + D_0[X]$	$F_\alpha = \frac{nD_A[X] + D_0[X]}{D_0[X]}$
Внутри уровней (остаточная)	$Q_0$	$mn - m = m(n - 1)$	$\frac{Q_0}{m(n-1)}$	$D_0[X]$	
Общая	$Q$	$mn - 1$	$\frac{Q}{mn-1}$		

\*Авдилов В. А. Дисперсионный анализ // Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации. М., 1968.



Общее количество степеней свободы для вычисления всех дисперсий в табл. 6.3 одинаковое:  $mn - 1$ . Тогда искомые дисперсии определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} D_A[X] &= \frac{Q_A}{mn - 1}, \\ D_o[X] &= \frac{Q_o}{mn - 1}, \\ D[X] &= \frac{Q}{mn - 1}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Легко видеть, что в уравнениях (6.10) сохранены равенства (6.1) и (6.7), тогда как по Фишеру сохранено лишь равенство (6.7), а основное равенство ДА (6.1) нарушено.

Таблица 6.3

Табулированные результаты однофакторного ДА по исправленному методу при одинаковом количестве повторных испытаний на всех уровнях

Вариативность	Суммы квадратов отклонений	Кол-во степеней свободы	Оцениваемая дисперсия	Значение $F$ -критерия	Вероятность ошибки второго рода
Между уровнями (факторная)	$Q_A$	$mn - 1$	$D_A[X]$	$F_0 = \frac{D_o[X] + nD_A[X]}{D_o[X]}$	$\beta \leq 0,01$
Внутри уровней (случайная)	$Q_o$	$mn - 1$	$D_o[X]$		или
Общая	$Q$	$mn - 1$	$D[X]$		$\beta \leq 0,05$

По Фишеру сначала определяют дисперсионное отношение оцениваемых компонент дисперсий, а затем вычисляют сами дисперсии (см. табл. 6.2). По исправленной методике ДА сначала непосредственно из сумм квадратов отклонений вычисляют выборочные оценки дисперсий и лишь потом рассчитывают дисперсионное отношение непосредственно через  $D_A[X]$  и  $D_o[X]$ , вычисленные по формулам (6.10). При этом, естественно, величину  $F$ -критического следует определять по таблицам  $F$ -распределения для того же числа степеней свободы, что и по Фишеру: для суммы дисперсий в числителе  $m - 1$ , а для знаменателя  $mn - m$ . Если

отношение  $\frac{1}{D_0[X]}(D_0[X] + nD_A[X]) < F$ -критического, то влияние фактора А принимается как несущественное\*. Тогда в качестве оценки генеральной дисперсии вместо величины  $D_0[X]$  можем принять общую дисперсию  $D[X]$ , которая обусловлена только случайными флюктуациями внутри и между уровнями. Если значение  $\frac{1}{D_0[X]}(D_0[X] + nD_A[X]) > F$ -критического, то следует отбросить гипотезу о несущественном влиянии фактора А и принять альтернативную гипотезу о существенном его влиянии.

**Пример 6.1.** Применим ДА к результатам оценки трех методов преподавания, различающихся только использованием наглядного материала (см. пример 5.13).

По данным, приведенным в табл. 5.14, вычислим промежуточные переменные (в общем виде показанные в нижней части табл. 6.1) — табл. 6.4.

Таблица 6.4

Промежуточные данные  
для однофакторного ДА к примеру 6.1

	Метод А	Метод В	Метод С	$N = mn = 3 \cdot 15 = 45$
$S_j = \sum_{i=1}^{15} x_{ij}$	165	198	216	$\sum_{j=1}^3 S_j = 579$
$\sum_{i=1}^{15} x_{ij}^2$	1853	2708	3242	$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{15} x_{ij}^2 = 7801$
$S_j^2$	27225	39204	46656	$\sum_{j=1}^3 S_j^2 = 113085$
$\frac{S_j^2}{15}$	1815,0	2613,6	3110,4	$\sum_{j=1}^3 \frac{S_j^2}{15} = 7539,0$

По уравнениям (6.6) вычислим суммы квадратов отклонений. Далее проведем расчет сначала по методу Фишера. Результаты его представлены в табл. 6.5.

Можно видеть, что при критическом значении  $F$  для числа степеней свободы 2 и 42 и для доверительной вероятности 0,01

$$F = 7,15 > F_{0,01;2/42} = 5,15,$$

\*Не следует забывать, что такой вывод справедлив только для выборки того объема ( $m \times n$ ), который был изучен. При большем количестве испытаний можем получить противоположный результат, и влияние фактора А придется оценить как существенное.

т.е. различие значимо. Гипотезу об одинаковой эффективности трех методов преподавания, отличающихся степенью использования наглядных материалов, нужно отклонить и принять противоположную.

Таблица 6.5

Результаты однофакторного ДА по методу Фишера  
при одинаковом  $k$  к примеру 6.1

Вариативность	Суммы квадратов отклонений	Кол-во степеней свободы	Средние квадратов отклонений	Оцениваемые компоненты дисперсии	Значение F-критерия
Между уровнями	89,2	2	44,6	$15D_A[X] + D_0[X]$	$F_0 = \frac{44,6}{6,24} = 7,15$
Внутри уровней	262,0	42	6,24	$D_0[X]$	
Общая	351,2	44	—	—	

Теперь можем вычислить  $D_A[X]$ , которая, как оказалось, неслучайным образом отличается от нуля. Согласно уравнениям (6.8)

$$D_A[X] = (44,6 - 6,24) \frac{1}{15} \approx 2,56.$$

Таким образом, можем записать основное уравнение ДА:

$$D[X] = D_0[X] + D_A[X],$$

где  $D_0[X] = 6,24$ ;  $D_A[X] = 2,56$  и должно быть  $D[X] = 6,24 + 2,56 = 8,8$ .

Вычислим  $D[X]$ , согласно уравнению (6.8) и данным табл. 6.5:

$$D[X] = \frac{351,2}{44} \approx 7,98.$$

Можно видеть, что основное уравнение ДА при вычислениях по Фишеру не выполняется:  $D[X] < D_0[X] + D_A[X]^*$ .

Выполним теперь расчет дисперсий и дисперсионного отношения по исправленному методу. Дисперсии будем определять по

\*Не случайно в таблицах результатов ДА всегда отсутствуют значения общей дисперсии.

уравнениям (6.10) для  $mn - 1 = 44$  степеней свободы. Результаты приведены в табл. 6.6. Можно видеть, что основное уравнение дисперсионного анализа выполняется: общая дисперсия в точности равна сумме факторной и остаточной дисперсий.

Таблица 6.6

Результаты однофакторного ДА по исправленному методу при одинаковом  $n$  и примеру 6.1

Вариативность	$Q_i$	$mn - 1$	$D_i$	$F$
Факторная	89,2	44	2,03	$F_n = \frac{5,95 + 15 \cdot 2,03}{5,95} \approx 6,12$
Случайная	262,0	44	5,95	
Общая	351,2	44	7,98	$F_{0,01;2/42} = 5,15$ , т.е. различие значимо

Дисперсионное отношение определим по Фишеру:

$$F = \frac{D_o[X] + nD_A[X]}{D_o[X]}.$$

Как видно из табл. 6.6, при вычислении по исправленной методике дисперсионное отношение меньше, чем при вычислении по методу Фишера ( $6,12 < 7,15$ ). В данном примере значимое различие сохраняется. Но важно отметить, что при близких к критическому значениях  $F$  методика Фишера может привести к отбрасыванию верной нулевой гипотезы и к принятию ложной альтернативной гипотезы, т.е. вероятность ошибки второго рода больше, если расчет вести по Фишеру.

### 1.1.1 Схема расчета при разном количестве повторных испытаний

При неодинаковом количестве повторных испытаний схема расчета несколько усложняется. Имеем план эксперимента:  $\sum_{j=1}^m n_j$ , где  $n_j$  — объем выборки при  $j$ -м уровне фактора  $A$ .

Результаты эксперимента табулируются, так же как и в предыдущем случае (табл. 6.1), но добавляется еще одна строка для значений  $n_j$ . Несколько видоизменяются формулы (6.6) для рас-

чета сумм квадратов отклонений. Они теперь имеют вид

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2, \\ Q_o &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2, \\ Q_A &= n \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где

$$N = \sum_{j=1}^m n_j, \quad n = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m n_j.$$

Если пользоваться методом Фишера, то в качестве оцениваемых компонентов дисперсии имеем

$$\begin{aligned} \frac{Q_A}{m-1} &= \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m n_j \right) D_A[X] + D_o[X], \\ \frac{Q_o}{m(n-1)} &= D_o[X] \end{aligned}$$

и

$$F = \frac{1}{D_o[X]} \left\{ \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m n_j \right) D_A[X] + D_o[X] \right\}. \quad (6.12)$$

Ниже мы будем для расчета дисперсий пользоваться исправленными методом, а дисперсионное отношение вычислять по Фишеру.

**Пример 6.2.** Используем ДА для оценки влияния образовательного уровня (и возраста) школьников 6–11-х классов на результаты по тесту «числовые ряды» (см. пример 5.12). Первичные данные приведены в табл. 5.12. Промежуточные данные для расчета сумм квадратов отклонений, согласно уравнениям (6.11), представлены в табл. 6.7. Суммы квадратов отклонений, количество степеней свободы, дисперсии и дисперсионное отношение приведены в табл. 6.8.

Для вычисления дисперсионного отношения используем формулу (6.12). Расчет в табл. 6.8 показывает, что  $F \approx 20,56$ . Заметим, что вычисления по методу Фишера дают значение  $F = 22,5$ , весьма завышенное.

Данные для расчета сумм квадратов отклонений по уравнениям (6.11)  
к примеру 6.2

	Классы						Компоненты сумм в уравнениях (6.11)
	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	
$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$	363,0	376,5	389,0	460,5	502,5	447,5	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} = 2539,0$
$n_j$	27	25	26	25	26	23	$N = 152$
$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2$	5100,5	5933,2	6018,0	8650,8	9874,8	8807,8	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 = 44385,1$
$\frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2$	4880,3	5670,1	5820,0	8482,4	9711,8	8706,8	$\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 =$ $= 43271,4$

Таблица 6.8

Результаты однофакторного ДА (по исправленному методу)  
при разном количестве повторных испытаний

Вариативность	$Q_1$	$N - 1$	$D_1$	$F$
Факторная	860,1	151	5,70	$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m n_j = 25,3$
Случайная	1113,7	151	7,37	$F_0 = \frac{25,3 \cdot 5,70 + 7,37}{7,37} =$ $= \frac{151,55}{7,37} \approx 20,56$
Общая	1973,8	151	13,07	$F_{0,01;5/146} = 3,14 \ll F_0,$ т.е. различие значимо

Сравнение с  $F$ -критическим при доверительной вероятности  $P = 0,99$  и количестве степеней свободы для оцениваемых компонентов дисперсии (соответственно 5 и 146) показывает, что различие значимо. Нулевая гипотеза должна быть отклонена, и следует принять гипотезу о существенном влиянии уровня образования (и возраста) школьников 6—11-х классов на результаты по тесту «числовые ряды».

## 1 : ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

### 1.1.1. Схема расчета при отсутствии повторных испытаний

Основное уравнение ДА при двух факторах А и В, влияющих, как предполагается априори, на средние значения изучаемой переменной X, в общем случае выглядит так:

$$D[X] = D_A[X] + D_B[X] + D_{AB}[X] + D_o[X],$$

где  $D_A[X]$  — компонент общей дисперсии ( $D[X]$ ), обусловленный парциальным влиянием фактора А;  $D_B[X]$  — компонент общей дисперсии, обусловленный парциальным влиянием фактора В;  $D_{AB}[X]$  — компонент, обусловленный совместным влиянием (взаимодействием) факторов А и В;  $D_o[X]$  — остаточная дисперсия. Член  $D_{AB}[X]$  удастся определить лишь при наличии повторных испытаний. Но в ряде случаев практически важно по минимальному количеству наблюдений выявить, существенно ли общее и

парциальное влияние двух факторов без учета их взаимодействия. Поэтому сначала рассмотрим схему двухфакторного ДА, когда повторные наблюдения отсутствуют, затем изложим схему с повторными наблюдениями.

При отсутствии повторных испытаний и произвольном количестве уровней каждого из двух факторов имеем схему испытаний  $t \times g$ , где  $t$  — количество уровней фактора А и  $g$  — количество уровней фактора В. Соответственно имеются уровни  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, t$ ) и уровни  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, g$ ) — всего  $tg$  испытаний. Причем, как показано в табл. 6.9, для каждой пары  $A_j B_i$  имеется всего одно наблюдение  $x_{ij}$  переменной X.

Если влияние факторов существенно, то оно должно сказываться на вариативности *между столбцами*, обусловленной фактором А, и на вариативности *между строками*, обусловленной фактором В. Поэтому для расчета факторных дисперсий необходимо определить суммы квадратов отклонений по столбцам и по строкам, кроме того, нужны соответствующие суммы для общей и остаточной дисперсий. Эти четыре суммы квадратов отклонений вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^t x_{ij}^2 - \frac{1}{gt} \left( \sum_{j=1}^t S_j \right)^2, \\ Q_A &= \frac{1}{g} \sum_{j=1}^t (S_j)^2 - \frac{1}{gt} \left( \sum_{j=1}^t S_j \right)^2, \\ Q_B &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^g (S'_i)^2 - \frac{1}{gt} \left( \sum_{j=1}^t S_j \right)^2, \\ Q_o &= \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^t x_{ij}^2 - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^g (S'_i)^2 - \frac{1}{g} \sum_{j=1}^t (S_j)^2 + \frac{1}{gt} \left( \sum_{j=1}^t S_j \right)^2, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $Q$  — общая сумма квадратов отклонений,  $Q_A$  и  $Q_B$  — суммы квадратов отклонений по факторам А и В,  $Q_o$  — остаточная сумма. Легко видеть, что выполняется равенство

$$Q = Q_A + Q_B + Q_o.$$

Вычисление отдельных слагаемых, образующих суммы, не представляет затруднений. Отметим лишь, что на основе равенства суммы по столбцам и суммы по строкам (см. табл. 6.9) член  $\frac{1}{gt} \left( \sum_{j=1}^t S_j \right)^2$  может быть заменен равным ему членом  $\frac{1}{gt} \left( \sum_{i=1}^g S'_i \right)^2$ .

Таблица 6.3

Первичные данные для двухфакторного ДА без повторных наблюдений

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	...	A <sub>j</sub>	...	A <sub>t</sub>	Суммы по строкам	Квадраты сумм по строкам
B <sub>1</sub>	x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	...	x <sub>1j</sub>	...	x <sub>1t</sub>	S <sub>1</sub> '	(S <sub>1</sub> ') <sup>2</sup>
B <sub>2</sub>	x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	...	x <sub>2j</sub>	...	x <sub>2t</sub>	S <sub>2</sub> '	(S <sub>2</sub> ') <sup>2</sup>
...	...	...	...	...	...	...	...	...
B <sub>i</sub>	x <sub>i1</sub>	x <sub>i2</sub>	...	x <sub>ij</sub>	...	x <sub>it</sub>	S <sub>i</sub> '	(S <sub>i</sub> ') <sup>2</sup>
...	...	...	...	...	...	...	...	...
B <sub>g</sub>	x <sub>g1</sub>	x <sub>g2</sub>	...	x <sub>gj</sub>	...	x <sub>gt</sub>	S <sub>g</sub> '	(S <sub>g</sub> ') <sup>2</sup>
Суммы по столбцам	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	...	S <sub>j</sub>	...	S <sub>t</sub>	gt = ∑ <sub>i=1</sub> <sup>t</sup> S <sub>i</sub> = ∑ <sub>i=1</sub> <sup>g</sup> S <sub>i</sub> '	∑ <sub>i=1</sub> <sup>g</sup> (S <sub>i</sub> ') <sup>2</sup>
Квадраты сумм по столбцам	S <sub>1</sub> <sup>2</sup>	S <sub>2</sub> <sup>2</sup>	...	S <sub>j</sub> <sup>2</sup>	...	S <sub>t</sub> <sup>2</sup>	∑ <sub>j=1</sub> <sup>t</sup> (S <sub>j</sub> ) <sup>2</sup>	

По Фишеру, в рассматриваемом случае учитываются следующие степени свободы. Для факторных дисперсий — по числу уровней фактора минус одна:  $t - 1$  и  $g - 1$ . Для остаточной дисперсии — общее количество степеней свободы минус суммарное число уровней без единицы:  $tg - (g + t - 1) = (t - 1)(g - 1)$ . Для общей — суммарное число степеней свободы без одной:  $tg - 1$ . Легко видеть, что

$$tg - 1 = (t - 1)(g - 1) + (t - 1) + (g - 1).$$

По методу Фишера оцениваемые компоненты дисперсии вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{Q_A}{t-1} &= gD_A[X] + D_o[X], \\ \frac{Q_B}{g-1} &= tD_B[X] + D_o[X], \\ \frac{Q_o}{(t-1)(g-1)} &= D_o[X]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

На основе правых частей равенств (6.14) и соответствующего количества степеней свободы вычисляются и проверяются диспе-



рсионные отношения:

$$\begin{aligned} F_{P;t-1/(t-1)(g-1)}^{(A)} &= \frac{gD_A[X] + D_o[X]}{D_o[X]}, \\ F_{P;g-1/(t-1)(g-1)}^{(B)} &= \frac{tD_B[X] + D_o[X]}{D_o[X]}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Пользуясь исправленным методом, будем вычислять дисперсии по уравнениям, аналогичным (6.10), а затем проверять  $F^{(i)}$  по (6.15).

**Пример 6.3.** В рассмотренном выше примере 6.1, оценивая влияние наглядности в преподавании тремя методами, мы не принимали во внимание такие существенные для успешного овладения материалом переменные, как прошлые успехи школьника в изучении предмета, его интерес к предмету и к учебе вообще и многое другое. При однофакторном ДА эффект этих переменных суммировался с эффектом метода преподавания и не мог быть выявлен. Но интересно определить парциальные эффекты метода преподавания и, например, прошлой успеваемости школьников по данному предмету. Чтобы это было возможным, необходимо упорядочить учеников (для каждого из трех методов преподавания), согласно их предыдущей успеваемости. Пусть, например, первая тройка учеников (по одному на каждый из проверяемых методов преподавания) включает в себя наиболее успевавших в прошлом, вторая тройка — успевавших чуть менее, третья — еще менее успевавших и т. д., наконец, последняя, пятнадцатая тройка — это наименее успевавшие ученики.

Полученные таким путем тройки учеников представляют собой уровни нового для нашего примера фактора — фактора предыдущей успеваемости школьников. Таким образом, у нас теперь рассматриваются два фактора. Первый фактор — назовем его А — это наглядность в преподавании; он имеет три уровня  $A_j$  ( $j = 1, 2, t$ ;  $t = 3$ ). Второй фактор — обозначим его В — это предыдущая успеваемость школьников; пусть он имеет по-прежнему пятнадцать уровней  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ;  $g = 15$ ).

Если в примере, рассматривавшемся выше, группы учеников для преподавания каждым из трех методов выбирались случайно, то теперь, на основании только что изложенной схемы, нужно учесть предыдущую успеваемость учеников. Это означает, что из числа пятнадцати различных по успеваемости групп\* необходимо случайным образом выбрать из каждой группы трех учеников соответственно трем методам преподавания. Далее с выборкой в 45 учеников проводится эксперимент, как указано в примере 5.13

\*Успеваемость внутри группы должна быть примерно одинаковой.

Таблица 6.10

Исходные и промежуточные данные для двухфакторного ДА  
при отсутствии повторных наблюдений

		Уровни $A_j$			$S'_i$	$(S'_i)^2$
		$A_1$	$A_2$	$A_3$		
Уровни $B_i$	$B_1$	13	15	16	44	1936
	$B_2$	15	13	17	45	2025
	$B_3$	12	14	15	41	1681
	$B_4$	14	15	16	45	2025
	$B_5$	12	14	15	41	1681
	$B_6$	13	13	17	43	1849
	$B_7$	11	14	9	34	1156
	$B_8$	13	12	13	38	1444
	$B_9$	11	12	15	38	1444
	$B_{10}$	12	14	13	39	1521
	$B_{11}$	9	10	13	32	1024
	$B_{12}$	11	14	14	39	1521
	$B_{13}$	10	9	9	28	784
	$B_{14}$	7	9	14	30	900
	$B_{15}$	10	8	8	24	576
$S_j$		173	184	204	$N = 561$	$\sum_{i=1}^{15} (S'_i)^2 = 21\,587$
$S_j^2$		29\,929	33\,856	41\,616	$\sum_{j=1}^3 (S_j)^2 = 105\,401$	
$\sum_{i=1}^{15}$		2035	2354	2890	$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{15} x_{ij}^2 = 7287$	

Результаты эксперимента табулируют согласно табл. 6.9. Вычисляют сначала промежуточные значения для слагаемых сумм квадратов отклонений (уравнения (6.13)) — они представлены в нижней части табл. 6.10, а затем находят сами слагаемые и суммы  $Q_i$ :

$$\frac{1}{gt} \left( \sum_{j=1}^t S_j \right)^2 = \frac{1}{gt} \left( \sum_{i=1}^g S'_i \right)^2 = \frac{561^2}{45} = 6993,8;$$

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^g (S'_i)^2 = 7189,0; \quad \frac{1}{g} \sum_{j=1}^t (S_j)^2 = 7026,7.$$

Суммы квадратов отклонений представлены в табл. 6.11. Там же показаны результаты ДА. Можно видеть, что влияние обоих проверяемых факторов значимо, так как эмпирические дисперсионные отношения превосходят критические значения  $F^*$  при доверительной вероятности  $P = 0,99$ .

**Результаты двухфакторного ДА при отсутствии повторных наблюдений  
к примеру 6.3**

Вариативность	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы для вычисления дисперсий	Оцениваемая дисперсия	Число степеней свободы для $F^*$	Дисперсионные отношения
По фактору А	$Q_A = 7026,7 - 6993,8 = \underline{32,9}$	44	$D_A[X] = \approx 0,748$	2	$F(A) = \frac{15 D_A[X] + D_0[X]}{D_0[X]} \approx \approx 7,52$
По фактору В	$Q_B = 7189,0 - 6993,8 = \underline{195,2}$	44	$D_B[X] = \approx 4,436$	14	$F(B) = \frac{3 D_B[X] + D_0[X]}{D_0[X]} \approx \approx 8,74$
Остаточная	$Q_0 = 7297,0 - 7189,0 - 7026,04 - 6993,8 = \underline{75,8}$	44	$D_0[X] = \approx 1,72$	28	$F(A) > F_{0,99;2/28}^* \approx 5,45$
Общая	$Q = 7297,0 - 6993,8 = \underline{303,2}$	44	$D[X] = \approx 6,89$	-	$F(B) > F_{0,99;14/28}^* \approx 2,8$ , т. е. влияние А и В значимо

111. Схема расчета при наличии повторных испытаний

При наличии повторных испытаний и произвольном количестве уровней каждого из двух факторов имеется схема испытаний  $t \times g \times n$ , где по-прежнему  $t$  — количество уровней одного из факторов (например,  $A$ ),  $g$  — количество уровней другого фактора ( $B$ );  $n$  — количество повторных наблюдений изучаемой переменной, одинаковое для сочетаний по два всех уровней факторов. Первичные данные в этом случае группируются в «блоки» по значениям  $x_{ijk}$ , соответствующих каждой паре  $A, B$ , уровней факторов  $A$  и  $B$ , как это показано в табл. 6.12.

Таблица 6.12

Первичные данные для двухфакторного ДА  
с повторными наблюдениями

		$k^*$	Уровни фактора $A$					
			$A_1$	$A_2$	...	$A_j$	...	$A_t$
Уровни фактора $B$	$B_1$	1	$x_{111}$	$x_{121}$		$x_{1j1}$		$x_{1t1}$
		2	$x_{112}$	$x_{122}$		$x_{1j2}$		$x_{1t2}$
		$k$	$x_{11k}$	$x_{12k}$		$x_{1jk}$		$x_{1tk}$
		...	...	...		...		...
		$n$	$x_{11n}$	$x_{12n}$		$x_{1jn}$		$x_{1tn}$
	$B_2$	1	$x_{211}$	$x_{221}$		$x_{2j1}$		$x_{2t1}$
		2	$x_{212}$	$x_{222}$		$x_{2j2}$		$x_{2t2}$
		$k$	$x_{21k}$	$x_{22k}$		$x_{2jk}$		$x_{2tk}$
		...	...	...		...		...
		$n$	$x_{21n}$	$x_{22n}$		$x_{2jn}$		$x_{2tn}$
	$B_3$	1	$x_{311}$	$x_{321}$		$x_{3j1}$		$x_{3t1}$
		2	$x_{312}$	$x_{322}$		$x_{3j2}$		$x_{3t2}$
		$k$	$x_{31k}$	$x_{32k}$		$x_{3jk}$		$x_{3tk}$
		...	...	...		...		...
		$n$	$x_{31n}$	$x_{32n}$		$x_{3jn}$		$x_{3tn}$
	$B_g$	1	$x_{g11}$	$x_{g21}$		$x_{gj1}$		$x_{gt1}$
		2	$x_{g12}$	$x_{g22}$		$x_{gj2}$		$x_{gt2}$
		$k$	$x_{g1k}$	$x_{g2k}$		$x_{gjk}$		$x_{gtk}$
		...	...	...		...		...
		$n$	$x_{g1n}$	$x_{g2n}$		$x_{gjn}$		$x_{gtn}$

\*  $k = 1, 2, \dots, n$  — номера повторных наблюдений.

Значения  $x_{ijk}$  изучаемой переменной  $X$ , сгруппированные в блоки, наблюдаются при одних и тех же (внутри каждого блока) уровнях обоих факторов. Поэтому их дисперсия наряду со случайными флуктуациями обусловлена совместным действием факторов при каждой паре уровней. Чтобы выявить компонент дисперсии  $D_{AB}[X]$ , обусловленный совместным действием факторов, необходимо к четырем суммам  $Q$ , квадратов центральных отклонений добавить пятую сумму —  $Q_{AB}$ , определяемую для блоков. При этом

из-за введения дополнительной переменной все формулы (6.13) несколько усложнятся:

$$\begin{aligned}
 Q_A &= \frac{1}{ng} \sum_{j=1}^t \left( \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2 - \frac{1}{ngt} \left( \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2, \\
 Q_B &= \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \left( \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2 - \frac{1}{ngt} \left( \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2, \\
 Q_{AB} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \left( \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2 - \frac{1}{ng} \sum_{j=1}^t \left( \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{nt} \sum_{i=1}^g \left( \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2 + \frac{1}{ngt} \left( \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2, \\
 Q_o &= \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \left( \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2, \\
 Q &= \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk}^2 - \frac{1}{ngt} \left( \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^n x_{ijk} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

где  $Q_A$  и  $Q_B$  — суммы квадратов отклонений по факторам А и В;  $Q_{AB}$  — сумма квадратов отклонений для совместного действия факторов;  $Q_o$  — для остаточной и  $Q$  — для общей дисперсий. Можно видеть, что выполняется равенство

$$Q = Q_A + Q_B + Q_{AB} + Q_o.$$

Согласно Фишеру, число степеней свободы для  $D_A[X]$  и  $D_B[X]$  остается прежним:  $t-1$  и  $g-1$  соответственно. Для остальных компонентов дисперсии оно определяется следующим образом: для  $D_{AB}[X]$ :  $(t-1)(g-1)$ ; для  $D_o[X]$ :  $(n-1)tg$ ; для  $D[X]$ :  $tgn-1$ .

По исправленной методике для всех дисперсий принимается одно и то же число степеней свободы:  $tgn-1$ . Дисперсионные отношения для проверки значимости парциального и совместного действия факторов определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 F_A &= \frac{ngD_A[X] + nD_{AB}[X] + D_o[X]}{D_o[X]}, \\
 F_B &= \frac{ntD_B[X] + nD_{AB}[X] + D_o[X]}{D_o[X]}, \\
 F_{AB} &= \frac{nD_{AB}[X] + D_o[X]}{D_o[X]}.
 \end{aligned}$$

**Пример 6.4\*.** Экспериментально исследовалось влияние двух факторов на успешность прохождения крысами лабиринта. Один из факторов — степень подвижности (активности) крысы, другой — условия содержания, в различной мере способствующие формированию активности животного. Было три уровня первого фактора, по которым все крысы подразделялись на три группы: подвижных (bright), уравновешенных (mixed) и вялых (dull), и два уровня второго фактора, по которым каждая из трех групп делилась на две подгруппы: содержащихся в свободных (free) условиях и содержащихся в стесненных (restricted) условиях. В каждую из подгрупп (блоков) входило восемь крыс. В табл. 6.13 представлены результаты эксперимента\*\*.

Таблица 6.13

Исходные данные к примеру 6.4

		k	Степень активности крысы ( $A_j$ )		
			$A_1$ — подвижные	$A_2$ — уравновешенные	$A_3$ — вялые
Условия содержа- ния ( $B_i$ )	$B_1$ — свобод- ные	1	26	41	36
		2	41	26	39
		3	28	19	59
		4	92	59	27
		5	14	82	87
		6	16	86	99
		7	29	45	126
		8	31	37	104
	$B_2$ — стеснен- ные	1	51	39	42
		2	96	104	92
		3	97	130	156
		4	22	122	144
		5	35	114	133
		6	36	92	124
		7	23	87	68
		8	76	64	142

Для вычисления сумм квадратов центральных отклонений по формулам (6.16) требуется выполнить промежуточные расчеты,

\*Занимствован из кн.: Ferguson G. A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York, 1968. P. 317.

\*\*Дж. Фергюсон не указывает, какая переменная измерялась, но, судя по данным табл. 6.13, можно думать, что это какая-то количественная характеристика успешности прохождения лабиринта.

результаты которых удобно табулировать, как это сделано в табл. 6.14. Далее каждая из 12 сумм из табл. 6.14 возводится в квадрат, а затем осуществляется суммирование.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^8 x_{ijk} \right)^2 &= 2\,137\,469, \\ \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^8 x_{ijk} \right)^2 &= 4\,015\,617, \\ \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^8 x_{ijk} \right)^2 &= 5\,944\,837, \\ \left( \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^8 x_{ijk} \right)^2 &= 11\,175\,649\end{aligned}$$

Кроме того, непосредственно по табл. 6.13 получают

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^8 x_{ijk}^2 = 309\,851.$$

Теперь остается лишь подставить значения сумм в формулы (6.16) и при  $t = 3$ ,  $g = 2$ ,  $n = 8$  вычислить  $Q_i$ . Все остальные расчеты тривиальны. Поэтому в табл. 6.15 приводятся лишь окончательные результаты дисперсионного анализа, выполненного по исправленной методике.

Как показывает сравнение эмпирических значений дисперсионных отношений с их теоретическими значениями, частичное действие обоих изучавшихся факторов существенно, но их взаимодействие не существенно. Следовательно, в качестве более полной оценки случайных флюктуаций можно принять сумму

$$D'_0[X] = D_{AB}[X] + D_0[X] = 936,16.$$

Отметим в заключение, что двухфакторный анализ с повторными наблюдениями возможен и при неодинаковом количестве данных в блоках<sup>\*</sup>.

<sup>\*</sup>Схема расчетов для этого случая приведена в кн.: Ferguson G. A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York, 1966.

Промежуточные величины для расчета сумм квадратов  
по формулам (6.16) к примеру 6.4

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	Суммы по строкам
$B_1$	$\left(\sum_{k=1}^8 x_{1jk}\right)_{11} =$ $= 277$	$\left(\sum_{k=1}^8 x_{1jk}\right)_{12} =$ $= 395$	$\left(\sum_{k=1}^8 x_{1jk}\right)_{13} =$ $= 577$	$\left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^8 x_{1jk}\right)_1 =$ $= 1249$
$B_2$	$\left(\sum_{k=1}^8 x_{2jk}\right)_{21} =$ $= 441$	$\left(\sum_{k=1}^8 x_{2jk}\right)_{22} =$ $= 752$	$\left(\sum_{k=1}^8 x_{2jk}\right)_{23} =$ $= 901$	$\left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^8 x_{2jk}\right)_2 =$ $= 2094$
Суммы по столбцам	$\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^8 x_{ijk}\right)_1 =$ $= 718$	$\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^8 x_{ijk}\right)_2 =$ $= 1147$	$\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^8 x_{ijk}\right)_3 =$ $= 1478$	$\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^8 x_{ijk}\right) =$ $= 3343$



#### 6.4. ТРЕХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Схема трехфакторного дисперсионного анализа похожа на схему двухфакторного ДА с одинаковым количеством повторных наблюдений, только вместо них берется  $n$  уровней третьего фактора  $C_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Если при трех факторах отсутствуют повторные наблюдения, то нельзя определить взаимодействие АВС. Поэтому начнем рассмотрение сразу со схемы трехфакторного эксперимента, в котором при каждой комбинации факторов имеются повторные наблюдения. Итак, имеем три фактора:  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, t$ ),  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) и  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Кроме того, для каждой комбинации уровней  $A, B, C_k$  имеется  $l$  повторных наблюдений значений  $x_{ijkm}$  переменной  $X$  ( $m = 1, 2, \dots, l$ ) — всего  $lgnl$  наблюдений.

Таблица 6.16

Первичные суммы для вычисления сумм квадратов  
центральных отклонений

	A <sub>1</sub>		A <sub>2</sub>		
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	
B <sub>1</sub>	$\sum A_1 B_1 C_1$	$\sum A_1 B_1 C_2$	$\sum A_2 B_1 C_1$	$\sum A_2 B_1 C_2$	$\sum B_1$
B <sub>2</sub>	$\sum A_1 B_2 C_1$	$\sum A_1 B_2 C_2$	$\sum A_2 B_2 C_1$	$\sum A_2 B_2 C_2$	$\sum B_2$
	$\sum A_1 C_1$	$\sum A_1 C_2$	$\sum A_2 C_1$	$\sum A_2 C_2$	Общая сумма всех наблюдений $\sum_{\text{общ}}$
	$\sum C_1$		$\sum C_2$		
	$\sum A_1 B_1$	$\sum A_1 B_2$	$\sum A_2 B_1$	$\sum A_2 B_2$	
	$\sum B_1 C_1$	$\sum B_1 C_2$	$\sum B_2 C_1$	$\sum B_2 C_2$	

Примечание.  $\sum A_j = \sum A_j C_1 + \sum A_j C_2$ ;  $\sum C_k = \sum A_1 C_k + \sum A_2 C_k$ ;  $\sum A_j B_i = \sum A_j B_i C_1 + \sum A_j B_i C_2$ ;  $\sum B_i C_k = \sum A_1 B_i C_k + \sum A_2 B_i C_k$ . Эти формулы легко обобщаются на большее, чем 2, число уровней факторов.

Пусть наблюдения сгруппированы по блокам (в блоке  $l$  повторных наблюдений) в черновых таблицах. Суммируя значения  $x_{ijkm}$  в каждом из блоков, определим суммы  $\sum_{m=1}^l A_j B_i C_k$ , которые запишем в табл. 6.16\*. Затем вычислим остальные суммы для комбинаций факторов по два и для парциального действия факторов. Эти суммы для простоты обозначены и рассчитываются так, как показано в табл. 6.16.

\*Индекс  $m$  в таблице опущен.

**Результаты двухфакторного ДА с повторными  
наблюдениями к примеру 6.4**

Вариативность	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы	Оцениваемая дисперсия	Дисперсионные отношения
По фактору А	$Q_A = 14\,875,52$	47	$D_A[X] = 316,50$	$F^{(A)} = \frac{1}{907,82}(8 \cdot 2 \cdot 316,5 + 8 \cdot 28,34 + 907,82) \approx 6,83$
По фактору В	$Q_B = 18\,150,04$	47	$D_B[X] = 386,17$	$F^{(B)} = \frac{1}{907,82}(8 \cdot 3 \cdot 386,17 + 8 \cdot 28,34 + 907,82) \approx 11,46$
Для взаимодействия А и В	$Q_{AB} = 1332,04$	47	$D_{AB}[X] = 28,34$	$F^{(AB)} = \frac{8 \cdot 28,34 + 907,82}{907,82} \approx 1,25$
Остаточная	$Q_0 = 42\,667,38$	47	$D_0[X] = 907,82$	$F^{(A)} > F_{0,99;2/42}^* \approx 5,15$
Общая	$Q = 77\,024,98$	47	$D[X] = 1638,83$	$F^{(B)} > F_{0,99;1/42}^* \approx 7,27$
				$F^{(AB)} < F_{0,95;2/42}^* = 3,22$

Суммы квадратов центральных отклонений вычисляются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_A &= \frac{1}{n g l} \sum_j (\sum A_j)^2 - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_B &= \frac{1}{t n l} \sum_i (\sum B_i)^2 - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_C &= \frac{1}{t g l} \sum_k (\sum C_k)^2 - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_{AB} &= \frac{1}{n l} \sum_j \sum_i (\sum A_j B_i)^2 - Q_A - Q_B - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_{AC} &= \frac{1}{g l} \sum_j \sum_k (\sum A_j C_k)^2 - Q_A - Q_C - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_{BC} &= \frac{1}{t l} \sum_i \sum_k (\sum B_i C_k)^2 - Q_B - Q_C - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_{ABC} &= \frac{1}{l} \sum_j \sum_i \sum_k (\sum A_j B_i C_k)^2 - Q_A - Q_B - Q_C - \\
 &\quad - Q_{AB} - Q_{AC} - Q_{BC} - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q_o &= \sum_j \sum_i \sum_k \sum_m (x_{ijk m})^2 - Q_A - Q_B - Q_C - Q_{AB} - \\
 &\quad - Q_{AC} - Q_{BC} - Q_{ABC} - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2, \\
 Q &= \sum_j \sum_i \sum_k \sum_m (x_{ijk m})^2 - \frac{1}{t g n l} \sum_{\text{общ}}^2.
 \end{aligned} \right\} (6.17)$$

Нетрудно видеть, что основное уравнение дисперсионного анализа в системе уравнений (6.17) выполняется:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_{AB} + Q_{AC} + Q_{BC} + Q_{ABC} + Q_o. \quad (6.18)$$

Определяя соответствующие дисперсии, следует разделить равенство (6.18) почленно на общее число степеней свободы ( $t g n l - 1$ ). Источники вариативности, количество степеней свободы и дисперсионные отношения в общем виде записаны в табл. 6 17. Процедуры расчета и проверки значимости компонент общей дисперсии аналогичны рассмотренным выше.

Прежде чем перейти к примеру, сделаем два дополнительных замечания.

Таблица 6.17

Табулированные результаты трехфакторного дисперсионного анализа с повторными наблюдениями

Источники вариативности	Количество степеней свободы	Дисперсионные отношения
A	$t - 1$	$F(A) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(gnD_A + nD_{AB} + gD_{AC} + tD_{ABC} + D_0)$
B	$g - 1$	$F(B) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(tnD_B + nD_{AB} + tD_{BC} + tD_{ABC} + D_0)$
C	$n - 1$	$F(C) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(tgD_C + gD_{AC} + tD_{BC} + tD_{ABC} + D_0)$
AB	$(t - 1)(g - 1)$	$F(AB) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(nD_{AB} + tD_{ABC} + D_0)$
AC	$(t - 1)(n - 1)$	$F(AC) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(gD_{AC} + tD_{ABC} + D_0)$
BC	$(g - 1)(n - 1)$	$F(BC) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(tD_{BC} + tD_{ABC} + D_0)$
ABC	$(t - 1)(g - 1)(n - 1)$	$F(ABC) = \frac{1}{D_0} \chi^2$ $\chi^2(tD_{ABC} + D_0)$
Случайные	$tgn(l - 1)$	
Итого	$tgnl - 1$	

Примечание. Обозначения дисперсий сокращены:  $D_A$  — вместо  $D_A[X]$ ,  $D_{AB}$  — вместо  $D_{AB}[X]$  и т. п.

1. Изложенная схема трехфакторного анализа с повторными наблюдениями без труда упрощается до схемы без повторных наблюдений: в табл. 6.16 все  $\sum A, B, C_k$  заменяются одним числом; в формулах (6.17)  $l = 1$  можно опустить, а  $Q_{ABC}$  выпадает, так как ее нельзя выделить из  $Q_0$ ; из табл. 6.17 выпадают значения  $tD_{ABC}$  и  $F(ABC)$ .

2. Для упрощения расчетов дисперсионного комплекса полезно применять линейные преобразования исходной переменной

$$x_{ijkm} = ay_{ijkm} + b,$$

т. е. перейти к новой переменной

$$y_{ijkm} = \frac{x_{ijkm} - b}{a}$$

с переносом начала отсчета  $b$  и изменением масштаба. Следует вспомнить, что при этом значения  $Q_i$  оказываются измененными в  $a^2$  раз (уменьшенными, если  $a > 1$ , и увеличенными, если  $a < 1$ ), и это необходимо учитывать при окончательном расчете дисперсий  $D_i$ .

**Пример 6.5\*.** Рассмотрим трехфакторную схему с повторными наблюдениями переменной  $X$ , значения которой  $x_{ijkm}$  представлены в табл. 6.18.

Таблица 6.18

Значения переменной  $X$  для трехфакторного ДА  
к примеру 6.5

	$A_1$		$A_2$	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
$B_1$	29,0	28,5	28,0	29,5
	26,5	28,5	28,5	32,0
	30,5	30,0	28,0	29,0
	27,0	32,5	25,0	28,0
$B_2$	28,0	27,0	24,5	27,5
	25,0	29,0	25,0	28,0
	26,5	27,5	28,0	27,0
	26,5	27,5	26,0	26,0

Числа в табл. 6.18 большие и содержат дробную часть. Поэтому осуществим линейное преобразование переменной, выбрав в качестве свободного члена ближайшее к математическому ожиданию целое число  $b = 28$ , а в качестве нормирующего множителя  $a = 0,5$ , чтобы избавиться от дробей:

$$y_{ijkm} = 2(x_{ijkm} - 28)$$

Значения преобразованной переменной  $Y$  приведены в табл. 6.19. Вычислим по этим данным все суммы, согласно табл. 6.16; результаты представлены в табл. 6.20. Пользуясь данными табл. 6.20, по формулам (6.17) вычислим суммы квадратов центральных отклонений:

$$\begin{aligned} Q_A &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} [3^2 + (-16)^2] - \frac{1}{32} (-13)^2 = 11,28, \\ Q_B &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} [25^2 + (-38)^2] - \frac{1}{32} (-13)^2 = 124,03, \\ Q_C &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} [(-32)^2 + 19^2] - \frac{1}{32} (-13)^2 = 81,28, \\ Q_{AB} &= \frac{1}{2 \cdot 4} [17^2 + (-14)^2 + 8^2 + (-24)^2] - 11,28 - \\ &\quad - 124,03 - \frac{1}{32} (-13)^2 = 0,03, \end{aligned}$$

\*Замыслован из кн.: Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента. М., 1967.

$$\begin{aligned}
Q_{AC} &= \frac{1}{2 \cdot 4} [(-10)^2 + 13^2 + (-22)^2 + 6^2] - 11,28 - \\
&\quad - 81,28 - \frac{1}{32}(-13)^2 = 0,78, \\
Q_{BC} &= \frac{1}{2 \cdot 4} [(-3)^2 + 28^2 + (-29)^2 + (-9)^2] - 124,03 - \\
&\quad - 81,28 - \frac{1}{32}(-13)^2 = 3,78, \\
Q_{ABC} &= \frac{1}{4} [2^2 + 15^2 + (-5)^2 + 13^2 + (-12)^2 + (-2)^2 + (-17)^2 + \\
&\quad + (-7)^2] - 11,28 - 124,03 - 81,28 - 0,03 - 0,78 - \\
&\quad - 3,78 - \frac{1}{32}(-13)^2 = 0,79, \\
Q_0 &= 441 - 11,28 - 124,03 - 81,28 - 0,03 - 0,78 - \\
&\quad - 3,78 - 0,79 - \frac{1}{32}(-13)^2 = 213,75, \\
Q &= 441 - \frac{1}{32}(-13)^2 = 435,72.
\end{aligned}$$

Таблица 6.19

Значения новой переменной  $y = 2(x - 28)$  к примеру 6.6

	A <sub>1</sub>		A <sub>2</sub>	
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
B <sub>1</sub>	2	1	0	3
	-3	1	1	8
	5	4	0	2
	-2	9	-6	0
B <sub>2</sub>	0	-2	-7	-1
	-6	2	-6	0
	-3	-1	0	-2
	-3	-1	-4	-4

Рассчитаем дисперсионные отношения по методу Фишера и по исправленному методу. Заметим, что для вычисления можно пользоваться суммами квадратов и дисперсиями случайной переменной  $Y$ . Результаты трехфакторного дисперсионного анализа данных рассматриваемого примера по методу Фишера представлены в табл. 6.21. Можно видеть, что из семи нулевых гипотез, которые состоят в допущении неслучайного влияния факторов  $A$ ,  $B$  и  $C$  в отдельности, по два и по три, приняты могут быть только две, а именно — относящиеся к факторам  $B$  и  $C$ .

Таблица 6.20

Первичные суммы для вычисления  $Q_i$  к примеру 6.5

	A <sub>1</sub>		A <sub>2</sub>		
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	
B <sub>1</sub>	2	15	-5	13	25
B <sub>2</sub>	-12	-2	-17	-7	-38
$\sum A_1 C_1 = -10$		$\sum A_1 C_2 = 13$	$\sum A_2 C_1 = -22$	$\sum A_2 C_2 = 6$	$\sum_{\text{общ}} = -13$
$\sum A_1 = 3$			$\sum A_2 = -12$		
$\sum C_1 = -32$			$\sum C_2 = 19$		
$\sum A_1 B_1 = 17$		$\sum A_1 B_2 = -14$	$\sum A_2 B_1 = 8$	$\sum A_2 B_2 = -24$	
$\sum B_1 C_1 = -3$		$\sum B_1 C_2 = 28$	$\sum B_2 C_1 = -29$	$\sum B_2 C_2 = -9$	

Таблица 6.21

Результаты трехфакторного ДА по методу Фишера к примеру 6.5

Источник вариативности	Кол-во степеней свободы	$Q_i$	Средний квадрат отклонений	Эмпирическое $F^{(i)}$
A	1	11,28	11,28	1,26
B	1	124,03	124,03	13,92
C	1	81,28	81,28	9,12
AB	1	0,03	0,03	0,00
AC	1	0,78	0,78	0,09
BC	1	3,78	3,78	0,42
ABC	1	0,79	0,79	0,09
Случайные	24	213,75	8,91	—
Итого.	31	435,72	$F_{0,95,1/24}^* = 4,26$ $F_{0,99,1/24}^* = 7,82$	

Примечание. Подчеркнуты значимые на 99%-м доверительном уровне дисперсионные отношения. Напомним, что эмпирическое  $F^{(i)}$  получается как частное от деления  $i$ -го среднего квадрата отклонений на 8,91, соответствующее остаточной дисперсии

Так как вариативность, обусловленная источниками A, AB, BC, AC и ABC, должна рассматриваться как случайная, то логично отнести эти источники вариативности в группу случайных прочих факторов. Для схемы Фишера это означает, что соответствующие суммы квадратов центральных отклонений  $Q_i$  должны быть

Таблица 6.22

Результаты трехфакторного ДА по исправленному методу  
к примеру 6.5

Источники вариативности	Кол-во степеней свободы	$Q_i$	$D'_i = \frac{Q_i}{\Delta i}$	Эмпирическое $F^{(i)}$
A	31	11,28	0,364	1,23
B	31	124,03	4,001	3,37
C	31	81,28	2,609	2,57
AB	31	0,03	0,001	1,02
AC	31	0,78	0,026	1,02
BC	31	3,78	0,122	1,05
ABC	31	0,79	0,026	1,02
Случайные	31	213,75	6,900	—
Итого:	31	435,72	14,005	$F_{0,95,1/24} = 4,26$

Примечания. 1.  $D'_i$  — это дисперсия случайной переменной  $Y$ ; для исходной случайной величины  $X$  дисперсия  $D_x = \sigma^2 D'_i = 0,25 D'_i$ . 2. Эмпирические дисперсионные отношения вычислялись по формулам, приведенным в табл. 6.17.

включены в  $Q'_0$ :

$$\begin{aligned} Q'_0 &= Q_A + Q_{AB} + Q_{AC} + Q_{BC} + Q_{ABC} + Q_0 = \\ &= 11,28 + 0,03 + 0,78 + 3,78 + 0,79 + 213,75 = 230,41. \end{aligned}$$

Новой сумме  $Q'_0$ , аккумулирующей в себе влияние случайных факторов, соответствует теперь и новое число степеней свободы:  $5 + 24 = 29$ . Повтому и средний квадрат отклонений, выражающий по Фишеру оценку остаточной дисперсии, становится несколько меньше, чем прежде:  $230,41 : 29 = 7,94$ . В нашем примере это приводит к увеличению эмпирических дисперсионных отношений, и без того значимых, но в других случаях можно незначимое  $F^{(i)}$  «перевести» в значимое или наоборот, т. е. изменить решение на противоположное.

Результаты трехфакторного дисперсионного анализа, выполненного с разложением дисперсий по Авилову, представлены в табл. 6.22. Можем видеть, что все эмпирические дисперсионные отношения оказываются по величине меньше, чем  $F$ -критическое. Следовательно, для каждого из факторов и факторных взаимодействий исходная гипотеза о неслучайном влиянии факторов A, B и C на переменную  $X$  должна быть отброшена и (при данном числе наблюдений) должна быть принята альтернативная гипотеза: парциальное влияние факторов и их взаимодействий не отличается от случайного.

Остается проверить, отличается ли от случайного совокупное действие всех рассмотренных факторов и их взаимодействий?



При такой постановке вопроса многофакторная схема сводится к однофакторной:

$$D[X] = D_{\Phi}[X] + D_o[X],$$

где  $D[X]$  — общая дисперсия, которая рассматривается как сумма только двух компонент:  $D_{\Phi}[X]$  — факторной дисперсии, обусловленной действием всех изучаемых факторов, и  $D_o[X]$  — остаточной дисперсии, обусловленной неконтролируемыми в опыте причинами.

Очевидно, что факторная дисперсия — это сумма «парциальных» дисперсий факторов и их взаимодействий. В частности, для трехфакторного анализа

$$D'_{\Phi} = D'_A + D'_B + D'_C + D'_{AB} + D'_{AC} + D'_{BC} + D'_{ABC}. \quad (6.19)$$

Число степеней свободы для  $D_{\Phi}$  определяется суммой степеней свободы слагаемых в правой части уравнения (6.19), оно составляет  $tgnl - 1$  (см. табл. 6.17).

Эмпирическое дисперсионное отношение здесь вычисляется как при однофакторном анализе:

$$F_{\Phi} = \frac{(tgnl - 1)D'_{\Phi} + D'_o}{D'_o}.$$

Используя значения дисперсий  $D'_i$  из табл. 6.22, вычислим факторную дисперсию и  $F_{\Phi}$ .

$$D'_{\Phi} = 0,364 + 4,001 + 2,609 + 0,001 + 0,026 + 0,122 + \\ + 0,026 = 7,149.$$

Проверка показывает, что с точностью до тысячных долей основное дисперсионное уравнение (6.1) выполняется:

$$F_{\Phi} = \frac{7 \cdot 7,149 + 6,9}{6,9} \approx 8,25,$$

что больше критического  $F_{0,99;7/24}^* = 3,52$ . Следовательно, можно принять, что совокупное действие рассмотренных факторов на переменную  $X$  отличается от случайного.

## § § ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

### § § § Понятие о математическом планировании эксперимента

Математическое планирование эксперимента — это направление научных исследований, которое связано с созданием теории

эксперимента и которое представляет собой определенный синтез дисперсионного и регрессионного анализа, основанный на нескольких принципиальных для этого направления положениях. Их мы и рассмотрим.

**Рандомизация условий эксперимента.** Условия эксперимента образуют совокупностью контролируемых и неконтролируемых факторов. Рандомизация означает сочетание этих факторов в ходе эксперимента в случайном порядке, для того чтобы нивелировать за счет усреднения возможные эффекты воздействия неконтролируемых факторов, большинство которых исследователю неизвестно, на результаты эксперимента, выделяя таким образом достаточно надежно изучаемые эффекты контролируемых факторов. Принцип рандомизации был создан еще Р.Фишером в классическом дисперсионном анализе. Но именно в математическом планировании эксперимента рандомизации придается основополагающее значение.

**Планирование на двух уровнях.** Контролируемые факторы, представляющие собой аргументы изучаемой зависимости, варьируются в эксперименте только на двух уровнях. 1) *отсутствие* или *наличие*, если аргументом служит качественный фактор — какое-нибудь неквантифицируемое свойство (например, мужской или женский пол испытуемых); 2) *минимальное* или *максимальное* значение, если аргументом служит количественный фактор — какая-нибудь и как-нибудь квантифицируемая неслучайная переменная величина. Неопределенность в понятии «минимальное — максимальное значение» приводит к тому, что зачастую необходимо расширять зону поиска таких значений контролируемых факторов, при которых зависимость, обусловленная их влиянием, выделялась бы из «шума», создаваемого неконтролируемыми факторами. Поэтому когда заранее невозможно выбрать наименьшее и наибольшее значения исследуемых факторов, то сначала, по априорным соображениям, выбирают для каждого из них некоторое среднее значение — так называемый *центр планирования фактора*, а затем, повторяя эксперимент, путем ряда последовательных итераций расширяют зону варьирования «минимаксных» значений аргументов и эмпирическим путем обнаруживают те, при которых влияние на зависимую случайную величину «выделяется из шума» (это проверяется по *F*-критерию Снедекора — Фишера, как в дисперсионном и регрессионном анализе).

**Активность эксперимента.** В классическом эксперименте — особенно если это естественный эксперимент — значения сочетаний контролируемых факторов выбирает природа, а экспериментатор пассивен, так как вынужден полагаться на волю случая. В отличие от этого при математическом планировании эксперимен-

та исследователь активен: он сам выбирает и варьирует контролируемые факторы, подбирая их уровни и сочетая эти уровни друг с другом, а неконтролируемые факторы нивелирует путем рандомизации условий эксперимента. Сразу же заметим, что в психологии идея активности эксперимента не всегда может быть реализована, и это ограничивает применимость математического планирования эксперимента.

*Априорный выбор зависимости.* В дисперсионном анализе вопрос о том, каким образом изучаемая величина зависит от контролируемых факторов, т.е. о виде уравнения, которое математически выражает зависимость, не ставится. Ограничиваются вопросом, влияет или нет контролируемый фактор, сочетание факторов на изучаемую величину. При этом оценивается относительная степень влияния с помощью уравнения, которое связывает сумму коэффициентов детерминации (3.14а, б) и которое для  $N$ -факторного дисперсионного уравнения (6.4), если его почленно нормировать безусловной дисперсией  $D[X]$  зависимой переменной  $X$ , преобразуется к виду

$$1 = \bar{\eta}_0^2 + \eta^2(A) = \\ = \bar{\eta}_0^2 + \eta_{A_1}^2 + \eta_{A_2}^2 + \dots + \eta_{A_N}^2 + \eta_{A_1 A_2}^2 + \dots + \eta_{A_1 A_2 \dots A_N}^2$$

где  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_1 A_2, \dots, A_1 A_2 \dots A_N\}$ . В регрессионном анализе в дополнение к дисперсионному ставится и решается вопрос о форме зависимости, которая аппроксимируется подходящим уравнением регрессии. В отличие от этого при математическом планировании эксперимента сразу же ставится цель — выразить искомую зависимость аналитически, но уравнение для этого не подбирается к эмпирическим данным, а выбирается заранее, исходя из количества контролируемых факторов и теоретически возможных сочетаний этих факторов по два, по три и т.д. — по  $N$ .

*Полнота плана эксперимента.* Полным называется план, в котором учтены все теоретически возможные сочетания уровней факторов по отдельности, по два, по три и т.д. — по  $N$ . При планировании на двух уровнях число различных сочетаний составит

$$L = 2^{N+K+1}, \quad (6.20)$$

где  $K$  — количество сочетаний из  $N$  по два, по три и т.д., которое определяется суммой:

$$K = C_N^2 + C_N^3 + \dots + C_N^{N-1} + C_N^N.$$

Единица в показателе степени формулы (6.20) связана с необходимостью оценки остаточной дисперсии в уравнении (6.4), на основе

которой оценивается значимость коэффициентов регрессии, полученной по математическому плану эксперимента. Нетрудно понять по (6.20), что с увеличением количества факторов, контролируемых в эксперименте, число  $L$ , которое определяет количество необходимых испытаний, т. е. объем выборки, быстро становится превышающим реальные возможности исследователей. Поэтому стремятся уменьшить количество контролируемых факторов до существенного минимума, убрать из рассмотрения практически нереальные сочетания уровней факторов и самих факторов либо отказываются от полного плана и заменяют его *дробным планом*. В дробном плане эксперимента используются не все сочетания, а лишь некоторые — так называемые *дробные реплики*. Хотя и существуют способы подбора дробных реплик, наименьшим образом ухудшающих планирование, дробные планы лишают исследователя преимуществ, даваемых математическим планированием эксперимента.

**Ортогональность плана.** Она заключается в том, что влияния аргументов на изучаемую величину при полном плане *линейно независимы* (ковариационная матрица плана равна нулю). Это приводит к описанию изучаемой зависимости чистой регрессией (см. раздел 4.2.3), коэффициенты которой определены независимо друг от друга, что позволяет отбрасывать члены уравнения с незначимыми коэффициентами, не пересчитывая остальных. В классическом регрессионном анализе такая возможность отсутствует. Отсутствует она и при дробных планах эксперимента.

**Единообразие и простота вычислений.** Как будет показано, расчеты по плану эксперимента до предела упрощены. Они сводятся к суммированию наблюдавшихся значений зависимой переменной со знаками «плюс» или «минус», соответствующими *верхнему* или *нижнему* уровням фактора в столбце плана, по которому проведен эксперимент, и делению суммы на число слагаемых. Вычисления средних дисперсий тоже упрощены. Процедура расчетов в целом простая и четкая.

**Равноточность измерений.** Коэффициенты регрессии при математическом планировании эксперимента вычисляются из одного и того же числа измерений, которое определяется количеством строк  $L$  в плане, одинаковым для всех столбцов. Следовательно, все коэффициенты регрессии вычисляются с одной и той же стандартной погрешностью

$$\sigma_{a_j} = \sqrt{D_0 : (L - 1)}, \quad (6.21)$$

где  $D_0$  — остаточная дисперсия, определяемая из повторных измерений, — при повторении эксперимента по плану хотя бы дважды;  $L$  — общее число измерений (формула (6.20)). Поэтому проверка

значимости всех коэффициентов регрессии предельно проста: коэффициенты сравниваются со стандартной погрешностью, умноженной на соответствующий квантиль  $t$ -распределения Стьюдента ( $t$ -критерий), и те из них, которые меньше, отбрасываются как незначимые вместе с относящимися к ним членами уравнения регрессии.

Все рассмотренные основополагающие идеи математического планирования, за исключением активности эксперимента, не создают особых препятствий в экспериментальной психологии и могут способствовать более быстрому и качественному выявлению тех психологических законов, которые во многих случаях пока остаются на уровне утверждений, а чаще предположений о влиянии или не влиянии чего-либо на индивидуальную психику и коллективные психологические феномены.

### § § § Построение полного ортогонального плана эксперимента

Процедура математического планирования эксперимента начинается с выбора общего вида уравнения множественной регрессии, которым предположительно аппроксимируется искомая зависимость. Под эту зависимость и строится полный ортогональный план или несколько эквивалентных вариантов такого плана, после чего проводится эксперимент и обрабатываются данные. В результате уравнение записывается в явном виде, со значимыми коэффициентами, величина и знаки которых характеризуют силу и направленность влияния контролировавшихся факторов-аргументов модели. В этой процедуре выбор исходного уравнения не формализован: он обусловлен конкретным содержанием научной задачи, наличием априорной информации и ресурсами исследователей. Вычислительная сторона обработки данных, как было сказано, простая и четкая, формализованная. А вот центральный этап процедуры — построение плана эксперимента, удовлетворяющего требованиям полноты и ортогональности, хотя такое построение может быть формализовано и запрограммировано для ЭВМ, — содержит ряд приемов, с которыми нужно познакомиться психологам.

Начнем с простейшего, элементарного случая — с простой линейной регрессии, уравнение которой в общем виде запишем так:

$$y = a_0 + a_1 x_1. \quad (6.22)$$

Напомним, что свободный член  $a_0$  выражает значение  $y$  при  $x_1 = 0$ , а коэффициент  $a_1$  при аргументе  $x_1$  выражает приращение зависимой переменной в отношении к приращению аргумента:  $a_1 = \Delta y$  :

$\Delta x_1$ , тем самым характеризуя меру влияния (обуславливания) величины  $y$  со стороны аргумента  $x_1$ , если, конечно, коэффициент статистически значим по условиям эксперимента.

В математическом планировании, как было указано, аргументы планируются на двух уровнях — нижнем и верхнем, причем из натурального масштаба измерений они преобразуются в безразмерную форму — «плановый» масштаб:

$$x_j \rightarrow z_j = \begin{cases} (x_{\min} - x_{\max}) : (x_{\max} - x_{\min}) = -1, \\ (x_{\max} - x_{\min}) : (x_{\max} - x_{\min}) = +1, \end{cases} \quad (6.23)$$

где  $z_j = -1$  означает, что  $j$ -й фактор запланирован в эксперименте на нижнем уровне (при  $x_{\min}$ ), а  $z_j = +1$  — на верхнем уровне (при  $x_{\max}$ ). Заметим, что преобразования (6.23) действительны при любых натуральных  $X$ , даже если это качественные события.  $A \equiv x_{\min} \equiv 0$  либо  $A \equiv x_{\max} \equiv 1$ .

Теперь исходное уравнение (6.22) записывается в плановом масштабе с новыми обозначениями:

$$y = a_0 z_0 + a_1 z_1,$$

где  $z_0$  — так называемый «нулевой» фактор, всегда тождественно равный единице, — означает по-прежнему среднее значение  $Y$  при условии  $z_1 = 0$  и опускается из записи уравнения как множитель в виде единицы, так что уравнение принимает обычный вид:

$$y = a_0 + a_1 z_1. \quad (6.24)$$

Но о нулевом факторе не забывают, и он фигурирует во втором столбце плана эксперимента.

В предыдущем разделе было сказано: полный план содержит все возможные сочетания уровней контролируемых факторов. В модели (6.24) фактор один и у него всего два уровня, которые сочетаются с одним и тем же значением  $+1$  для нулевого фактора. Кроме этого, нужно хотя бы дважды повторить эксперимент, чтобы вычислить остаточную дисперсию и оценить значимость коэффициента регрессии. Следовательно, полный план в этом случае должен содержать всего четыре строки:  $2^{1+1} = 4$ ; число столбцов определяется количеством коэффициентов (их 2 в данной модели), плюс столбец с номерами строк ( $i$ ) и столбец для записи результатов измерения (подсчета) значений зависимой переменной  $y_i$  в эксперименте. Итак, для простой линейной регрессии (6.24) полу-

чаем полный план:

$$i \begin{bmatrix} z_{0i} & z_{1i} & y_i \\ 1 & + & - \\ 2 & + & + \\ & \cdots & \cdots \\ 3 & + & - \\ 4 & + & + \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

в котором принято опускать единицы в записи уровней факторов: знаков  $+$ ,  $-$  достаточно для последующих расчетов; пунктиром отделена повторяемая для оценки дисперсий часть плана. Заметим, что скалярное произведение столбцов нулевого и первого факторов равно нулю, следовательно, этот план ортогонален, и перестановкой строк можно получить несколько эквивалентных ему планов

После того как план построен, удобней вместо записи (6.25) записывать план иначе:

$$i \begin{vmatrix} z_{0i} & z_{1i} & y_{i1} & y_{i2} \\ 1 & + & - & y_{11} & y_{12} \\ 2 & + & + & y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}, \quad (6.26)$$

— удобней, чтобы усреднять значения  $y_{i1}$  и  $y_{i2}$  и вычислять дисперсии условных средних и другие показатели в каждой  $i$ -й строке плана. При этом обе записи содержат 4 строки, которые определяют критический объем выборки для выявления коэффициентов регрессии (6.24), если, конечно, погрешность (6.21) позволит это сделать. А если не позволит, то следует повторять эксперимент по плану до тех пор, пока не станет очевидным отсутствие зависимости (6.24), возможно, из-за существенной нелинейности корреляции  $XY$ .

План простой линейной регрессии служит основой построения более сложных планов. Сначала рассмотрим двумерный случай. Исходное уравнение регрессии

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 \quad (6.27)$$

в этом случае содержит 4 неизвестных коэффициента. Следовательно, необходимы  $2^4 = 16$  строк полного плана. Заметим, что количество неизвестных коэффициентов в точности равно  $N+K+1$ , где  $N$  — число факторов (здесь  $N = 2$ ),  $K$  — число сочетаний факторов ( $K = 1$ ), и еще единица связана с необходимостью удвоения плана.

По уравнению (6.27) полный план строится следующим образом. Сначала записывается основа из двух столбцов  $z_{0i}$ ,  $z_{1i}$  одномерного плана (6.25) и к нему справа приписывается столбец для

$z_{2i}$ , в котором второй фактор в двух первых строках планируется на нижнем, а в третьей и четвертой строках — на верхнем уровнях:

$$i \begin{bmatrix} z_{0i} & z_{1i} & z_{2i} \\ 1 & + & - \\ 2 & + & + \\ 3 & + & - \\ 4 & + & + \end{bmatrix}.$$

Получился линейный бесповторный двумерный план. Повторяя этот план для строк 5 ÷ 8, получаем полный линейный план:

$$i \begin{bmatrix} z_{0i} & z_{1i} & z_{2i} \\ 1 & + & - \\ 2 & + & + \\ 3 & + & - \\ 4 & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 5 & + & - \\ 6 & + & + \\ 7 & + & - \\ 8 & + & + \end{bmatrix},$$

где повторяющиеся блоки разделены пунктиром.

Далее следует ввести в этот план произведение факторов  $z_{1i} \cdot z_{2i}$ , которое в математическом планировании рассматривается в качестве нового фактора, но его уровни определяются произведением уровней сомножителей: для первой строки  $(-) \times (-) = (+)$ , для второй —  $(+) \times (-) = (-)$  и т. д., как представлено в следующей матрице:

$$i \begin{bmatrix} z_{0i} & z_{1i} & z_{2i} & z_{1i}z_{2i} \\ 1 & + & - & + \\ 2 & + & + & - \\ 3 & + & - & - \\ 4 & + & + & + \\ 5 & + & - & + \\ 6 & + & + & - \\ 7 & + & - & - \\ 8 & + & + & + \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Заметим, что полученный план ортогонален, так как скалярное произведение любой пары столбцов равно нулю, в чем легко можно убедиться.

Теперь остается удвоить план (6.28), записав его, ориентируя вертикально, как (6.25), либо горизонтально, как (6.26). Экономия



место, запишем в удобной горизонтальной ориентации:

$$\begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} z_{0i} & z_{1i} & z_{2i} & z_{1i}z_{2i} & y_{i1} & y_{i2} \\ + & - & - & + & y_{11} & y_{12} \\ + & + & - & - & y_{21} & y_{22} \\ + & - & + & - & y_{31} & y_{32} \\ + & + & - & - & y_{41} & y_{42} \\ + & - & - & + & y_{51} & y_{52} \\ + & + & - & - & y_{61} & y_{62} \\ + & - & + & - & y_{71} & y_{72} \\ + & + & + & + & y_{81} & y_{82} \end{bmatrix} . \quad (6.29)$$

По этому полному плану можно проводить эксперимент, измерять и записывать в числа результаты  $y_{i1}$  и  $y_{i2}$ , а потом обрабатывать эти данные, как будет показано в следующем разделе. Отметим, что перестановкой строк из (6.29) можно получить многообразие новых планов для серии повторных экспериментов.

При увеличении числа контролируемых факторов процедура построения плана эксперимента повторяется. За исходный принимается  $N - 1$ -мерный план. К нему поочередно добавляются: сначала  $N$ -й фактор, который планируется на нижнем уровне в первой половине строк  $N - 1$ -мерного плана и на верхнем уровне — в другой половине его строк; затем полученный план повторяется, сочетаясь с нижним и верхним уровнями комбинации  $N$ -го фактора с первым, вторым и комбинациями остальных факторов, причем в каждой строке уровень комбинации определяется алгебраическим произведением знаков предшествующих факторов, вошедших в комбинацию. Для оценки правильности полученного плана проверяется его ортогональность — вычисляются ковариации новых столбцов между собой и с некоторыми, полученными из  $N - 1$ -мерного плана; это нетрудно:  $(-) \times (+) \times (+) \times (-) = 0$ , — и так для каждой пары строк и столбцов.

Читатель может потренироваться в построении полного плана трехфакторного эксперимента. Этот план должен иметь 256 строк, так как уравнение полной трехфакторной регрессии

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \\ + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

содержит  $N + K + 1 = 3 + C_2^3 + C_3^3 + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$  неизвестных коэффициентов, для определения которых, независимо друг от друга, необходимо  $2^8 = 256$  измерений. Это не такой уж большой объем выборки для исследования по математическому плану: он меньше, чем был бы нужен при классическом регрессионном анализе, и гораздо меньше, чем требуется для обычных случайных выборок.

### 1.3.1 Обработка результатов математически спланированного эксперимента

Как упоминалось выше, обработка данных эксперимента по плану проста и сводится к следующим действиям.

1. Вычисляются коэффициенты регрессии.

$$a_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i \quad (6.30)$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots$  — порядковый номер коэффициента (и фактора),  $i = 1, 2, \dots, n$  — номер строки плана в вертикальной ориентации (6.25),  $n$  — общее число строк — объем выборки. Если план записан в горизонтальной ориентации (6.26) и (6.29), то формула (6.30) преобразуется:

$$a_j = \sum_{i=1}^{0,5n} x_{ji} y_{i1} + \sum_{i=0,5n+1}^n x_{ji} y_{i2}.$$

В обеих формулах, так как значения  $x_{ji}$  представляют собой «плюсы» или «минусы», вычисление коэффициентов регрессии сводится к алгебраическому суммированию результатов измерений  $y_i$ .

2. Вычисляются условные средние арифметические значения. Удобнее всего это делать по строкам горизонтально ориентированного плана (6.26) и (6.29):

$$\bar{y}_i = 0,5(y_{i1} + y_{i2}). \quad (6.31a)$$

Менее удобно — по строкам плана, ориентированного вертикально, со сдвигом в  $0,5n$  строк:

$$\bar{y}_i = 0,5(y_i + y_{i+0,5n}), \quad (6.31b)$$

что, например, для однофакторного плана (6.25) при  $0,5 \cdot 2^2 = 2$  означает:  $\bar{y}_1 = 0,5(y_1 + y_3)$ ,  $\bar{y}_2 = 0,5(y_2 + y_4)$ , а для двухфакторного плана при  $0,5 \cdot 2^4 = 8$ :  $\bar{y}_1 = 0,5(y_1 + y_9)$ ,  $\bar{y}_2 = 0,5(y_2 + y_{10})$ ,  $\dots$ ,  $\bar{y}_8 = 0,5(y_8 + y_{16})$ .

3. Вычисляются условные дисперсии:

$$D_i = 0,5(y_{i1}^2 + y_{i2}^2) - \bar{y}_i^2 \quad (6.32a)$$

или

$$D_i = 0,5(y_i^2 + y_{i+0,5n}^2) - \bar{y}_i^2 \quad (6.32b)$$

для строк горизонтально или вертикально ориентированных планов.

4. Вычисляется остаточная дисперсия как среднее арифметическое из условных дисперсий:

$$D_o = \frac{1}{0,5n} \sum_{i=1}^{0,5n} D_i, \quad (6.33)$$

где  $D_i$  определены формулами (6.32 а) и (6.32 б).

5. Вычисляется стандартная погрешность коэффициентов регрессии

$$\sigma_a = \sqrt{D_o : (n - 1)}, \quad (6.34)$$

где  $n = 2^{N+K+1}$  — число строк полного плана (число измерений, объем выборки).

6. Проверяется значимость коэффициентов регрессии. Значимые коэффициенты, для которых выполняется условие:

$$a_j \geq t_{\alpha, \nu} \sigma_{a_j}, \quad (6.35)$$

где  $t_{\alpha, \nu}$  — квантиль  $t$ -распределения Стьюдента, определяемый по табл. VIII Приложения 2 для вероятности ошибки 1-го рода  $\alpha = 0,05$  и числа степеней свободы  $\nu = n - 1$ .

7. Уравнение регрессии записывается в явном виде со значимыми коэффициентами; члены с незначимыми коэффициентами отбрасываются. Если все коэффициенты окажутся незначимыми, то это может быть обусловлено малым числом наблюдений и необходимо повторить эксперимент; если не помогает, нужно расширить зону планирования, уменьшив  $x_{\min}$  и увеличив  $x_{\max}$ ; если и это не помогает, то зависимости, по-видимому, не существует.

8. Проверяется равенство вычисленных по уравнению и эмпирических условных средних

$$\bar{y}_i^* = \bar{y}_i, \quad (6.36)$$

где  $\bar{y}_i^*$  — вычисленное по уравнению условное среднее, оно определяется подстановкой в уравнение регрессии тех «плюсов» и «минусов», которые означают сочетание уровней факторов в  $i$ -й строке плана. Если для многих строк плана равенство (6.36) не выполняется, то следует проверить, нет ли систематической ошибки типа «сдвиг». Проверка предполагает сравнение сумм условных средних — эмпирических и вычисленных: если эти суммы равны, то систематической ошибки нет, а нарушение равенства (6.36) обусловлено флуктуациями эмпирических данных. Для оценки этих флуктуаций вычисляют дисперсию неадекватности\*.

\*В публикациях по математическому планированию эксперимента ее называют дисперсией адекватности, что явно противоречит смыслу.

9. Вычисление дисперсии неадекватности основано на идее метода наименьших квадратов, который рассматривался выше. При этом используется формула

$$D_{\text{ад}} = \frac{1}{0,5n} \sum_{i=1}^{0,5n} (y_i^* - y_i)^2. \quad (6.37)$$

Эта дисперсия служит мерой неадекватности полученного уравнения регрессии для экспериментальных данных. Если при условии безошибочности расчетов дисперсия неадекватности относительно велика, то следует вернуться к изучению ситуации и выбору другой, может быть, более сложной модели.

**Пример 6.6.** Пусть радиист принимает сигналы переменной громкости в условиях возможных помех. Требуется оценить, как влияют на ошибки приема громкость сигнала и помехи. В эксперименте громкость сигналов и наличие либо отсутствие помех можно независимо варьировать — это два контролируемых фактора. Первый из них варьируется в некотором диапазоне от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$ , а второй — логическая переменная, которая принимает значения: «0» — нет помех или «1» — есть помехи.

В такой ситуации возможны следующие *эффекты*: 0) ошибки радиоприема не зависят от громкости сигналов и от помех при выбранном диапазоне громкостей и качестве помех; 1) они зависят только от громкости или 2) только от наличия помех; 3) ошибки зависят от совместного действия контролируемых факторов. Теперь можем записать уравнение регрессии в общем виде:

$$y = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_{12} z_1 z_2,$$

где  $z_0, z_1, z_2$  и  $z_1 z_2$  — четыре фактора, которые обуславливают перечисленные выше эффекты;  $a_0, a_1, a_2$  и  $a_{12}$  — коэффициенты, выражающие величину этих эффектов. Первый и второй факторы представляют собой контролируемые переменные, которые надо преобразовать в плановый масштаб:

$$z_1 = \begin{cases} (x_{\min} - x_{\max}) : (x_{\max} - x_{\min}) = -1, \\ (x_{\max} - x_{\min}) : (x_{\max} - x_{\min}) = +1, \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} (0 - 1) : (1 - 0) = -1, \\ (1 - 0) : (1 - 0) = +1, \end{cases}$$

откуда, опуская единицы, получаем:  $z_1 = (-, +)$ ,  $z_2 = (-, +)$ , где минус означает нижний уровень факторов, а плюс — верхний уровень. Нулевой фактор, означающий среднее из эмпирических данных при условии остальных значений в центре планирования, всегда положителен. Фактор сочетания первых двух как третий фактор —  $z_1 z_2 = z_3$  — принимает значения, определяемые в каждой

строе плана произведением знаков факторов-смножителей. В уравнении обозначение нулевого фактора можно опустить и заменить произведение факторов на обозначение третьего фактора.

Перед проведением эксперимента для удобства реализации плана полезно записать в виде *матрицы соответствий* сочетания уровней факторов в плановом и натуральном масштабах:

$z_1 \equiv$ $\equiv X_1$	$z_2 \equiv X_2$	
	-	+
-	$x_{\min}$ без помех	$x_{\min}$ с помехами
+	$x_{\max}$ без помех	$x_{\max}$ с помехами

Здесь по-прежнему  $X_1 = \{x_{\min}, x_{\max}\}$  — два уровня громкости,  $X_2 = \{0, 1\}$  — отсутствие или наличие помех.

Пусть в результате эксперимента по плану (6.29) получены конкретные значения числа ошибок радиоприема, которые для примера записаны в столбцы  $y_{i1}, y_{i2}$ :

$$\begin{array}{c|cccc|cc|cc|cc}
 i & z_{0i} & z_{1i} & z_{2i} & z_{3i} & y_{i1} & y_{i2} & \bar{y}_i & D_i & \bar{y}_i^* & \Delta_i^2 \\
 \hline
 1 & + & - & - & + & 4 & 3 & 3,5 & 0,25 & 4,0 & 0,25 \\
 2 & + & + & - & - & 2 & 3 & 2,5 & 0,25 & 2,5 & 0,00 \\
 3 & + & - & + & - & 8 & 4 & 5,0 & 1,00 & 5,0 & 0,00 \\
 4 & + & + & + & + & 8 & 10 & 9,0 & 1,00 & 8,5 & 0,25 \\
 5 & + & - & - & + & 4 & 5 & 4,5 & 0,25 & 4,0 & 0,25 \\
 6 & + & + & - & - & 3 & 2 & 2,5 & 0,25 & 2,5 & 0,00 \\
 7 & + & - & + & - & 4 & 6 & 5,0 & 1,00 & 5,0 & 0,00 \\
 8 & + & + & + & + & 9 & 7 & 8,0 & 1,00 & 8,5 & 0,25 \\
 \hline
 & \text{Суммы} & & & & 40 & 40 & 40,0 & 5,00 & 40,0 & 1,00
 \end{array} \quad (6.38)$$

По изложенной выше процедуре и соответствующим формулам обрабатываем эти данные.

1. Вычисляем по (6.30) коэффициенты регрессии:

$$a_0 = (+4 + 3 + 2 + 3 + 6 + 4 + 8 + 10 + 4 + 5 + 3 + 2 + 4 + 6 + 9 + 7) : 16 = 5;$$

$$a_1 = (-4 - 3 + 2 + 3 - 6 - 4 + 8 + 10 - 4 - 5 + 3 + 2 - 4 - 6 + 9 + 7) : 16 = 0,5;$$

$$a_2 = (-4 - 3 - 2 - 3 + 6 + 4 + 8 + 10 - 4 - 5 - 3 - 2 + 4 + 6 + 9 + 7) : 16 = 1,75;$$

$$a_3 = (+4 + 3 - 2 - 3 - 6 - 4 + 8 + 10 + 4 + 5 - 3 - 2 - 4 - 6 + 9 + 7) : 16 = 1,25.$$

...

2. Вычисляем по (6.31 а) условные средние арифметические и записываем в новый столбец плана (6.38).

$$\bar{y}_1 = 0,5(4+3) + 3,5, \quad \bar{y}_2 = 0,5(2+3) = 2,5 \quad \text{и т. д.}$$

3. Вычисляем по (6.32 а) условные дисперсии и записываем в следующий столбец, приписываемый к плану (6.38):

$$D_1 = 0,5(4^2 + 3^2) - 3,5^2 = 0,25,$$

$$D_2 = 0,5(2^2 + 3^2) - 2,5^2 = 0,25 \quad \text{и т. д.}$$

4. Вычисляем по (6.33) остаточную дисперсию, суммируя условные дисперсии в столбце плана:

$$D_0 = (0,25 \cdot 4 + 1,00 \cdot 4) : 8 = 0,625.$$

5. Вычисляем по (6.34) стандартную погрешность коэффициентов регрессии:

$$\sigma_a = \sqrt{0,625 : (16 - 1)} \approx \sqrt{0,0417} \approx 0,204$$

6. Проверяем по (6.35) значимость коэффициентов регрессии. Сначала находим по табл. VIII Приложения 2 пятипроцентный квантиль  $t$ -распределения Стьюдента при числе степеней свободы  $(16 - 1)$ ; он составляет 2,131. Умножая на него стандартную погрешность, получаем критическое значение для оценки коэффициентов регрессии:  $2,131 \cdot 0,204 \approx 0,435$ . Все полученные выше коэффициенты не меньше этого критического значения. Следовательно, они значимы на 5%-м уровне.

7. Теперь можем записать в явном виде уравнение регрессии, характеризующее зависимость ошибок радиоприема от громкости сигналов и от помех

$$\bar{y}^* = 5 + 0,5x_1 + 1,75x_2 + 1,25x_3.$$

8. Вычисляем по этому уравнению предсказываемые им в среднем ошибки радиоприема и записываем вычисленные условные средние  $\bar{y}_i^*$  в дополнительный столбец плана (6.38):

$$\bar{y}_1^* = 5 - 0,5 - 1,75 + 1,25 = 4,0,$$

$$\bar{y}_2^* = 5 + 0,5 - 1,75 - 1,25 = 2,5,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\bar{y}_8^* = 5 + 0,5 + 1,75 + 1,25 = 8,5.$$

Так как имеются отклонения вычисленных условных средних от эмпирических, надо проверить, нет ли систематической ошибки. Для проверки находим суммы в столбцах  $\bar{y}_i$  и  $\bar{y}_i^*$  (6.38); они равны, следовательно систематической погрешности нет и отклонения суть случайные ошибки (флуктуации).

9. Для оценки качества регрессионной модели вычисляем по флуктуациям, согласно формуле (6.37), дисперсию неадекватности:

$$D_{\text{нх}} = 1/8 \sum \Delta_i^2,$$

где  $\Delta_1^2 = (4 - 3,5)^2 = 0,25$ ,  $\Delta_2^2 = (2,5 - 2,5)^2 = 0,00$  и т. д.; они записаны в последнем столбце плана (6.38), их сумма равна единице, так что  $D_{\text{нх}} = 0,125$ . Соответственно  $\sigma_{\text{нх}} = \sqrt{0,125} \approx 0,354$ , что приблизительно равно флуктуациям  $\Delta_i$ , результат приемлемый.

Таким образом, полученная регрессионная модель удовлетворительна, поскольку воспроизводит эмпирические данные в среднем со случайной ошибкой порядка  $\pm 0,4$ . Коэффициенты регрессии показывают, что ошибки радиоприема обусловлены главным образом помехами и слабыми сигналами на фоне помех, слабость сигнала без помех меньше влияет на появление ошибок радиста.

## ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

## 1.1. ПОНЯТИЕ О ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

### 1.1.1. Сущность факторного анализа

*Явной переменной* будем называть величину, которую можно непосредственно или косвенно измерить. Например, можно непосредственно измерить длину стола линейкой. Силу электрического тока можно косвенно измерить посредством напряженности магнитного поля в проводнике. Длина стола, сила электрического тока — это явные переменные. Отметим, что при косвенных измерениях переменной  $X$  через переменную  $Y$  должно быть известно в явном виде уравнение  $X = f(Y)$

*Латентной переменной* (фактором) будем называть величину, которую непосредственно измерить нельзя и для которой неизвестны уравнения связи с какими-либо явными переменными. Большинство психических явлений, безусловно, должно рассматриваться как латентные переменные. Во многих случаях мы не знаем о них ничего, кроме того, что они существуют и, обуславливая жизнедеятельность, проявляются в действиях (реакциях) индивида. Эти действия представляют собой явные переменные, так как их можно объективно измерить, прямо или косвенно.

*Весом* (зарядом, откликом) латентной переменной (фактора) у  $i$ -го индивида будем называть некоторую количественную меру проявления этой латентной переменной в наблюдаемых или специально вызываемых действиях (реакциях) данного индивида.

*Тестированием* будем называть естественное или специально сконструированное воздействие на психику\*, вызывающее отклик латентного свойства  $F$ , который проявляется в объективно регистрируемом действии  $Z$ , где  $Z = \psi(F)$ , причем вид функции  $\psi$  неизвестен.

Задание, посредством которого осуществляется тестирование, называют *тестом*. Характер теста может быть любым — это и вопрос, требующий ответа, и задача, требующая решения, и некоторая ситуация, требующая определенного комплекса действий,

---

\*Вообще — на живой организм или физический объект.

и т.п. Применение теста  $A_j$  к  $i$ -му индивиду вызывает у индивида реакцию  $z_{ji}$ , которая как-либо оценивается или измеряется. Например, ответы испытуемых по тестам шкалы Векслера оцениваются суммами баллов. Зарядом (весом) латентной переменной (фактора) по  $j$ -му тесту будем называть количественную меру выявления данной переменной с помощью данного теста.

Обычно психические явления на первичном уровне описания характеризуются группой свойств. Каждое из таких свойств — это латентная переменная. Свойства в группе могут быть соподчинены, могут различаться по степени общности. В этой связи и латентные переменные, отображающие группу свойств, образуют *латентную структуру*, в которой отдельные переменные могут в определенном отношении рассматриваться как *общие, групповые и специфические*. Кроме того, переменные в латентной структуре могут быть взаимосвязаны.

Итак, *латентной структурой* будем называть систему латентных переменных, характеризующих некоторое психическое явление и обуславливающих систему реакций индивида в ответ на систему внешних воздействий. Иначе говоря, латентная структура обуславливает определенное поведение в основных условиях.

Очевидно, уже по определению латентная структура должна рассматриваться в качестве структуры *случайной* как по характеру существования и выраженности ее элементов у различных индивидов, так и по степени возможности ее тестирования и описания. В этой связи факторный анализ как группа методов, направленных на выявление и описание латентной структуры, базируется на следующих основных постулатах.

**Постулат 1.** Существование латентной структуры полностью определимо только на множестве индивидов, образующих генеральную совокупность. *Следствие:* латентная структура отдельного индивида есть случайная реализация общей латентной структуры.

**Постулат 2.** Латентная структура может проявиться лишь через определенное множество тестирований. *Следствие:* латентная структура, выявляемая через *неопределенное* множество тестирований, есть случайная реализация общей латентной структуры.

Рассмотрим основные уравнения факторного анализа (ФА). Пусть имеется множество индивидов  $B_i$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , и множество тестов\*  $A_j$ , где  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , причем каждый тест однократно применяется к каждому индивиду, в результате чего получается количественная оценка  $z_{ji}$  (табл. 7.1). Пусть далее ла-

\*Множество тестов, определенное для выявления латентной структуры, обычно называют *батареей тестов*.



тентная структура представлена множеством общих факторов  $F_y$ , где  $y = 1, 2, 3, \dots, k$ .

Таблица 7.1

Результаты применения батареи тестов к выборке испытуемых

		Множество индивидов $B_i$						
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	...	$B_i$	...	$B_n$
Множество (батарея) тестов $A_j$	$A_1$	$z_{11}$	$z_{12}$	$z_{13}$	...	$z_{1i}$	...	$z_{1n}$
	$A_2$	$z_{21}$	$z_{22}$	$z_{23}$		$z_{2i}$	..	$z_{2n}$
	$A_3$	$z_{31}$	$z_{32}$	$z_{33}$		$z_{3i}$	..	$z_{3n}$
	...	...	...	..			.	
	$A_j$	$z_{j1}$	$z_{j2}$	$z_{j3}$		$z_{ji}$		$z_{jn}$
	.	.	.	.		.	...	..
	$A_m$	$z_{m1}$	$z_{m2}$	$z_{m3}$	...	$z_{mi}$	...	$z_{mn}$

Тогда первое основное уравнение факторного анализа может быть записано следующим образом:

$$z_{ji} = \sum_{y=1}^k a_j(F_y) b_i(F_y),$$

где  $z_{ji}$  — оценка, полученная в результате однократного применения  $j$ -го теста к  $i$ -му индивиду;  $a_j(F_y)$  — заряд  $y$ -го фактора в  $j$ -м тесте;  $b_i(F_y)$  — вес  $y$ -го фактора у  $i$ -го индивида. Величины  $z_{ij}$ ,  $a_j(F_y)$  и  $b_i(F_y)$  — это обычно величины, центрированные и нормированные своими стандартными отклонениями\*

Второе основное уравнение факторного анализа может быть представлено в нескольких вариантах. Например, оценки  $z_{ji}$  в табл. 7.1 можно коррелировать по строкам или по столбцам. Если, используя коэффициент корреляции Пирсона\*\*, определить, как коррелируют оценки  $z_{ji}$  каждого теста с каждым другим (коэффициент корреляции вычисляется между строками табл. 7.1), то второе основное уравнение ФА для каждой пары тестов имеет вид

$$r(A_1 A_2) = \sum_{y=1}^k a_1(F_y) a_2(F_y), \quad (7.1)$$

т. е. коэффициент корреляции каждого теста с каждым другим тестом рассматривается как скалярное произведение факторных зарядов соответствующей пары тестов. Аналогично, коррелируя

\*На практике чаще всего  $z_{ji}$  не центрируются и не нормируются, факторные заряды и веса получают в виде основных отклонений в ходе вычислений

\*\*Существо ФА обычно демонстрируют для коэффициента Пирсона, но факторный анализ можно осуществлять и на основе коэффициентов ранговой корреляции, функционально связанных с пирсоновским.

тестовые оценки каждого индивида с каждым другим (корреляция между столбцами табл. 7.1), имеем второе основное уравнение ФА для каждой пары индивидов:

$$r(B_1 B_2) = \sum_{y=1}^k b_1(F_y) b_2(F_y). \quad (7.2)$$

Необходимо отметить, что уравнение (7.1) справедливо только при условии выполнения постулата 1, а уравнение (7.2) — только при выполнении постулата 2.

Из уравнения (7.1) следует, что коэффициент корреляции  $j$ -го теста с самим собой — это величина, равная сумме квадратов факторных зарядов данного теста:

$$r(A_j A_j) = \sum_{y=1}^k a_j^2(F_y). \quad (7.3)$$

Величину  $r(A_j A_j)$  называют «общностью» или *запасом общей изменчивости*, она представляет собой часть общей дисперсии оценки  $z_j$  по  $j$ -му тесту.

Полное уравнение дисперсии в нормированном виде может быть представлено в виде суммы следующих компонентов

$$1 = r(A_j A_j) + c_j^2(F_j) + \epsilon_j^2, \quad (7.4)$$

где  $r(A_j A_j)$  — запас общей изменчивости;  $c_j(F_j)$  — заряд фактора, специфического для  $j$ -й переменной;  $\epsilon_j^2$  — остаточная дисперсия оценки  $z_j$  по  $j$ -му тесту. Уравнение (7.4) — это *третье основное уравнение факторного анализа*. Обозначая  $r(A_j A_j) = h_j^2$  и  $c_j^2(F_j) + \epsilon_j^2 = u_j^2$ , можем переписать уравнение (7.4):

$$h_j^2 + u_j^2 = 1.$$

В факторном анализе существенную роль играет величина  $h_j^2$ , которая в подавляющем большинстве случаев априори неизвестна и с трудом может быть определена экспериментально\*. Величина  $u_j^2$ , в сущности, не имеет в ФА какого-либо значения, кроме того, что по ней определяется окончание процесса извлечения факторов. Тем не менее на практике ее компонент  $\epsilon_j^2$  всегда присутствует, и его следовало бы суммировать с уравнениями (7.1) и (7.2).

$$r(A_1 A_2) = \sum_{y=1}^k a_1(F_y) a_2(F_y) + \epsilon_1 \epsilon_2, \quad (7.5)$$

\* Коэффициент корреляции теста с самим собой известен как коэффициент *стабильности* в случае, если два эквивалентных теста применяются одновременно к одной и той же группе людей, или как коэффициент *стабильности*, когда один и тот же тест применяется к двум эквивалентным группам индивидов.

где  $\varepsilon_1\varepsilon_2$  — остаточный коэффициент корреляции, обусловленный флуктуациями условий тестирования;

$$r(B_1B_2) = \sum_{y=1}^k b_1(F_y)b_2(F_y) + \varepsilon_1\varepsilon_2,$$

где  $\varepsilon_1\varepsilon_2$  — остаток, обусловленный флуктуациями внутренней среды организма

На основании левых частей уравнений (7.4) и (7.5) может быть написана матрица коэффициентов корреляции\*, в которой по главной диагонали записаны единицы. Такая корреляционная матрица называется в ФА «комплектной». Корреляционная матрица, у которой по главной диагонали расположены запасы общей изменчивости (по (7.3)), называется «сокращенной». Пример комплектной и сокращенной корреляционных матриц приведен в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Комплектная и сокращенная корреляционные матрицы

Комплектная	Сокращенная
$\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & 1 & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_1^2 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & h_2^2 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & h_3^2 & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & h_4^2 & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & h_5^2 \end{bmatrix}$

Факторная (латентная) структура, выявляемая по множеству переменных (тестов или индивидов), может быть представлена в виде матрицы факторных зарядов\*\*, в которой по строкам указаны переменные (тесты или люди), а по столбцам — факторы. Строка факторной матрицы представляет факторную структуру переменной, столбец — структуру переменных, измеряющих данный фактор. Как указывалось, факторы в латентной структуре могут быть общими, групповыми и специфическими. Чаще всего в ФА рассматриваются латентные структуры, имеющие в своем составе только общие и специфические факторы\*\*\*. Факторная матрица, включающая в себя как общие, так и специфические факторы, тоже называется комплектной. Соответственно матрица, включающая в себя только общие или только специфические факторы, называется сокращенной. Пример комплектной и сокращенной факторных матриц приведен в табл. 7.3. Отметим, что матрица специфических факторов — это диагональная матрица.

\*В дальнейшем, для краткости, просто корреляционная матрица.

\*\*Сокращенно факторная матрица.

\*\*\*При этом общие факторы в дальнейшем специальными методами (ротации) расщепляются до групповых.

Таблица 7.3

Комплектная и сокращенные факторные матрицы

		Общие факторы $F_y$			Специфические факторы $C_j$				
		1	2	3	1	2	3	4	5
Тесты $A_j$	1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$c_{11}$				
	2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$		$c_{22}$			
	3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$			$c_{33}$		
	4	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$				$c_{44}$	
	5	$a_{51}$	$a_{52}$	$a_{53}$					$c_{55}$
Сокращенная					Сокращенная				
		Комплектная							

Обобщая второе и третье основные уравнения (7.1) и (7.4), можем записать *общее основное уравнение факторного анализа в матричной форме*:

$$R_0 = \sum_{y=1}^k R_y + C + E \quad \text{при} \quad (7.6)$$

$$R_y = F_y F_y'$$

Здесь  $R_0$  — исходная обычно комплектная корреляционная матрица, получаемая эмпирически;  $R_y$  — так называемая  $y$ -я (первая, вторая и т. д.) корреляционная матрица, получаемая в результате  $y$ -го шага ФА;  $y$  — порядковый номер шага ФА,  $y = 1, 2, \dots, k$ , где  $k$  — количество общих факторов в латентной структуре и одновременно — число шагов по извлечению факторов\*;  $F_y$  — сокращенная факторная матрица, полученная в результате  $y$ -го шага и содержащая один  $y$ -й столбец факторных зарядов;  $F_y'$  — транспозиция матрицы  $F_y$ , содержащая одну строку,  $C$  — диагональная матрица специфических факторов;  $E$  — матрица ошибок.

Сущность любого из методов факторного анализа состоит в том, чтобы, преобразуя последовательно шаг за шагом исходную корреляционную матрицу  $R_0$ , выделить из нее сокращенную факторную матрицу  $F_k$ , такую, чтобы выполнялось равенство\*\*

$$R_0 = F_k F_k' + E,$$

\* На каждом шаге извлекается один фактор, поэтому количество факторов и число шагов одинаковы.

\*\* Это равенство часто и называют в нашей литературе основным уравнением ФА.

где в матрице  $E$  все элементы  $e_{ji}$  не отличались бы статистически значимо от нуля.

### 1.1.2. Разновидности методов факторного анализа

Методы ФА можно классифицировать по крайней мере по трем основаниям: по направленности, по исходным представлениям о числе общих факторов, по исходным представлениям об ортогональности факторов.

*Направленность* ФА связана с объектом, в котором исследуется латентная структура, и с условиями, при которых она изучается. В качестве объекта ФА могут выступать множество тестов, множество индивидов, множество случаев. Эти три переменные в сочетаниях по две (табл. 7.4) и по две перестановки в каждом сочетании (табл. 7.5) образуют шесть видов («техник») ФА. Рассмотрим подробнее, в чем суть шести вариантов ФА, так как это методологически и методически очень важно.

Таблица 7.4

Сочетания переменных и виды ФА			
Виды	Тесты	Индивиды	Случаи
I и II	$m$	$n$	I
III и IV	$m$	I	$n$
V и VI	I	$m$	$n$

Примечание.  $m$  и  $n$  — не единичные множества.

Таблица 7.5

Направленность видов ФА			
	Тесты	Индивиды	Случаи
Тесты	—	I	III
Индивиды	II	—	V
Случаи	IV	VI	—

Примечание. Таблица, как любая матрица, читается начиная со строки. По строкам расположены переменные, выступающие в качестве объекта исследования; по столбцам — переменные, опосредствующие изучение объектов.

*I вид* ФА в сущности «калибрует» батарею тестов на репрезентативной выборке индивидов. При этом обычно требуется выполнять условие:  $m \ll n$  — число тестов гораздо меньше числа

индивидов. Здесь попарно коррелируются тестовые оценки, полученные усреднением по выборке людей, и выявляется матрица факторных зарядов по тестам.

*II вид* ФА направлен на изучение выборки индивидов, не обязательно репрезентативной, но обязательно с помощью представительной батареи тестов. При этом обычно требуется, чтобы число индивидов было меньше числа тестов:  $m > n$ . Но это требование далеко не всегда легко, а главное целесообразно выполнять, так как часто возникает необходимость изучить для большой группы людей ограниченный круг свойств, тестируемых, естественно, ограниченным набором тестов. Здесь попарно коррелируются индивидуальные оценки, усредненные по множеству тестов, и выявляется матрица факторных весов по индивидам.

Еще раз подчеркнем различие между I и II видами, которые наиболее распространены на практике. Если I вид ФА отвечает на вопрос о том, как хорошо каждый тест (и батарея тестов в целом) выявляет некую латентную структуру, то II вид ФА отвечает на вопрос о том, в какой мере переменные латентной структуры выявляются у данного индивида.

Считается, что если ФА выполняется на одном и том же массиве данных (см. табл. 7.1), то I и II виды ФА приводят примерно к одной и той же факторной матрице. Различие остается лишь в интерпретации, согласно указанной специфике этих видов ФА. В этой связи отметим, что и между остальными парами видов (III и IV, V и VI) отношения формально такие же. Поэтому иногда четные виды называют «обратными» в отношении их нечетной пары.

*III и IV виды* ФА осуществляются на одном индивиде. Если III вид ФА отвечает на вопрос, какова стабильность каждого теста (и батареи в целом) при многократном применении к одному и тому же индивиду, то IV вид ФА отвечает на вопрос, какова роль повторений в выполнении индивидом каждого теста. Здесь вообще посредством факторных матриц исследуется как бы динамика тестовых оценок (III вид ФА) либо изменчивость латентной структуры индивида на множестве случаев (IV вид ФА). Оба эти вида имеют большое значение для дифференциальной психологии. К сожалению, их применение наталкивается на значительные трудности в связи с тем, что большинство современных тестов не допускает (из-за простоты) повторных, тем более многократных применений к одному и тому же человеку.

*V и VI виды* ФА осуществляются на одном тесте, многократно применяемом ко множеству индивидов. При этом вскрывается либо динамика латентной структуры от случая к случаю (V вид ФА), либо роль случая (повторения) в изменчивости латентной структуры у множества индивидов (VI вид ФА). Хотя эти два вида ФА

почти не используются, сам методологический подход тривиален для психологических наук, в которых повсеместно осуществляется в эксперименте многократное применение одного и того же задания ко множеству испытуемых.

По исходным представлениям о количестве общих факторов в корреляционной матрице  $R_0$  исторически выделились три вида ФА: однофакторный (по Спирмену), бифакторный (по Холзингеру), мультифакторный (по Терстоуну). В настоящее время считается доказанным, что полная матрица интеркорреляций порядка  $m$  может быть факторизована бесчисленным количеством способов с выделением (теоретически) не менее  $m$  факторов. Несмотря на это, во многих случаях оказывается выгодным использовать более простые одно- и бифакторные модели ФА, дающие сходные с мультифакторным анализом результаты. Ниже мы подробно рассмотрим однофакторный и мультифакторный методы.

С точки зрения исходных представлений об ортогональности факторов выделяются два вида ФА: с ортогональными (независимыми) факторами и с облическими (зависимыми) факторами. Это, в сущности, разновидности мультифакторного анализа. Их специфику мы рассмотрим в дальнейшем.

### 1.1.1. Задачи факторного анализа в психологии

Обычно выделяют две основные задачи ФА в психологических исследованиях: во-первых, вскрыть латентную структуру и, во-вторых, вскрыть ее так, чтобы она описывалась небольшим числом переменных по сравнению с исходным количеством измеряемых переменных. Но в аспекте шести рассмотренных видов ФА, различающихся направленностью, можно сформулировать задачи более конкретно, как мы это и сделали. Повторим здесь еще раз три из них, основные, по современным возможностям.

1. Определить степень пригодности батареи тестов для выявления некоторой латентной структуры и шкалировать эту батарею.

2. Определить выраженность некоторой латентной структуры у каждого индивида из выборки индивидов.

3. Определить динамические особенности некоторой латентной структуры на основе многократного повторного тестирования одного индивида либо многократного применения одного теста к множеству индивидов.

Решение этих задач является актуальным в настоящее время во всех отраслях психологии.

## 1.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Метод однофакторного анализа предложен Ч. Спирменом в ходе обоснования «теории двух факторов» — общего (генерального) и единичного. Комплексная матрица факторов по Спирмену представлена в табл. 7.6. Из таблицы следует, что все показатели (тесты, люди и т. д.) имеют отличающиеся от нуля заряды общего фактора (отсюда и название «общий») и, кроме того, — по одному специфическому фактору.

Таблица 7.6

Однофакторная модель по Спирмену						
Показатели	Факторы					
	общий	единичные				
1	$a_1$	$c_1$				
2	$a_2$		$c_2$			
3	$a_3$			$c_3$		
...	...					
$\dots$	$a_n$					$c_n$

Процедура извлечения факторных зарядов (факторизации) по методу Спирмена относится лишь к общему фактору и состоит из трех этапов.

На первом этапе для каждой  $j$ -й переменной вычисляются заряды  $a_j$  общего фактора по следующей формуле:

$$a_j = \sqrt{\frac{(r)_j^2 - (r^2)_j}{(r)_1 - 2(r)_j}}, \quad (7.7)$$

где  $(r)_j$  — сумма всех коэффициентов корреляции в  $j$ -м столбце сокращенной корреляционной матрицы (элементы главной диагонали считаются неизвестными и не входят в суммы);  $(r)_j^2$  — квадрат предыдущей суммы;  $(r^2)_j$  — сумма квадратов всех коэффициентов корреляции в  $j$ -м столбце сокращенной корреляционной матрицы;  $(r)_1$  — сумма всех коэффициентов корреляции в сокращенной корреляционной матрице. Определенные таким путем факторные заряды  $a_j$  образуют сокращенную факторную матрицу  $F$ , в которой всего один столбец и  $n$  строк (по числу переменных:  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

На втором этапе ФА по методу Спирмена осуществляется транспонирование факторной матрицы-столбца. Транспонированная матрица  $F'$  содержит одну строку с  $n$  столбцами. Далее, согласно уравнению (7.6), определяется «репродуцированная» сокращенная корреляционная матрица

$$R_1 = FF',$$



каждый элемент которой вычисляется по формуле

$$r_{jk}^* = a_j a_k, \quad (7.8)$$

где  $r_{jk}^*$  — репродуцированный коэффициент корреляции;  $a_j$  — факторный заряд  $j$ -й переменной,  $a_k$  — факторный заряд  $k$ -й переменной ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $j \neq k$ ).

Третий этап процедуры состоит в определении «остаточной» корреляционной матрицы и проверке возможности рассматривать остаточную матрицу как матрицу погрешностей.

Остаточная корреляционная матрица определяется как разность между исходной и репродуцированной корреляционными матрицами.

$$R_2 = R_0 - R_1, \quad (7.9)$$

где  $R_0$  — исходная,  $R_1$  — репродуцированная,  $R_2$  — остаточная корреляционные матрицы. Обозначив элементы остаточной матрицы  $\bar{r}_{jk}$ , напомним, что они находятся для каждой пары элементов  $r_{jk}$  и  $r_{jk}^*$  по уравнению

$$\bar{r}_{jk} = r_{jk} - r_{jk}^*. \quad (7.10)$$

Далее требуется осуществить проверку равенства

$$R_2 = E, \quad (7.11)$$

где  $E$  — матрица погрешностей. При проверке обычно исходят из того, что в остаточной матрице, если она действительно образована погрешностями, остаточные коэффициенты корреляции  $\bar{r}_{jk}$  распределены нормально, со средним значением, равным нулю. Следовательно, достаточно определить стандартное отклонение  $\sigma_r$  и проверить, как велика вероятность того, что максимальное значение остаточного коэффициента корреляции не превзойдет выбранной заранее величины  $t_{\alpha/\nu} \sigma_r$ :

$$P(|\bar{r}_{jk}|_{\max} \leq t_{\alpha/\nu} \sigma_r) = ? \quad (7.12)$$

Здесь  $|\bar{r}_{jk}|_{\max}$  — максимальный (по модулю) из остаточных коэффициентов корреляции,  $t_{\alpha/\nu}$  — квантиль распределения Стьюдента при заданной вероятности ошибки первого рода ( $\alpha$ ) и данном числе степеней свободы ( $\nu$ ). Если вероятность (7.12) достаточно велика, то отличие  $|\bar{r}_{jk}|_{\max}$  от нуля можно рассматривать как случайное, и, следовательно, для всех  $|\bar{r}_{jk}| < |\bar{r}_{jk}|_{\max}$  это тем более справедливо. Тогда можно принять, что (7.11) выполняется, и остаточную матрицу считать образованной погрешностями измерения.

Практически значение  $t_{\alpha/\nu}$  в случае ФА принимают равным единице. Тогда, учитывая, что для нормально распределенной переменной  $X$

$$P(|X| \leq \sigma_X) \approx 0,683,$$

ограничиваются проверкой условия

$$|\bar{r}_{jk}|_{\max} \leq \sigma_r. \quad (7.13)$$

Если оно выполняется, то остаточную матрицу считают за матрицу погрешностей; если же оно не выполняется, то значит, в остаточной матрице наряду с погрешностями содержатся заряды других общих факторов (по крайней мере одного), которые можно извлечь другими методами факторного анализа.

Величину  $\sigma_r$  можно определить двумя способами. Первый основан на уравнении

$$\sigma_r = (1 - M_r) \sqrt{\frac{5 + 8M_r + 2M_r^2}{2N}}. \quad (7.14)$$

Здесь  $M_r$  — математическое ожидание величины коэффициентов корреляции в исходной корреляционной матрице ( $R_0$ ):

$$M_r = \frac{(r_{jk})_t}{n(n-1)},$$

где  $(r_{jk})_t$  определено выше как сумма всех коэффициентов корреляции в сокращенной корреляционной матрице;  $n$  — число переменных;  $n(n-1)$  — число коэффициентов корреляции в сокращенной корреляционной матрице;  $N$  — количество испытуемых (в общем случае — число пар коррелируемых значений). Второй способ основывается на более простой формуле:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \quad (7.15)$$

По уравнению (7.15)  $\sigma_r$  получается примерно на 20% меньше, чем по уравнению (7.14). Следовательно, второй способ накладывает более жесткие ограничения на возможность выполнения неравенства (7.13), а такое является более простым с вычислительной стороны, поэтому он предпочтителен.

Рассмотрим теперь процедуру однофакторного анализа на примере.

**Пример 7.1\*.** В исследовании индивидуальных различий при запоминании разных видов материала изучались следующие шесть видов заучиваемого материала: 1) картинки, 2) слова конкретные, 3) слова абстрактные, 4) числа двузначные, 5) числа трехзначные, 6) бессмысленные слоги. Оценкой служило количество повторений, потребовавшихся для полного запоминания.

\*Заимствован из кн.: Тезлов В.М. Простейшие способы факторного анализа // Типологические особенности высшей нервной деятельности человека. Т. V. М., 1967

Ряды оценок, полученных для 32 испытуемых, коррелировались для каждой пары видов заучиваемого материала. Сокращенная корреляционная матрица порядка 6 представлена в верхней части табл. 7.7. В нижней части таблицы записаны промежуточные и окончательные данные, соответствующие формуле (7.7).

Таблица 7.7

Исходная корреляционная матрица, промежуточные и окончательные данные факторизации к примеру 7.1

Показатели	1	2	3	4	5	6
1	—	0,48	0,24	0,33	0,38	0,43
2	0,48	—	0,57	0,56	0,43	0,59
3	0,24	0,57	—	0,37	0,40	0,56
4	0,33	0,56	0,37	—	0,49	0,50
5	0,38	0,43	0,40	0,49	—	0,61
6	0,43	0,59	0,56	0,50	0,61	—
$(r)_j$	1,86	2,63	2,14	2,25	2,31	2,69
$(r)_1^2$	$(r)_1 = 13,88$					
$(r^2)_j$	3,460	6,917	4,580	5,062	5,336	7,236
$(r^2)_1$	0,726	1,402	0,993	1,050	1,102	1,469
Числитель	2,734	5,515	3,587	4,012	4,234	5,767
$(2r)_j$	3,72	5,26	4,28	4,50	4,62	5,38
Знаменатель	10,18	8,62	9,60	9,38	9,28	8,50
$a_j^2$	0,269	0,640	0,374	0,428	0,457	0,678
$a_j$	0,52	0,80	0,61	0,65	0,68	0,82

Сокращенная факторная матрица F представлена в табл. 7.8. Умножая, согласно (7.8), матрицу F на ее транспозицию  $F'$ , получаем репродуцированную матрицу  $R_1$ , она представлена в табл. 7.9. Далее, вычитая, согласно (7.9) и (7.10), матрицу  $R_1$  из исходной корреляционной матрицы  $R_0$ , получаем остаточную корреляционную матрицу  $R_2$ , приведенную в табл. 7.10. Выполним для этой матрицы проверку условия (7.11). С этой целью двумя способами — по (7.14) и (7.15) — вычислим  $\sigma_r$ .

Сначала определим оценку математического ожидания  $M_r$  для исходной корреляционной матрицы:

$$M_r = \frac{13,88}{30} \approx 0,46.$$

Тогда

$$\sigma_r = (1 - 0,46) \sqrt{\frac{5 + 8 \cdot 0,46 + 2 \cdot 0,46^2}{2 \cdot 32}} \approx 0,2$$

Сокращенная факторная матрица  
к примеру 7.1

Таблица 7.8

Показатели	Заряды общего фактора
1	0,52
2	0,80
3	0,61
4	0,65
5	0,68
6	0,82

Репродуцированная корреляционная матрица к примеру 7.1

Таблица 7.9

Показатели	1	2	3	4	5	6
1	—	0,42	0,32	0,34	0,35	0,43
2	0,42	—	0,48	0,52	0,54	0,66
3	0,32	0,48	—	0,40	0,42	0,50
4	0,34	0,52	0,40	—	0,44	0,53
5	0,35	0,54	0,42	0,44	—	0,56
6	0,43	0,66	0,50	0,53	0,56	—

Остаточная корреляционная матрица к примеру 7.1

Таблица 7.10

Показатели	1	2	3	4	5	6
1	—	0,08	−0,08	−0,01	0,03	0,00
2	0,08	—	0,08	0,04	−0,11	−0,07
3	−0,08	0,08	—	−0,03	−0,02	0,06
4	−0,01	0,04	−0,03	—	0,05	−0,03
5	0,03	−0,11	−0,02	0,05	—	0,05
6	0,00	−0,07	0,06	−0,03	0,05	—

Максимальное абсолютное значение остаточного коэффициента корреляции из табл. 7.10 составляет 0,11. Следовательно, условие (7.11) выполняется. По второму способу  $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{31}} \approx 0,18$ , и условие (7.11) тоже выполняется. Тем более все другие остаточные коэффициенты корреляции в табл. 7.10 удовлетворяют этому условию. Следовательно, мы можем считать остаточную корреляционную матрицу матрицей погрешностей, а процесс факторизации законченным.

Итак, выделен единственный общий фактор, интерпретируемый по смыслу переменных как «фактор опосредствованного, осмысленного запоминания».

## 7.1. МУЛЬТИФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

### 7.1.1 Геометрическая интерпретация корреляционной и факторной матриц

Мультифакторный анализ в основе своей разработан Л. Терстоуном и базируется на предположении о наличии в любой корреляционной матрице более чем одного общего фактора, а также групповых и специфических факторов. Мультифакторная модель была представлена выше, в табл. 7.3 (для трех общих факторов). Именно для мультифакторного анализа справедливо в общем виде основное матричное уравнение ФА — уравнение (7.6).

В отличие от однофакторного мультифакторный анализ не исчерпывается процессом факторизации, а включает в себя еще одну ступень, так называемую ротацию. Кроме того, процесс факторизации здесь является многошаговым, и число шагов факторизации определяется рядом обстоятельств, требующих дополнительного объяснения. В этой связи, прежде чем переходить к конкретному рассмотрению процедуры одного из наиболее распространенных методов мультифакторного анализа — центроидного, — необходимо дать геометрическую интерпретацию корреляционной и факторной матриц.

Коэффициент корреляции  $r_{ij}$  между переменными  $i$  и  $j$  интерпретируется следующим образом:

$$r_{ij} = h_i h_j \cos \alpha_{ij},$$

где  $h_i$  — длина вектора, изображающего  $i$ -ю переменную;  $h_j$  — длина вектора, изображающего  $j$ -ю переменную;  $\alpha_{ij}$  — угол между векторами  $h_i$  и  $h_j$ . Запас общей изменчивости для  $i$ -й переменной на основании (7.16) можно представить как

$$r_{ii} = h_i^2 \cos \alpha_{ii},$$

где  $\cos \alpha_{ii} = 1$  ( $\alpha_{ii} = 0$ ), т. е., иначе говоря, каждую переменную можно охарактеризовать величиной вектора  $h_i \leq 1$ , определяемого как положительное значение корня квадратного из запаса общей изменчивости по данной переменной. Таким образом, зная или как-либо определяя запасы общей изменчивости по всем переменным, можем определить значения векторов, характеризующих эти переменные. Далее, пользуясь уравнением (7.16), в котором для каждой пары переменных известны значения  $r_{ij}$ , а также  $h_i$  и  $h_j$ , можем вычислить

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{r_{ij}}{h_i h_j},$$

откуда находится и угол  $\alpha_{ij}$ .

Система векторов, длина каждого из которых определяется элементами главной диагонали, а углы между каждой парой которых — остальными элементами корреляционной матрицы, называется *конфигурацией векторов*. Из сказанного ясно, что каждой сокращенной корреляционной матрице однозначно соответствует некоторая конфигурация векторов, и наоборот\*.

Факторная матрица геометрически интерпретируется следующим образом. Исходным является предположение об ортогональности факторов. Каждый фактор рассматривается как вектор *единичной* длины, ортогональный всем другим таким же векторам. Таким образом, факторы образуют *прямоугольную систему координат* (систему соотнесения), число осей в которой равно числу столбцов в сокращенной матрице факторов. Очевидно, что при более чем трех факторах наглядное изображение системы координат невозможно, но обычно используется двумерное плоскостное представление для всех пар осей. Факторные заряды  $j$ -й переменной геометрически интерпретируются как проекции вектора данной переменной на соответствующие координатные оси. Такая интерпретация основана на представлении факторного заряда как коэффициента корреляции данной переменной с данным фактором и, следовательно, на представлении этого коэффициента корреляции как косинуса угла между вектором переменной и соответствующей осью координат.

Дадим для примера геометрическую интерпретацию сокращенной факторной матрицы, представленной в табл. 7.11, — рис. 7.1. Двум факторам, которые считаются независимыми, поставлены в соответствие две перпендикулярные оси единичной длины. Чтобы получить конфигурацию векторов, воспользуемся факторными зарядами из табл. 7.11. Первый вектор имеет факторные заряды 0,7 и 0,3. Следовательно, конец первого вектора в координатах  $F_1, F_2$  — это точка с координатами (0,7; 0,3). Геометрически первый вектор находим, соединяя эту точку с началом координат. Аналитически длину вектора  $h_1$  определяем по теореме Пифагора:

$$h_1^2 = 0,7^2 + 0,3^2 = 0,58,$$

$$h_1 = \sqrt{0,58} \approx 0,76.$$

Первое из этих двух уравнений еще раз поясняет смысл запаса общей изменчивости как суммы квадратов факторных зарядов данной переменной. Аналогично определяем длины остальных векторов переменных, изображенных на рис. 7.1. Можно видеть, что

\*Разумеется, это не снимает вопроса о статистической достоверности как самой корреляционной матрицы, так и конфигурации ее векторов.

конфигурация векторов задана в сокращенной факторной матрице посредством системы координат и факторных зарядов.

Таблица 7.11

Сокращенная факторная матрица

Переменные	Факторы	
	1	2
1	0,7	0,3
2	0,9	0,0
3	0,4	0,6
4	0,6	0,3

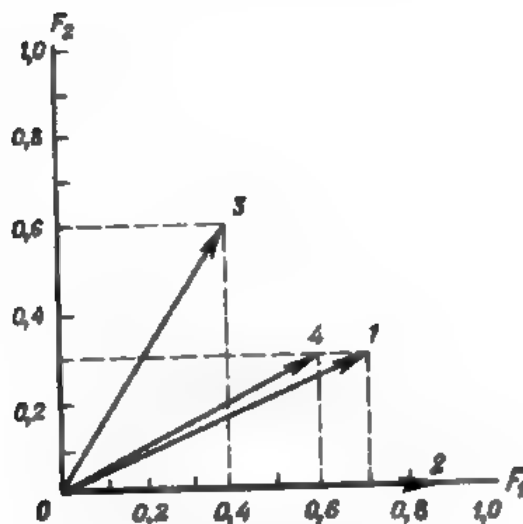


Рис. 7.1. Факторная структура (табл. 7.11)  
 $F_1$  и  $F_2$  — первый и второй факторы соответственно,  
 1–4 — векторы переменных.

Таким образом, факторная структура, геометрически интерпретирующая факторную матрицу, объединяет конфигурацию векторов с системой координат. Вся сложность вопроса, однако, состоит в том, что в корреляционной матрице система координат заранее никак не определена: не определены ни число факторов (осей соотнесения), ни величины факторных зарядов. Методов факторизации существует много, и в результате каждого получается факторная матрица, по-своему ориентирующая координатные оси относительно конфигурации векторов. Из рис. 7.1 легко видеть, что, вращая систему координат вокруг начала отсчета, можно

получить бесконечное разнообразие проекций конфигурации векторов на оси координат, следовательно, существует бесконечно большое количество факторных матриц, отличающихся по крайней мере величинами факторных зарядов (не говоря уже о числе осей). Очевидно, чтобы избавиться от множества решений, необходимо наложить какие-то ограничения, позволяющие выбрать одно единственное решение. Это в мультифакторном анализе и достигается путем ротации.

### 7.1.1. Центроидный метод факторизации

Среди других методов центроидный метод факторизации является весьма распространенным. Он предполагает, что каждая ось соотнесения проводится через «центр тяжести» конфигурации векторов, отсюда и название метода. Смысл центроидного метода поясняется на рис. 7.2. Рассматривая окончания векторов в конфигурации как систему материальных точек, можно определить центр тяжести (центроид) этой системы (точка  $S_1$  на рис. 7.2). Тогда ось первого фактора проводится через две точки: начало конфигурации векторов (точка 0) и точку  $S_1$ .

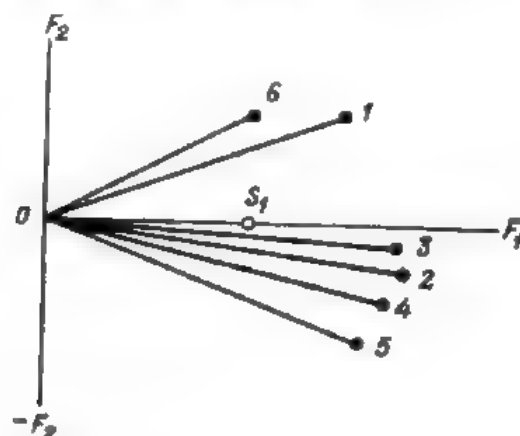


Рис. 7.2. Геометрическая интерпретация центроидного метода.  
 $S_1$  — центроид конфигурации векторов 1-6;  $F_1$  — ось первого фактора,  $F_2$  — ось второго фактора.

В случае если мы имеем дело с двумерной системой латентных переменных, в которой конфигурация векторов лежит в одной плоскости, алгебраическая сумма проекций векторов на ось второго фактора ( $F_2$  на рис. 7.2), перпендикулярную к первой и лежащую в той же плоскости, будет равна нулю. Такое положение системы координат называется центроидным. Отсюда про-



исходят специальные термины: центроидный метод, центроидные факторы, центроидная ось.

Алгоритм факторизации центроидным методом имеет циклическую структуру, в которой столько циклов (шагов), сколько общих факторов можно извлечь из корреляционной матрицы, согласно уравнению (7.6). Каждый цикл (кроме последнего) состоит из четырех этапов. Первые три по смыслу те же, что и при однофакторной модели, а четвертый обусловлен спецификой центроидного метода мультифакторной модели.

*Первый этап* — извлечение  $i$ -го фактора — осуществляется по уравнению

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_j r_{ij}, \quad (7.17)$$

где  $a_{ij}$  — заряд  $i$ -го фактора в  $j$ -й переменной;  $\sum_j r_{ij}$  — сумма коэффициентов корреляции в  $j$ -м столбце, включая запас общей изменчивости  $h_j^2$ ;  $T$  — сумма всех коэффициентов корреляции в матрице, включая запасы общей изменчивости. Для проверки вычисляют  $\sum_j a_{ij}$  и проверяют выполнение приближенного равенства  $\sum_j a_{ij} \approx \sqrt{T}$ .

Из формулы (7.17) с очевидностью следует, что исходная корреляционная матрица должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \sum_j r_{ij} &\neq 0, \\ T &> 0, \quad h_j^2 > 0 \quad \text{для всех } j. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Кроме того, необходимы точные значения запасов общей изменчивости  $h_j^2$ , которые существенно влияют на величину  $a_{ij}$ . Требования (7.18) выполнить нелегко. Во-первых, как мы видели (рис. 7.2), после извлечения каждого центроидного фактора  $\sum_j r_{ij} = 0$ . Во-вторых, даже исходная корреляционная матрица может содержать такое количество отрицательных значений  $r_{ij}$ , что  $T$  будет отрицательным. В-третьих, мы заранее не знаем точных значений  $h_j^2$ .

Чтобы выполнялись первые два условия из (7.18), к остаточной матрице всегда, а к исходной — по необходимости применяется специальное преобразование («обращение») матрицы\*. Чтобы выполнить третье условие из (7.18), надо приближенно (но как можно лучше, точнее) определить значения  $h_j^2$ . С этого обычно и приходится начинать первый этап факторизации.

\*Оно все-таки чаще применяется к остаточным матрицам, поэтому мы рассматриваем его как составляющее четвертый этап факторизации.

Для определения запаса общей изменчивости существует несколько методов. Простым и наиболее употребительным является метод наивысшей корреляции. Он состоит в том, что в качестве  $h_j^2$  принимается абсолютная величина максимального коэффициента корреляции в  $j$ -м столбце. Основанием служит тот факт, что длина вектора с наибольшим приближением определяется через его проекцию на ближайший к нему вектор. Точность метода, однако, зависит от порядка матрицы и характера распределения значений коэффициентов корреляции в столбце. Для матриц порядка более 10 этот метод считается достаточно хорошим. Метод наивысшей корреляции дает переоценку запаса общей изменчивости в столбцах с относительно большим числом низких коэффициентов корреляции и дает недооценку  $h_j^2$  в столбцах с большим числом высоких  $r_{ij}$ . В случае если значения  $(h_j^2)^*$ , вычисленные после извлечения всех общих факторов, значительно отличаются от исходных, определявшихся по методу наивысшей корреляции, процедуру факторизации повторяют заново, взяв в качестве исходных значения  $(h_j^2)^*$ . Этот процесс повторяется столько раз, сколько необходимо для «сходимости» значений  $(h_j^2)^*$  к некоторой постоянной величине (пределу), принимаемой за «истинное» значение  $h_j^2$ .

Второй этап — получение репродуцированной и остаточной матриц — выполняется так же, как и при однофакторной модели. Согласно уравнению (7.8), умножая каждый элемент факторной матрицы-столбца, вычисленной на  $y$ -м шаге, на каждый элемент ее транспозиции (матрица-строка), получают репродуцированную матрицу  $y$ -го шага. Далее поэлементно по уравнению (7.10) определяют  $y$ -ю остаточную матрицу. Важно отметить, что диагональные элементы  $(h_j^2)_y^*$  записываются отдельно, а в остаточной матрице по главной диагонали располагают опять максимальные по абсолютной величине значения остаточных коэффициентов корреляции соответствующих столбцов. Правильность вычислений проверяют приближенным выполнением равенства  $\sum_j \bar{r}_j \cong 0$  для каждого столбца остаточной матрицы. Геометрическая интерпретация остаточной матрицы дана на рис. 7.3: перенося начало отсчета в центроид  $S_1$ , получают новые значения векторов (на рисунке изображены пунктиром).

Третий этап — проверка возможности дальнейшего извлечения

\*Так как  $h_j^2$  имеет смысл дисперсии, то проверить, существенно ли или случайно отличаются величины  $h_j^2 = |r_{ij}|_{\max}$  и  $(h_j^2)^*$ , можно, используя дисперсионное отношение Фишера:  $F_{\alpha/f_1, f_2} = h_j^2 / (h_j^2)^*$  при  $h_j^2 > (h_j^2)^*$  и  $F_{\alpha/f_1, f_2} = (h_j^2)^* / h_j^2$  при  $h_j^2 < (h_j^2)^*$ ; значения  $f_1 = f_2$  равны числу скоррелированных пар.

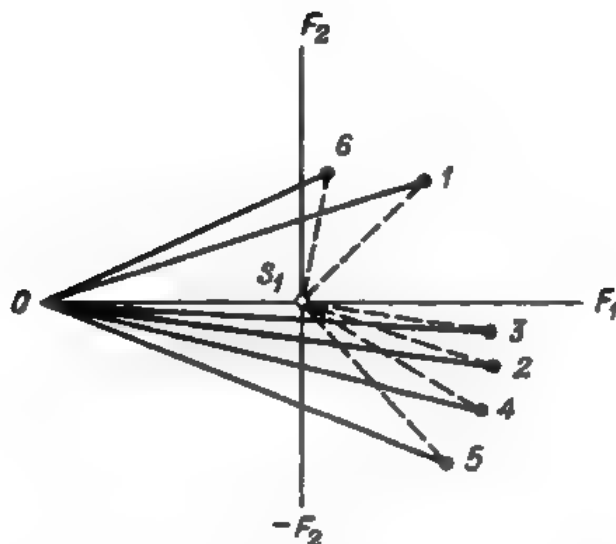


Рис. 7.3. Геометрическая интерпретация остаточной матрицы. С переносом начала отсчета из точки  $O$  в центр масс  $S_1$  изменяется длина векторов  $1-6$ , которые в новой системе отсчета обозначены пунктиром. Видно, что длины векторов уменьшаются пропорционально уменьшению их проекции на ось  $F_1$ , но при этом проекции на ось  $F_2$  не изменяются.

факторов — тоже выполняется аналогично однофакторной модели Спирмена. Здесь чаще всего используются, во-первых, уже рассмотренный критерий (7.15), причем считается, что факторизацию можно продолжать, если произведение двух максимальных факторных зарядов  $y$ -го фактора по крайней мере вдвое больше  $\sigma_r^*$ , во-вторых, специальный критерий Саундерса и, в-третьих, уравнения Терстоуна.

Использование критерия Саундерса сводится к следующему. Вычисляются три величины:

$$A = \frac{2n}{n-1} \sum_{ij} \bar{r}_{ij}^2, \quad B = \left( \frac{n-y}{n} \right)^2, \quad (7.19)$$

$$C = \frac{1}{N} \left( n - \sum_{ih} \bar{r}_{yi}^2 \right)^2,$$

\*Согласно В. Д. Небылицыну,  $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{N}}$ , но, очевидно, при  $N < 100$  лучше использовать уравнение (7.15).

где  $n$  — число переменных;  $N$  — число скоррелированных пар (объем выборки);  $y$  — количество общих факторов, выделенных за  $y$  шагов факторизации;  $\bar{r}_{ij}$  — остаточные коэффициенты корреляции после извлечения  $y$ -го фактора  $F_y$ ;  $\sum_{i,j} \bar{r}_{ij}^2$  — сумма квадратов  $\bar{r}_{ij}$  (без запасов общей изменчивости) во всей остаточной матрице;  $F_{yi}$  — факторный заряд  $y$ -го фактора в  $i$ -й переменной;  $\sum_{i,k} F_{yi}^2$  — сумма квадратов всех факторных зарядов в матрице факторов после извлечения  $y$ -го фактора. Далее проверяется условие Саундерса:

$$\begin{aligned} &\text{факторизация закончена, если } A < BC, \\ &\text{факторизацию следует продолжать, если } A > BC. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Для прекращения факторизации и для априорного определения порядка корреляционной матрицы, необходимой для извлечения  $m$  факторов, Л. Терстоуном предложены уравнения, связывающие порядок матрицы  $n$  и минимальное число общих факторов  $m$ , которое можно извлечь из матрицы порядка  $n$ :

$$\begin{aligned} n &= 0,5(2m + 1 + \sqrt{8m + 1}), \\ m &= 0,5(2n + 1 - \sqrt{8n + 1}), \end{aligned} \quad (7.21)$$

где получаемые  $n$  и  $m$  округляются до ближайшего целого значения. Для  $n \leq 15$  значения  $m$  приведены в табл. 7.12. Принято считать, что на практике лучше всегда превзойти минимальный порядок матрицы, необходимый для определения данного числа факторов.

Таблица 7.12

Значения $m$ для $n \leq 15$										
$n$	3	5	6	8	9	10	12	13	14	15
$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Рассмотренные критерии прекращения факторизации не дают, как мы покажем на примере, однозначного решения. Наиболее «жестким» является первый (правило двух стандартных отклонений). Наименее «жестким» является критерий Саундерса, он позволяет извлечь наибольшее количество факторов. Уравнения Терстоуна занимают промежуточное положение и используются чаще всего.

**Четвертый шаг — «обращение» (преобразование) остаточной матрицы, необходимое для выполнения требований (7.18).** Существуют разные методы обращения. Один из них приведен в работе В. Д. Небылицына\*. Мы на дальнейшем примере рассмотрим

\*Небылицын В. Д. Современное состояние факторного анализа // Вопросы психологии. 1960. № 4.

более простой (с точки зрения возможных ошибок) аналитический метод. Здесь важно отметить, что смысл любого из методов обращения геометрически сводится к тому, чтобы часть векторов из конфигурации остаточной матрицы, имеющих отрицательные значения проекций на ось  $y + 1$ -го ортогонального фактора, повернуть относительно  $y$ -го центроида на  $180^\circ$ . Пояснение дается на рис. 7.4. Очевидно, что в обращенной остаточной матрице для тех коэффициентов корреляции, которые соответствуют обрабатываемым векторам, знаки должны быть изменены на противоположные. Правила изменения знаков рассмотрим ниже в примере.

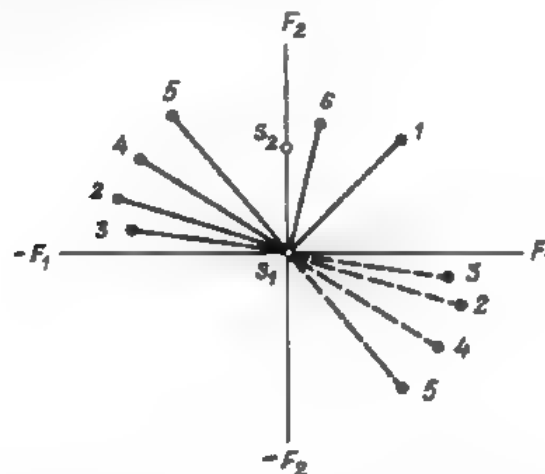


Рис. 7.4. Геометрическая интерпретация обращения остаточной матрицы.

Пунктиром изображены векторы, имеющие отрицательные проекции на ось второго фактора ( $-F_2$ ). Сплошной линией (во втором квадранте) обозначены те же векторы после обращения.  $S_2$  — новый центроид, в который будет перенесено начало отсчета после извлечения второго фактора (начала отсчета для геометрической интерпретации второй остаточной матрицы).

Циклическая процедура факторизации прекращается на третьем этапе некоторого  $y$ -го цикла, когда проверка показывает, что больше факторов извлечь нельзя. В результате получается сокращенная матрица факторов, имеющая  $y$  столбцов. Для проверки удовлетворительности факторизации необходимо, умножая окончательную сокращенную матрицу факторов на ее транспозицию, получить репродуцированную матрицу и, вычитая ее из исходной сокращенной корреляционной матрицы, найти остаточную матрицу, все элементы которой должны быть близки к нулю.

Выше указывалось, что сокращенную факторную матрицу можно рассматривать как одну из возможных реализаций факторной структуры, причем не самую лучшую. Чтобы в определенном смысле улучшить (упростить) факторную структуру, полученную центроидным (или другим) методом, вращают систему координат (или отдельные оси) относительно конфигурации векторов.

### 7.3.3. Простая латентная структура и ротация

Для определения наилучшей позиции системы координат относительно конфигурации векторов предложено немало критериев. Во-первых, можно руководствоваться тенденцией к согласованию результатов ФА с результатами, полученными другими методами. Во-вторых, можно стремиться согласовать свои результаты с результатами других исследователей, применявших ФА. В-третьих, можно стремиться к получению совокупности факторных зарядов, соответствующих каким-то общим положениям данной психологической дисциплины. В-четвертых, можно стремиться к тому, чтобы оси соотнесения проходили через центры «пучков» корреляций, если таковые имеются в конфигурации векторов. В-пятых, можно руководствоваться принципом «простой структуры», выдвинутым Л. Терстоуном.

В основе концепции «простой структуры» лежит мысль о том, что из нескольких гипотез, одинаково хорошо объясняющих факты, следует выбирать наиболее простую, требующую наименьшего числа вспомогательных гипотез. Простота латентной структуры состоит в том, что каждая переменная имеет относительно простое факторное содержание, т. е. доминирует заряд одного какого-то фактора, и наоборот: «мерой» данного фактора являются только некоторые (а не все) переменные из анализируемой совокупности. Иными словами, идея простой структуры реализуется в том, чтобы, вращая оси координат, «расщепить» общие факторы до системы групповых.

Конкретно, стремясь к простой структуре, руководствуются следующими положениями: 1) получить наибольшее возможное число максимальных по модулю факторных зарядов; 2) получить наибольшее число нулевых (близких к нулю, в пределах  $\pm\sigma$ ) факторных зарядов. Таким образом, максимум для одних факторных зарядов и минимум для других — вот критерии «простой структуры», по которым осуществляется ротация. Нетрудно видеть, что критерии противоречивы, и конкретное решение обычно требует компромисса.

Математический смысл ротации — это поворот ортогональной системы координат относительно неизменного начала отсчета на

некоторый угол  $\varphi$ . При допущении, что факторы облические, ротации подвергают отдельные оси координат.

Рассмотрим существо процедуры *ортогональной ротации*<sup>\*</sup>, которую ниже поясним на примере. Ортогональная ротация двумерной системы сводится к двум этапам. Первый — определение угла  $\varphi$ , на который следует повернуть систему координат в плоскости, для того чтобы по возможности удовлетворялись критерии «простой структуры» (при вычислениях вручную это продельвается геометрически на чертеже). Второй этап — вычисление общих значений факторных зарядов.

Геометрически эта задача решается достаточно просто и точно следующим образом. На стекло с яркой подсветкой снизу накладывается начерченная в удобном крупном масштабе на кальке конфигурация векторов. Прямоугольная система двух координатных осей, вычерченная в том же масштабе (длина оси полагается равной единице!) на миллиметровой бумаге, накладывается сверху; начало координат и начало конфигурации векторов совмещаются. Далее вращают миллиметровую бумагу, стремясь удовлетворить требованиям «простой структуры» (или каким-либо другим из рассмотренных). Найдя искомое положение осей, по миллиметровке на осях отмечают новые проекции концов всех векторов конфигурации, которые затем определяют (по миллиметровке же) в числовом виде. Эти новые проекции и образуют сокращенную факторную матрицу *после ротации*.

Аналитическая процедура вычисления факторных зарядов после поворота системы на угол  $\varphi$  сводится к умножению исходной сокращенной факторной матрицы на так называемую *матрицу поворота*<sup>\*\*</sup>. Элементами матрицы поворота являются синусы и косинусы (с учетом их знаков) из известных формул для новых координат при повороте двумерной системы против часовой стрелки:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi,\end{aligned}$$

где  $x, y$  — старые координаты ( $x$  — абсцисса,  $y$  — ордината);  $x', y'$  — новые координаты;  $\varphi$  — угол поворота против часовой стрелки.

Таким образом, матрица поворота ( $\lambda$ ) для двух факторных осей

<sup>\*</sup>Облическая ротация сложнее ортогональной не только по процедуре, но главным образом по интерпретации получаемых факторных зарядов.

<sup>\*\*</sup>П. С. Александров называет эту матрицу «матрицей преобразования координат», что шире, так как понятие преобразования включает в себя и перевод (Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., 1968. С. 191).

( $x$  и  $y$ ) имеет вид\*

$$\lambda' = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (7.22)$$

Зная  $\varphi$ , элементы матрицы (7.22) легко определить по таблицам тригонометрических функций.

При количестве осей в системе координат более двух элементы матрицы поворота вычисляются следующим образом. Сначала записывается матрица «нулевого» поворота ( $\lambda_0$ )—это единичная матрица\*\*, порядок которой равен числу факторов ( $m$ ). Например, для пяти факторов

$$\lambda_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Пусть факторные оси нумеруются слева направо и сверху вниз:  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  и требуется повернуть пару осей  $i, k$  (где  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , но  $i \neq k$ ) на угол  $\varphi_j$ , где  $j$ —номер последовательно осуществляемых поворотов ( $j = 1, 2, \dots, (m-1)$ ). Тогда, удаляя из матрицы  $\lambda_0$  все строки и столбцы, кроме соответствующих осям  $i$  и  $k$ , получаем подматрицу  $\lambda_0^{(i,k)}$ . Это тоже единичная матрица:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  Умножая ее на матрицу поворота осей  $\lambda$  (7.22) (от чего  $\lambda$  не изменится) и дополняя  $\lambda$  удаленными ранее из  $\lambda_0$  столбцами и строками, получаем матрицу  $j$ -го поворота осей  $i, k$  ( $\lambda_j^{(i,k)}$ ).

Например, желая повернуть оси 2 и 4, находим подматрицу

$$\lambda_0^{(2,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и, умножая ее на матрицу  $\lambda$ , получаем

$$\lambda_0^{(2,4)} \lambda = \begin{vmatrix} \cos \varphi_j & \sin \varphi_j \\ -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{vmatrix}.$$

\*При повороте на отрицательный угол (по часовой стрелке) матрица поворота транспонируется:

$$\lambda' = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

\*\*Элементами матрицы поворота являются так называемые направляющие косинусы, характеризующие положение системы координат. Для каждой оси в  $m$ -мерной системе этих косинусов  $m$ . При нулевом повороте (угол поворота  $0^\circ$ ) косинус угла со своей осью равен единице, а со всеми другими (в прямоугольных координатах)—нулю.



Дополняя произведение удаленными ранее строками и столбцами матрицы  $\lambda_0$ , окончательно получаем матрицу поворота осей 2 и 4:

$$\lambda_j^{(2,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_j & 0 & \sin \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_j & 0 & \cos \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Аналогичным путем получаем матрицу  $l$ -го поворота двух других осей, например 3 и 5:

$$\lambda_l^{(3,5)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_l & 0 & \sin \varphi_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_l & 0 & \cos \varphi_l \end{vmatrix}$$

Допустим,  $l = j + 1$ , т.е. повороты осуществляются последовательно, сначала  $j$ -й, а потом  $l$ -й. Используя ассоциативность умножения матриц, можем сразу осуществить оба указанных поворота. При этом матрица совместного поворота двух пар осей определяется умножением слева матрицы  $\lambda_j^{(2,4)}$  на матрицу  $\lambda_l^{(3,5)}$

$$\lambda_{(j \wedge l)}^{(2,4 \wedge 3,5)} = \lambda_j^{(2,4)} \lambda_l^{(3,5)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_j & 0 & \sin \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_l & 0 & \sin \varphi_l \\ 0 & -\sin \varphi_j & 0 & \cos \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_l & 0 & \cos \varphi_l \end{vmatrix}.$$

где  $\varphi_j$  и  $\varphi_l$  — углы  $j$ -го и  $l$ -го поворотов. Если бы потребовалось последовательно осуществить еще один поворот, для которого получена матрица  $\lambda_i^{(i,k)}$ , то новая матрица совместного поворота определялась бы произведением слева:

$$\lambda_{(j \wedge l \wedge i)}^{(2,4 \wedge 3,5 \wedge i,k)} = \lambda_{(j \wedge l)}^{(2,4 \wedge 3,5)} \lambda_i^{(i,k)}$$

В случае  $m$ -мерной системы ортогональная ротация сводится к попарному вращению осей; число возможных последовательных вращений  $(m - 1)$ . Важно отметить, что практически при  $m > 5$  осуществление ротации вручную затруднительно и следует использовать ЭВМ.

После ротации вновь осуществляется проверка: умножая факторную матрицу после ротации на ее транспонированную, определяют репродуцированную матрицу и сравнивают ее как с исходной, так и с репродуцированной матрицей до ротации.

### 1.3.1. Пример мультифакторного анализа с ортогональной ротацией

Для иллюстрации мультифакторного анализа рассмотрим конкретный числовой пример, полученный в реальном исследовании, в котором батарея из шести тестов применялась к группе учащихся профессиональной школы\*. В результате попарного коррелирования оценок по тестам (1-й методический вариант ФА) получена сокращенная корреляционная матрица, приведенная в табл. 7.13

Таблица 7.13

Исходная сокращенная матрица корреляций и результаты вычисления зарядов первого центроидного фактора

Переменные	1	2	3	4	5	6	$\Sigma, r_j$
1	0,400	0,298	0,400	0,297	0,116	0,232	1,744
2	0,298	0,568	0,568	0,534	0,432	0,154	2,555
3	0,400	0,568	0,568	0,487	0,436	0,071	2,530
4	0,297	0,534	0,487	0,545	0,545	0,092	2,500
5	0,116	0,432	0,436	0,545	0,545	0,016	2,058
6	0,232	0,154	0,071	0,092	0,016	0,232	0,765
$\Sigma, r_j$	1,744	2,555	2,530	2,500	2,058	0,765	$T =$
$a_{1j}$	0,500	0,733	0,726	0,717	0,590	0,219	$= 12,152$

$$\sqrt{T} = 3,486; \Sigma_j a_{1j} = 3,485$$

Так как все коэффициенты корреляции в исходной матрице положительные, можем непосредственно приступить к вычислению первого центроидного фактора. Для этого сначала заполним главную диагональ значениями запасов общей изменчивости, в качестве которых выберем в каждом столбце максимальное значение коэффициента корреляции (как это сделано в табл. 7.13). Заряды первого центроидного фактора, вычисленного согласно уравнению 7.17, а также необходимые для проверки (равенство сумм по строкам и столбцам и равенство  $\Sigma_j a_{1j} \approx \sqrt{T}$ ) значения приведены тоже в табл. 7.13.

Умножая матрицу-столбец полученных факторных зарядов на ее транспозицию, определяем первую репродуцированную матрицу, она приведена в табл. 7.14. Вычитая поэлементно первую ре-

\*Замыслован из кн.: Okón J. Analiza czynnikowa w psychologii. Warszawa, 1960.

продуцированную матрицу из исходной корреляционной матрицы, определим первую остаточную матрицу, она приведена в табл. 7.15. Суммируя по столбцам, убеждаемся в том, что центрирование выполнено безошибочно. суммы на порядок меньше значений остаточных коэффициентов корреляции, т. е. практически равны нулю. Геометрическая интерпретация полученной остаточной матрицы как раз была дана на рис. 7.3.

Таблица 7.14

Первая репродуцированная матрица

$j$	1	2	3	4	5	6
$a_{1j}$	0,500	0,733	0,726	0,717	0,590	0,219
1	0,500	0,250	0,386	0,363	0,295	0,110
2	0,733	0,386	0,537	0,532	0,432	0,160
3	0,726	0,363	0,532	0,527	0,428	0,159
4	0,717	0,358	0,526	0,520	0,421	0,157
5	0,590	0,295	0,432	0,428	0,423	0,129
6	0,219	0,110	0,160	0,159	0,129	0,048

Таблица 7.15

Первая остаточная корреляционная матрица

$j$	1	2	3	4	5	6
1	(0,150)	-0,067	0,037	-0,061	-0,179	0,123
2	-0,067	(0,031)	0,036	0,009	0,000	-0,006
3	0,037	0,036	(0,041)	-0,033	0,008	-0,088
4	-0,061	0,009	-0,033	(0,031)	0,122	-0,065
5	-0,179	0,000	0,008	0,122	(0,197)	-0,145
6	0,123	-0,006	0,088	0,065	-0,145	(0,185)
$\sum_j \bar{r}_j$	0,003	0,003	0,001	0,003	0,003	0,004

Теперь следует убедиться, можно ли продолжать факторизацию. Прежде всего, пользуясь табл. 7.12, устанавливаем, что из корреляционной матрицы порядка 6 можно извлечь три общих фактора. Однако с целью демонстрации применим также критерий «стандартного отклонения» и критерий Саундерса.

Число коррелировавшихся пар  $N = 133$ , поэтому  $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{133}} \approx \frac{1}{11,5} \approx 0,087$ . Можно видеть, что несколько остаточных коэффициентов корреляции из табл. 7.15 по модулю превосходят  $2\sigma_r = 0,174$ .

Применим критерий Саундерса. По формулам (7.19) вычисляем

$$A = \frac{2 \cdot 6}{6-1} 0,213 = 2,4 \cdot 0,213 \cong 0,511,$$

$$B = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cong 0,694,$$

$$C = \frac{1}{133}(6-2,26)^2 \cong \frac{13,988}{133} \cong 0,105,$$

$$BC \cong 0,073 \ll A \cong 0,511,$$

т. е., следуя правилу (7.20), факторизацию надо продолжить. Но для этого необходимо обеспечить выполнение условий (7.18) и преобразовать первую остаточную матрицу для получения положительных сумм по столбцам.

Наиболее простой алгоритм преобразования (обращения) состоит в следующем.

1. Вычисляем алгебраические суммы всех столбцов, не учитывая запасы общей изменчивости; эти суммы записываем в строке  $S$  табл. 7.16.

2. Заполняем строку  $-0,5S$ .

3. В строке  $-0,5S$  находим наибольшую положительную величину\*. Соответствующий этой величине столбец будет обращен в первую очередь. Это столбец переменной  $5$ , обозначим его звездочкой.

4. Обозначая звездочкой строку переменной  $5$ , складываем ее со строкой  $-0,5S$ , не учитывая значения  $h_5^2$ . Результаты записываем в строку  $+5^*$ . Коэффициент, лежащий на пересечении  $+5^*$ -й строки и столбца  $5^*$ , подчеркиваем прямой линией, слева от этого числа проводим вниз прямую линию, как показано в табл. 7.16.

5. В полученной строке  $+5^*$  снова находим наибольшее положительное значение. Для соответствующего столбца и строки выполняем предписание предыдущего пункта 4. В результате получаем строку  $+4^*$  табл. 7.16.

6. В полученной строке  $(+4^*)$  снова находим наибольшее положительное значение (при этом значения, лежащие в уже обращенных столбцах, обозначенных прямыми линиями, не учитываются) и для него повторим предписание пункта 4.

7. Сложение строк, согласно пункту 4, повторяется до тех пор, пока в последней строке не получим большинство отрицательных величин (не считая уже обращенных столбцов). Эту последнюю строку обозначим  $B$ .

\*Ошибки не будет, если вместо наибольшей выбрать одну из больших положительных величин (см. табл. 7.17, строка  $+3^*$ ).

Таблица 7.16

## Преобразование первой остаточной корреляционной матрицы

Пере- менные	1	2*	3*	4*	5*	6
1	0,179 (0,150)	(+) -0,087	(-) 0,037	(+) -0,061	(+) -0,179	0,123
2*	(+) -0,067	0,067 (0,031)	0,036	0,009	0,000	(+) -0,006
3*	(-) 0,037	0,036	0,088 (0,041)	-0,033	0,008	(+) -0,088
4*	(+) -0,061	0,009	-0,033	0,122 (0,031)	0,122	(+) -0,065
5*	(+) -0,179	0,000	0,008	0,122	0,179 (0,197)	(+) -0,145
6	0,123	(+) -0,006	(+) -0,088	(+) -0,065	(+) -0,145	0,145 (0,185)
S	-0,147	-0,028	-0,040	-0,028	-0,194	-0,181
-0,53	0,0735	0,0140	0,0200	0,0140	0,0970	0,0905
+3*	-0,1055	0,0140	0,0280	0,1360	0,0970	-0,0545
+4*	-0,1665	0,0230	-0,0050	0,1360	0,2190	-0,1195
+2*	-0,2335	0,0230	+0,0310	0,1450	0,2190	-0,1255
+3* = B	-0,1965	0,0590	0,0310	0,1120	0,2270	-0,2135
-2B	0,393	(-)0,118	(-)0,062	(-)0,224	(-)0,454	0,427
2B  + k <sup>2</sup>	0,572	0,185	0,150	0,346	0,633	0,572

Примечание. S — суммы по столбцам без запасов общей изменчивости; B — последняя из обращенных строк, она содержит накопленные суммы (S).

8. Удваиваем все элементы строки B и изменяем их знаки на противоположные. Результаты записываем в строку -2B. Это суммы столбцов после обращения переменных. Отрицательные знаки заключаем в скобки, как показано в табл. 7.16.

9. Вычерчиваем (или заключаем в скобки, как это сделано в табл. 7.15 и 7.16) остаточные запасы общей изменчивости и над ними записываем новые значения, определенные из числа остаточных коэффициентов корреляции соответствующих столбцов по методу наивысшей корреляции.

10. Изменяем алгебраические знаки в матрице остаточных коэффициентов корреляции в соответствии с преобразованиями:

— изменяем на противоположные знаки всех коэффициентов в преобразованных строках, за исключением лежащих на пересечении с преобразованными столбцами;

—изменяем на противоположные знаки всех коэффициентов в преобразованных столбцах, за исключением лежащих одновременно в преобразованных строках.

В табл. 7.16 измененные знаки записаны сверху в скобках. Значения остаточных коэффициентов корреляции с измененными знаками и новые запасы общей изменчивости образуют преобразованную (обращенную) остаточную корреляционную матрицу.

11. Складывая абсолютные значения  $|2B|$ \* и новые запасы общей изменчивости  $h_j^2$ , получаем суммы  $\sum_j r_j$ , необходимые для вычисления зарядов второго фактора по уравнению (7.17). Для проверки правильности вычислений эти же суммы получаем, непосредственно суммируя по столбцам преобразованную остаточную корреляционную матрицу.

Вычислив факторные заряды, необходимо определить их знаки. Для этого имеется общее правило. Знак факторного заряда  $y$ -го фактора  $i$ -й переменной, которая не была преобразована или была преобразована четное число раз, сохраняется таким, каким он был для заряда первого фактора этой переменной. Знак факторного заряда переменной, преобразованной нечетное число раз, изменяется на противоположный по сравнению со знаком заряда первого фактора\*\*.

В нашем примере переменные 2–5 были преобразованы нечетное число (один) раз, а переменные 1 и 6 — не преобразованы. Поскольку все заряды первого фактора были положительны, заряды второго фактора у переменных 1 и 6 сохраняют положительные знаки, а у переменных 2–5 получают отрицательные знаки (см. табл. 7.18).

Дальнейшая процедура факторизации состоит в вычислении второй репродуцированной матрицы, которая получается умножением столбца модулей зарядов второго фактора на его транспозицию (аналогично табл. 7.14). Затем вторая репродуцированная матрица вычитается из преобразованной первой остаточной матрицы, в результате получается вторая остаточная матрица, приведенная в табл. 7.17. Она преобразуется точно так же, как и первая остаточная матрица. Вычисляя по второй преобразованной остаточной матрице факторные заряды третьего фактора и применяя правило знаков, получим последний, третий столбец сокращенной факторной матрицы (табл. 7.18). Далее, снова умно-

\*Геометрический смысл этих абсолютных значений, а также преобразованной остаточной матрицы seen на рис. 7.4.

\*\*Относительно знака заряда предыдущего ( $y - 1$ -го) фактора знак заряда  $y$ -го фактора  $i$ -й переменной не изменяется, если переменная не была преобразована, или изменяется на противоположный, если переменная была преобразована на  $y$ -м шаге факторизации.

Таблица 7.17

Вторая остаточная матрица корреляций и ее преобразование

Переменные	1	2*	3*	4	5	6*
		(-)	(+)			(+)
1	<u>0,072</u>	0,024	-0,072	-0,019	0,032	-0,010
2*	(-)			(+)	(+)	
	0,024	<u>0,047</u>	0,026	-0,016	-0,047	-0,037
3*	(+)			(+)	(+)	
	-0,072	0,025	<u>0,072</u>	-0,054	-0,030	0,054
4	-0,019	(+)	(+)			(+)
		-0,016	-0,054	<u>0,054</u>	0,033	-0,015
5	0,032	(+)	(+)			(+)
		-0,047	-0,030	0,033	<u>0,047</u>	-0,002
6*	(+)			(+)	(+)	
	-0,010	-0,037	0,054	-0,015	-0,002	<u>0,054</u>
S	-0,045	-0,051	-0,077	-0,071	-0,014	-0,010
-0,5S	0,0225	0,0225	0,0385	0,0355	0,0070	0,0050
+3*	-0,0495	0,0505	0,0385	-0,0185	-0,0230	0,0590
+2*	-0,0255	0,0505	0,0635	-0,0345	-0,0700	0,0220
+6* = B	-0,0355	0,0135	0,1175	-0,0495	-0,0720	0,0220
-2B	0,071	(-)0,027	(-)0,235	0,099	0,144	(-)0,044
2B  + h <sub>j</sub> <sup>2</sup>	0,143	0,074	0,307	0,153	0,191	0,098

Примечание. Запасы общей изменчивости (подчеркнуты дважды) получены по методу наименьшей корреляции.

Таблица 7.18

Факторная матрица после вычисления зарядов второго и третьего факторов

Переменные	Факторы		
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>
1	0,500	0,365	0,145
2	0,733	-0,118	0,075
3	0,726	-0,095	0,312
4	0,717	-0,220	-0,155
5	0,590	-0,404	-0,194
6	0,219	0,365	-0,099

жая столбец модулей зарядов третьего фактора на его транспонированную, получаем третью репродуцированную корреляционную матрицу, вычитая которую из второй преобразованной остаточной матрицы, получаем третью остаточную матрицу, представленную в табл. 7.19.

Таблица 7.19

Третья остаточная корреляционная матрица

Переменные	1	2	3	4	5	6
1	0,051	-0,035	0,027	-0,041	0,004	-0,004
2	-0,035	0,041	0,001	0,004	0,032	-0,044
3	0,027	0,001	-0,025	0,005	-0,030	0,023
4	-0,041	0,004	0,005	0,030	0,002	0,000
5	0,004	0,032	-0,030	0,002	0,009	-0,017
6	-0,004	-0,044	0,023	0,000	-0,017	0,044
Суммы	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,002

Согласно уравнениям Терстоуна (7.21), исходная корреляционная матрица шести переменных позволяет извлечь только три значимых фактора. Прекращая на этом основании факторизацию в данном примере, отметим следующее. По правилу двух стандартных отклонений факторизацию следовало прекратить после извлечения второго фактора. Действительно,  $2\sigma_r = 0,174$ , как показано выше, а во второй остаточной корреляционной матрице нет ни одного элемента такой абсолютной величины. С другой стороны, учитывая критерий Саундерса, нам следовало бы продолжить факторизацию, извлекая четвертый фактор. Действительно, пользуясь третьей остаточной и факторной матрицами (табл. 7.18 и 7.19), вычисляем

$$A = \frac{12}{5} 0,0168 = 2,4 \cdot 0,0168 \cong 0,04;$$

$$B = \left( \frac{6-3}{6} \right)^2 = 0,25;$$

$$C = \frac{1}{133} (6 - 2,96)^2 \cong \frac{9,242}{133} \cong 0,069;$$

$$BC = 0,25 \cdot 0,069 \cong 0,017 < A \cong 0,04,$$

т. е. надо продолжать факторизацию. Таким образом, уравнения Терстоуна на самом деле дают промежуточное значение числа шагов факторизации.

Закончив процесс факторизации, необходимо, умножив сокращенную факторную матрицу (табл. 7.18) на ее транспонированную, получить репродуцированную матрицу, сложить ее с последней (третьей) остаточной матрицей (табл. 7.19) и результат вычесть из исходной корреляционной матрицы (табл. 7.13). Таким путем определяется матрица погрешностей, элементы которой не должны превышать нескольких тысячных долей. Часто используют сокращенный метод проверки, которым мы воспользуемся после ротации.



Осуществим ортогональную ротацию системы соотнесения нашего примера, добиваясь выполнения требований «простой структуры».

Прежде всего определим проекции факторной структуры на три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых лежат пары осей  $F_1F_2$ ,  $F_2F_3$  и  $F_1F_3$ . При этом конец вектора каждой переменной будет изображен точкой: в плоскости  $F_1, F_2$  — с координатами  $(a_{1j}, a_{2j})$ ; в плоскости  $F_2, F_3$  — с координатами  $(a_{2j}, a_{3j})$ ; в плоскости  $F_1, F_3$  — с координатами  $(a_{1j}, a_{3j})$ , где координаты  $(a_{ij}, a_{kj})$  — это пары зарядов  $i$ -го и  $k$ -го факторов из сокращенной факторной матрицы (табл. 7.18). Указанные проекции представлены на рис. 7.5.

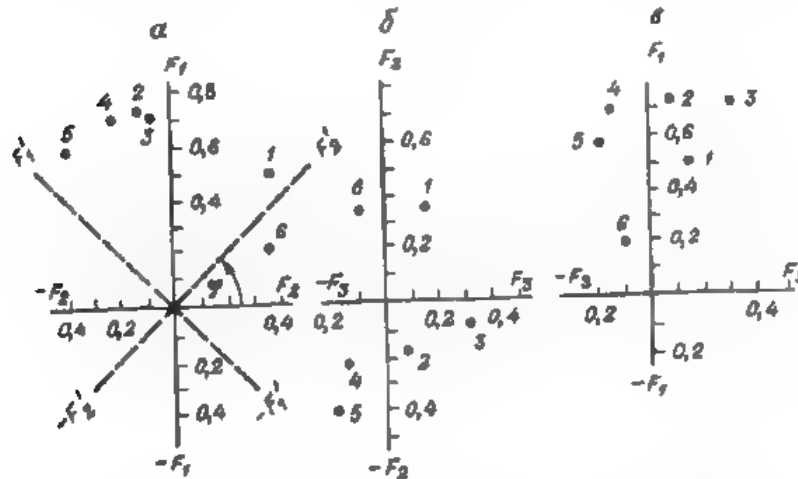


Рис. 7.5. Три проекции факторной структуры (согласно табл. 7.18).

а — для факторов  $F_1$  и  $F_2$ ; б — для  $F_2$  и  $F_3$ ; в — для  $F_1$  и  $F_3$ . Точками обозначены проекции концов векторов соответствующих переменных. Пунктиром показано положение осей  $F_1$  и  $F_2$  после поворота на угол  $\psi = 45^\circ$ , удовлетворяющего (в первом приближении) требованиям «простой структуры».

Рассматривая эти проекции, нельзя обнаружить ничего определенного в смысле требований «простой структуры» по Терстоуну. Но если повернуть систему осей  $F_1, F_2$  на угол  $45^\circ$  против часовой стрелки (рис. 7.5, а), то можно видеть следующее. Заряды первого фактора у переменных 2-5 сохраняются на высоком уровне, а заряды этого фактора у переменных 1 и 6 приближаются к нулю. Заряды второго фактора становятся положительными

ми и увеличиваются для всех переменных, кроме пятой, у которой заряд приближается к нулевому. Таким образом, требования «простой структуры» в определенной мере выполняются. Здесь необходимо подчеркнуть, что практически эти требования всегда выполняются только в приближенной степени. Возможно, что несколько лучший результат получился бы при повороте не на  $45^\circ$ , а на угол  $30^\circ 58'$ : тогда ось  $F'_1$  проходила бы почти через точку 5-й переменной, а ось  $F'_2$  — через точку 6-й переменной, т. е. веса двух факторных зарядов стали бы нулевыми, а веса большинства других еще несколько увеличились бы. Однако невозможно «на глазок» определить «наилучший» угол, такой, чтобы требования «простой структуры» выполнялись в строго количественном смысле. Для этого необходим последовательный процесс вращений с поиском двух экстремумов на основе вычисления значений критериев «простой структуры», что даже в простейшем случае двух факторов является сложной задачей, требующей значительного числа переборов\*. Поэтому мы ограничимся приближением, которое достигается поворотом на  $45^\circ$ , достаточным для целей примера

Теперь остается получить числовые значения факторных зарядов по первым двум факторам после ротации (очевидно, что заряды третьего фактора не изменятся, так как система осей  $F_1$  и  $F_2$  вращалась вокруг неподвижной оси  $F_3$ ). Воспользуемся аналитическим методом, для чего определим матрицу поворота системы осей  $F_1$  и  $F_2$ .

Матрица нулевого поворота в нашем примере имеет порядок 3. Удаляя из матрицы  $\lambda_0$  столбец и строку  $F_3$  (эта ось не вращается), получаем подматрицу

$$\lambda_0^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_0 = \begin{array}{c|ccc} & F_1 & F_2 & F_3 \\ \hline F_1 & 1 & 0 & 0 \\ F_2 & 0 & 1 & 0 \\ F_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

умножал которую на матрицу поворота осей  $\lambda$  (7.22) и добавляя обратно строку и столбец  $F_3$ , получаем матрицу первого поворота

\*Эту задачу успешно может решить ЭВМ

осей  $F_1$  и  $F_2$  с элементами  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,71$ :

$$\lambda_1^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 0,71 & 0,71 & 0 \\ -0,71 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить значения факторных зарядов после первой ротации (поворота), умножаем сокращенную факторную матрицу «не вращавшихся» факторов (табл. 7.18, обозначим ее  $V_0$ ) на матрицу первого поворота  $\lambda_1^{(1,2)}$ :

$$V_1 = V_0 \lambda_1^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 0,500 & 0,365 & 0,145 \\ 0,733 & -0,118 & 0,075 \\ 0,726 & -0,095 & 0,312 \\ 0,717 & -0,220 & -0,155 \\ 0,590 & -0,404 & -0,194 \\ 0,219 & 0,365 & -0,099 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,71 & 0,71 & 0 \\ -0,71 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,096 & 0,614 & 0,145 \\ 0,604 & 0,436 & 0,075 \\ 0,582 & 0,448 & 0,312 \\ 0,655 & 0,353 & -0,155 \\ 0,705 & 0,132 & -0,194 \\ -0,104 & 0,414 & -0,099 \end{vmatrix},$$

где  $V_1$  — сокращенная факторная матрица после первой ротации, в которой столбцы (слева направо) соответствуют факторам  $F_1$ – $F_3$ , а строки (сверху вниз) — переменным 1–6. Проекция факторной структуры, соответствующей матрице  $V_1$ , приведены на рис. 7.6 (они получены тем же путем, что и проекции на рис. 7.5).

Система из трех факторов позволяет выполнить еще одну ротацию, благодаря которой «простая структура» может быть улучшена. Рассматривая рис. 7.6, б, можно видеть, что, повернув систему осей  $F'_2$  и  $F'_3$  так, чтобы они проходили через точки 5 и 3, мы получили бы два нулевых факторных заряда, а остальные — максимально большие и положительные. Для этого нужен поворот на угол  $\varphi \cong 54^\circ 30'$ . Мы, однако, для упрощения вычислений в примере осуществим поворот снова на  $45^\circ$ , как показано на рис. 7.6, б; этого достаточно в первом приближении к «простой структуре».

Необходимо определить матрицу второго поворота осей  $F_2$  и  $F_3$ . Для этого из матрицы  $\lambda_0$  удаляем строку и столбец оси  $F_1$ , которая не вращается, и получаем подматрицу

$$\lambda_0^{(2,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

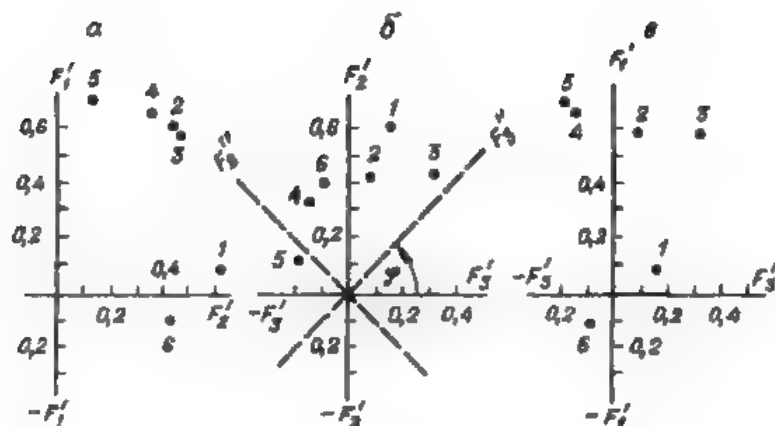


Рис. 7.6. Три проекции факторной структуры после первой ротации (согласно матрице  $V_1$ ).

а — для факторов  $F_1'$  и  $F_2'$ ; б — для  $F_2'$  и  $F_3'$ ; в — для  $F_1'$  и  $F_3'$ . Точки — проекции концов векторов переменных. Пунктиром показано новое положение осей  $F_2'$  и  $F_3'$  после поворота на угол  $\varphi = 45^\circ$ , в первом приближении удовлетворяющего требованиям «простой структуры».

Умножая ее на  $\lambda$  (7.22) и добавляя удаленную строку и столбец  $F_1$ , получаем матрицу второго поворота, элементы которой  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,71$ :

$$\lambda_2^{(2,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,71 \\ 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix}.$$

Теперь можно получить значения факторных зарядов после второй ротации двумя путями: либо  $V_1 \lambda_2^{(2,3)}$ , либо  $V_0(\lambda_1^{(1,2)} \lambda_2^{(2,3)})$ . Второй путь приводит к меньшим ошибкам, поэтому определим матрицу совместного поворота осей 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} \lambda_{(1 \wedge 2)}^{(1,2 \wedge 3)} &= \lambda_1^{(1,2)} \lambda_2^{(2,3)} = \begin{vmatrix} 0,71 & 0,71 & 0 \\ -0,71 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,71 \\ 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0,71 & 0,50 & 0,50 \\ -0,71 & 0,50 & 0,50 \\ 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

а затем умножим на нее исходную сокращенную факторную матрицу

$$V_2 = V_0 \lambda_{(1 \wedge 2)}^{(1,2 \wedge 2,3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,500 & 0,365 & 0,145 \\ 0,733 & -0,118 & 0,075 \\ 0,726 & -0,095 & 0,312 \\ 0,717 & -0,220 & -0,155 \\ 0,590 & -0,404 & -0,194 \\ 0,219 & 0,365 & -0,099 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,71 & 0,50 & 0,50 \\ -0,71 & 0,50 & 0,50 \\ 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,096 & 0,329 & 0,535 \\ 0,604 & 0,254 & 0,360 \\ 0,582 & 0,095 & 0,537 \\ 0,655 & 0,358 & 0,138 \\ 0,705 & 0,230 & -0,044 \\ -0,104 & 0,361 & 0,221 \end{vmatrix},$$

где  $V_2$  — сокращенная факторная матрица после двух ротаций (переменные — по строкам, сверху вниз, факторы — по столбцам, слева направо). Геометрическая интерпретация факторной структуры согласно матрице  $V_2$  представлена на рис. 7.7. Можно видеть, что требования «простой структуры» приблизительно выполняются.

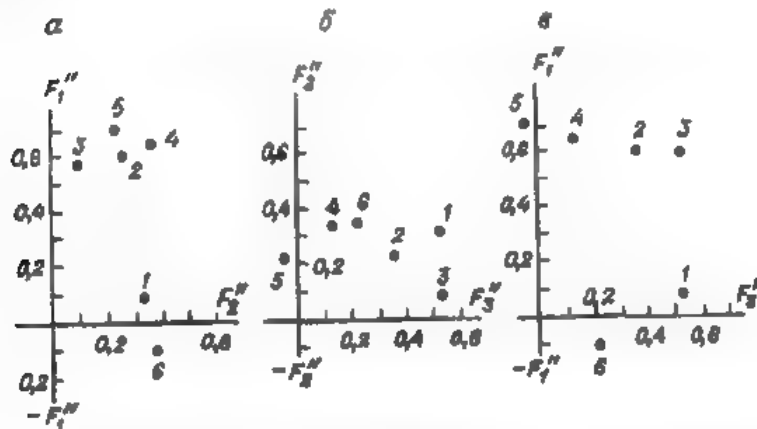


Рис. 7.7. Три проекции факторной структуры после двух ротаций (согласно матрице  $V_2$ ).

а — для факторов  $F_1''$  и  $F_2''$ ; б — для  $F_2''$  и  $F_3''$ ; в — для  $F_1''$  и  $F_3''$ . Точки — проекции концов векторов переменных.

Теперь остается проверить результаты вращения. Проверка осуществляется следующим образом. Во-первых, необходимо вычислить запасы общей изменчивости по матрице  $V_2$  и сравнить их с полученными по матрице  $V_0$ . Это сделано в табл. 7.20. Можно видеть, что расхождения незначительны, следовательно, процесс ротации искажений не внес. Во-вторых, необходимо вычислить по уравнению (7.5) на основе матрицы  $V_2$  репродуцированные коэффициенты корреляции и прибавить к ним соответствующие элементы из третьей остаточной матрицы (табл. 7.19), а затем сравнить с исходными коэффициентами корреляции (табл. 7.13). При сокращенном методе проверки, как отмечалось, вычисляют не все коэффициенты, а только выборочно —  $m$  пар, как показано в табл. 7.21. Так как при факторизации векторы некоторых переменных были подвергнуты обращению, то это необходимо учесть при суммировании остатков  $f_{ij}$ . Здесь используется следующее правило: если сумма обращений  $i$ -й и  $j$ -й переменных четная, то знак остатка из третьей остаточной матрицы не изменяется; если сумма обращений переменных нечетная, то знак остатка изменяется на противоположный (см. табл. 7.21).

Таблица 7.20

Сравнение запасов общей изменчивости, вычисленных по разным матрицам

j	$\lambda_j^2$		Расхождение
	вычисленные по $V_2$	вычисленные по $V_0$	
1	0,403	0,404	0,001
2	0,557	0,556	0,001
3	0,635	0,633	0,002
4	0,589	0,586	0,003
5	0,552	0,548	0,004
6	0,188	0,189	0,001

Вычислительная процедура мультифакторного анализа заканчивается проверкой. Далее необходима содержательная интерпретация выявленной латентной структуры, которая (как неоднократно указывалось) выходит за рамки математической статистики. Тем не менее следует обратить внимание психологов, начинающих применять факторный анализ, что путь для содержательной интерпретации факторов — это обобщение смысла переменных,

Выборочная проверка исходных коэффициентов корреляции на основе матрицы факторов  $V_2$ 

Пары переменных $i$ и $j$	$r_{ij}^*$	$\bar{r}_{ij}$ в третьей остаточной матрице	Сумма обращений переменных $i$ и $j$	Новый знак $\bar{r}_{ij}$	$r_{ij}^* + \bar{r}_{ij}$	Исходный $r_{ij}$	Расхождение
1 и 2	0,334	-0,035	Четная (3)	-	0,299	0,299	0,000
2 и 3	0,569	0,001	Четная (4)	+	0,570	0,568	0,002
3 и 4	0,495	0,005	Нечетная (3)	-	0,490	0,487	0,003
4 и 5	0,545	0,002	Четная (2)	+	0,547	0,545	0,002
5 и 6	0,000	-0,017	Четная (2)	-	-0,017	0,016	0,001
1 и 6	0,227	-0,004	Нечетная (1)	+	0,231	0,232	0,001

имеющих высокие нагрузки по факторам. Общий смысл объясняемых переменных отражается в названии факторов (общий, вербальный и невербальный интеллект, экстра—интроверсия и нейротизм; аффектотимия, шизотимия, сила—слабость Я и т. д.). В свою очередь, латентная структура интерпретируется путем обобщения смыслов образующих ее факторов (интеллект, личность и др.)\*.

\*Примеры интерпретации факторной структуры можно найти в работах: Теплов В.М. Простейшие способы факторного анализа // Типологические особенности высшей нервной деятельности человека. Т. V. М., 1967; Небылицын В.Д. Современное состояние факторного анализа // Вопросы психологии. 1960. № 4; Докторов В.З. Сравнение рабочих характеристик различных методов факторного анализа при комплексном изучении человека // Человек и общество. Вып. IV. Л., 1969; Веспалько И.Г. О некоторых неясных вопросах психологической интерпретации факторов в факторном анализе // Психологический журнал. 1997. № 3.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1 ПОЛЕЗНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ И ДЕЙСТВИЯХ С НИМИ

**Матрицей** называется математическая таблица, в виде которой записано множество данных. Например, это матрица

$$A(XYZ) = \begin{array}{c|cc|cc|cc} & \begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \end{array} & \begin{array}{c|c} y_1 & y_2 \end{array} & \begin{array}{c|c} z_1 & z_2 \end{array} & \begin{array}{c|c} y_1 & y_2 \end{array} & \begin{array}{c|c} z_1 & z_2 \end{array} \\ \hline x_1 & a_{111} & a_{112} & a_{121} & a_{122} & a_{131} & a_{132} \\ \hline x_2 & a_{211} & a_{212} & a_{221} & a_{222} & a_{231} & a_{232} \end{array}$$

где качественные характеристики данных обозначены подходящими символами (пометками) в *головке* и *боковке*, которые образуют *шапку* матрицы, а количественные (числовые, функциональные или другие) характеристики размещены в *теле* матрицы, на пересечениях строк и столбцов, так что однозначно соотносятся с пометками.

Матрица  $A(XYZ)$  — это *трехмерная помеченная матрица* размера  $(2 \times 2 \times 3)$ . Число разных групп событий либо величин, функций, других математических объектов определяет *мерность* (размерность) матрицы. Так, матрицы  $A(A)$ ,  $A(AB)$ , ...,  $A(ABC)$ , ...,  $A(W)$ , которые содержат одну, две, ...,  $N$  групп событий, являются соответственно *одномерной*, *двумерной*, ...,  *$N$ -мерной* матрицами. Количество градаций (или значений) в каждой группе событий (или величин, функций) определяет *размер* матрицы по этой группе или величине, а все вместе размеры записываются в *формулу* размера:  $(1 \times n)$  — для одномерной матрицы-строки,  $(n_1 \times n_2)$  — для двумерной матрицы,  $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N)$  — для  $N$ -мерной матрицы. Эти формулы определяют общее число элементов в теле матрицы.

В большинстве математических работ по так называемой *линейной алгебре*, где с помощью матриц записываются коэффициенты системы *линейных уравнений*, пометки не используются. Вместо них только подразумеваются порядковые номера строк и столбцов, отображаемые индексами при элементах матриц. Например, такова *двумерная непомеченная матрица* в виде *прямоугольной*



таблицы размером  $(n \times m)$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

где  $a_{ij}$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, m$  — элементы, лежащие на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Сокращенная запись:  $A = \{a_{ij}\} = \{a_{ij}\}$ . Можно видеть, что матрица  $A$  представляет собой тело помеченной матрицы вида  $A(XY)$ , где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x_i\}$  и  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = \{y_j\}$ . Так что непомеченную матрицу можно определить как частный случай помеченной матрицы, у которой пометки не записаны в явном виде (т. е. множество пометок — пустое множество). Очевидно, для психологии, социологии и других наук, имеющих дело с множествами сложных объектов, непомеченные матрицы представляют ограниченный интерес.

Одну и ту же матрицу можно записывать многими способами, по-разному ориентируя в целом на плоскости, различным образом сочетая отображаемые объекты и размещая их пометки в шапке матрицы. Все такие способы приводят к эквивалентным «с точностью до записи» результатам. В частности, можно условиться значения *первой* (по порядку записи в обозначении матрицы) из величин размещать по строкам матрицы, второй — по столбцам, третьей — по блокам столбцов, а значения четвертой — по блокам строк, нумеруя пометки этих значений сверху вниз и слева направо, как это было сделано в матрице  $A(XYZ)$ . Можно упростить запись, убрав разделяющие линии, кроме пунктира, который разделяет блоки столбцов (и строк, если надо), для того чтобы облегчить восприятие и понимание структуры данных в матрице. Можно сокращенно записать многомерную помеченную матрицу в виде элемента с пометками и индексами либо в виде *мультимножества*.

$$\begin{aligned} A(XYZ) &= \begin{matrix} & y_1 z_1 & y_2 z_1 & & y_1 z_2 & y_2 z_2 & & y_1 z_3 & y_2 z_3 \\ x_1 & (a_{111} & a_{121} & | & a_{112} & a_{122} & | & a_{113} & a_{123} \\ x_2 & (a_{211} & a_{221} & | & a_{212} & a_{222} & | & a_{213} & a_{223} \end{matrix} = \\ &= \begin{matrix} y_j z_k \\ x_i(a_{ijk}) = \{a_{ijk} x_i y_j z_k\} \end{matrix}; \end{aligned}$$

все это эквивалентные записи одной матрицы.

Двумерную матрицу с одинаковым количеством строк и столбцов называют *квадратной*; тогда говорят о порядке матрицы. Матрица размера  $n \times n$  есть матрица *порядка*  $n$ . Конечно, корректней было бы в этом случае говорить о матрице «порядка  $n$ -квадрат».

Потому что трехмерная матрица с одинаковым числом  $n$  строк,  $n$  столбцов и  $n$  блоков столбцов (или строк) является кубической и содержит  $n \times n \times n = n^3$  элементов в своем теле, а  $N$ -мерная матрица содержит  $n^N$  элементов и является гиперкубической. Если в матрице  $A(XYZ)$  заменить произведение  $YZ$  на новую переменную:  $YZ = O$ , то из трехмерной матрица превращается в двумерную:

$$A(XO) = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

где  $o_r = y_j z_k$ ,  $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $j = 1, 2$  и  $k = 1, 2, 3$ ; но в ней теперь исходные переменные  $YZ$  стали *неявными* переменными. Заметим, что при четном  $N = 2, 4, 6, \dots$  и одинаковом числе градаций  $n_1 = n_2 = \dots = n_N$  многомерная матрица оказывается не только гиперкубической с числом элементов  $n^N$  в теле, но и квадратной после преобразования к двумерному виду, путем подстановок, как это было сделано с преобразованием  $A(XYZ) \rightarrow A(XO)$ .

Показанные выше преобразования представляют собой, так сказать, *качественные* действия с матрицами. К числу таких же действий относятся вращения, перестановки, отбрасывание или приписывание строк, столбцов, блоков, задание блочной структуры на матрице и сравнение матриц — преобразования, часть которых была рассмотрена в разделе 1.2.4.

Вращения матриц можно осуществлять вокруг *пяти осей симметрии* — перпендикулярной плоскости матрицы, горизонтальной и вертикальной, а также расположенных под углом  $45^\circ$  и  $135^\circ$  от горизонтали (отсчитывая углы против часовой стрелки). Матрицы, которые не изменяются в результате вращения вокруг определенных осей, называются *симметричными* (относительно этих осей). К примеру, квадратная двумерная матрица из одинаковых элементов *плотисимметрична*, а рассмотренные в книге ковариационные и корреляционные матрицы *односимметричны*, причем симметричны относительно оси, расположенной под углом  $135^\circ$  к горизонтали, которая проходит через так называемую *главную диагональ* матрицы. Этот распространенный вид вращения, при котором строки и столбцы матрицы меняются местами, называют *транспонированием*. В частности, если транспонировать матрицу-строку, то получится матрица-столбец, и наоборот. Заметим, что матрица-строка и матрица-столбец, имеющие величину и направление, суть *векторы*. Поэтому и говорят об одномерных матрицах (либо блоках многомерных матриц) как о векторах-строках размером  $(1 \times m)$ , в которых одна строка и  $m$  столбцов, и о векторах-столбцах размером  $(n \times 1)$ , в которых  $n$  строк и один столбец.

*Перестановки (перестройки) матриц обусловлены различными размещениями объектов и обозначающих их пометок в записи матрицы. Это перестановка рядов:  $(y_1, y_2) \Leftrightarrow (y_2, y_1)$ , «выворачивание наизнанку» блоков пометок:*

$$\left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline y_1 & y_2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c|c} y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & x_2 \end{array} \right|,$$

а также их комбинации между собой и с вращениями.

*Отбрасыванием или приписыванием строк, столбцов, блоков из матрицы получают подматрицы либо надматрицы. Например, приписывая две новые строки для градаций  $x_1, x_2 \in X$  и рассматривая прежние и новые строки в сочетании со значениями четвертой переменной  $w_1, w_2 \in W$ , получим из матрицы  $A(XYZ)$  четырехмерную матрицу  $A(XYZW)$  размером  $(2 \times 2 \times 3 \times 2)$ , записать которую может сам читатель.*

В отличие от перестановок при задании *блочной структуры* ничего не удаляется и не приписывается, но матрица разделяется на части, которые «сосуществуют» в ней и по мере надобности могут преобразовываться по отдельности. Такие части называются *блоками*, и если они записаны в свернутом виде, как элементы новой матрицы, то она называется *блочной матрицей*. Обычно на матрице можно задать несколько *блочных структур*. Так, на трехмерной помеченной матрице, рассмотренной выше, можно задать три блочные структуры:

$$A(XYZ) = (Xy_1z_1, Xy_2z_1, \dots, Xy_2z_3) \cup \\ \cup (XYz_1, XYz_2, XYz_3) \cup \begin{bmatrix} x_1YZ \\ x_2YZ \end{bmatrix},$$

а перестраивая матрицу, — еще и другие блочные структуры.

Важную роль в прикладных исследованиях играет *сравнение матриц*. Сравнение осуществляется по всем рассмотренным свойствам матриц: по мерности, размеру, пометкам и их размещению, по элементам, по общей ориентации (горизонтальной, вертикальной) сравниваемых матриц, причем сравниваются матрицы и попарно и по группам, если матриц несколько (что характерно, например, для экспериментальной психологии). В результате сравнения устанавливаются различие, сходство, тождество и равенство матриц.

О двух непомеченных матрицах говорят, что они *равны* ( $A = B$ ), если они имеют одинаковые формулы размера и если все  $a_{ij} = b_{ij}$ .

Для помеченных матриц это неверно: матрицы должны быть еще *тождественно* помечены, причем пометки должны быть *однообразно* размещены. По этим причинам сравнение помеченных матриц предваряется перестройками для придания пометкам однообразного размещения. На практике следует по возможности единообразно размещать пометки в матрицах, — для записи первичных результатов измерений, при сводке данных или в других целях. Это облегчает сравнение и избавляет от ошибок. В общем случае сравниваемые тождественные по пометкам матрицы не равны, но могут быть *сходны* по элементам, и тогда надо использовать какие-либо критерии (в том числе статистические) для оценки меры сходства-различия. А если матрицы не тождественны по пометкам, то они могут полностью различаться пометками или иметь часть одинаковых пометок, причем большую либо меньшую; соответственно определяется качественное различие-сходство сравниваемых матриц и, разумеется, отражаемых матрицами объектов исследования. В результате сравнений, уже путем количественных преобразований, из исходных матриц можно получить новые матрицы.

Количественные преобразования тоже рассматривались в разделе 1.2.4 и использовались в других разделах книги. Поэтому здесь только систематизируем их и дополним.

Следует различать аддитивные и мультипликативные действия. К аддитивным относятся логическое, прямое, простое сложение и обобщение.

Логическое суммирование (или дизъюнкция, объединение) выполняется над булевыми матрицами, элементы которых суть нули или/и единицы, либо над пометками небулевых матриц. Результатом служит булева матрица, содержащая все различные элементы слагаемых, либо множество пометок, которое тоже содержит все разные пометки слагаемых; например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\{x_1, x_2\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

При этом суммирование выполняется по правилам алгебры логики (булевой алгебры):

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 + \dots + 1 \\ \dots \\ 1 + 0 + \dots + 0 \\ 0 + 0 + \dots + 1 \\ 0 + 0 + \dots + 0 \end{array} \right\} = 1,$$

$$0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

Прямое сложение можно рассматривать как объединение небулевых матриц, не имеющих одинаковых пометок, при котором,

однако, слагаемые размещаются на главной диагонали матрицы-суммы (*ассоциированной матрицы*), а внедиагональные блоки остаются пустыми либо заполняются нулями; например:

$$A \oplus B \oplus C = \begin{bmatrix} \begin{matrix} A & & \\ 3A_1, 2A_2 & & \\ \hline & B & \\ & 2B_1 & \\ & 4B_2 & \\ \hline & & C \\ & & 3C_1, 5C_2, 2C_3 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}.$$

Заметим, что это сложение необходимо при сводке данных разных исследователей (либо серий экспериментов), так как становятся очевидными пробелы в данных.

*Простое суммирование* — известная операция из линейной алгебры. Оно выполняется для конгруэнтных матриц (совпадающих при наложении), тождественных по пометкам; например:

$$A_1 + A_2 = (3A_1, 2A_2) + (4A_1, -3A_2) = (7A_1, -A_2)$$

Суммирование, как видим, выполняется по правилам обычной алгебры. При этом имеется частный случай простого суммирования — сложение матрицы с числом, которое означает суммирование каждого элемента матрицы с этим числом.

*Обобщение матриц* можно определить как такое сложное аддитивное действие, при котором пометки слагаемых объединяются, одинаковые элементы просто суммируются между собой, разные — суммируются с нулями, а на пересечении отсутствующих элементов остаются пустые места. Например:

$$\begin{aligned} A_1 \circ A_2 \circ A_3 = & \begin{matrix} & A_1 & A_2 \\ A_1 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{matrix} \circ \begin{matrix} & A_2 & A_3 \\ A_2 & \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{matrix} \circ \begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \end{matrix} = \\ & \begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \\ A_2 & \begin{pmatrix} a_{21} & 2a_{22} & a_{23} & \end{pmatrix} \\ A_3 & \begin{pmatrix} 2a_{31} & 3a_{32} & 2a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ A_4 & \begin{pmatrix} a_{42} & a_{43} & \end{pmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

Сравнивая аддитивные действия, можно увидеть, что из обобщения, наложив определенные ограничения, можно в качестве частных случаев получить все остальные.

*Мультипликативных* действий тоже несколько: декартово, кронекерово, логическое, адамарово, смешанное, скалярное умножения матриц и умножение матрицы на скаляр. Большинство из них имеет обратные операции — соответствующие *деления* матриц.

*Декартово* умножение и деление выполняются над пометками матриц, как было показано в разделе 1.2.4; в результате получаются пометки совмещенных и условных событий (величин, функций). *Кронекерово*, или тензорное, умножение — это разновидность декартова умножения числовых элементов в матрицах-сомножителях; например:  $(x_{11}, x_{12}) \otimes (y_{11}, y_{12}, y_{13}) = (x_{11}y_{11}, x_{11}y_{12}, x_{11}y_{13}, x_{12}y_{11}, x_{12}y_{12}, x_{12}y_{13})$ . Заметим, что размер матрицы-результата равен произведению размеров сомножителей, а их мерность не ограничивает применимости тензорного умножения.

Мерность сомножителей незначима и при *логическом* умножении (конъюнкции, пересечении), но это умножение применяется либо для булевых матриц, либо для выделения общей части пометок сомножителей; при этом используется правило конъюнкции:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 \end{array} \right\} = 0.$$

Например,  $\{x_1, x_2\} \cap \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_2\}$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \emptyset$$

*Адамарово*, или поточечное, умножение применяется только для конгруэнтных матриц и состоит в алгебраическом перемножении элементов с одинаковыми индексами, например.

$$\{a_{ij,k}\} \cdot \{b_{ij,k}\} = \{a_{ij,k}b_{ij,k}\}.$$

Широко известное из линейной алгебры умножение матрицы на скаляр представляет собой частный случай адамарова умножения двух матриц, в одной из которых все элементы состоят из этого скаляра:  $a\{b_{ij,k}\} = \{a \cdot b_{ij,k}\}$ . Адамарово умножение вызывает легко выполнимые действия — адамарово деление матриц, адамарову  $h$ -ю степень, в том числе — корень  $h$ -й степени из матрицы:

$$\begin{aligned} \{a_{ij,k}\} : \{b_{ij,k}\} &= \{a_{ij,k} : b_{ij,k}\}, \\ \{a_{ij,k}\}^{\circ 2} &= \{a_{ij,k}^2\}, \quad \{a_{ij,k}\}^{\circ 1/3} = \{\sqrt[3]{a_{ij,k}}\}. \end{aligned}$$

При этом *обратная* (в смысле адамарова умножения) числовая матрица состоит из *обратных* чисел:

$$\{a_{ij,k}\}^{\circ -1} = \{1/a_{ij,k}\},$$

так что *единичная* матрица в этом случае есть матрица из одних единиц (или еще нулей — там, где в исходной матрице нулевые элементы).

*Смешанное* умножение, на котором в книге основаны матричные уравнения распределений, представляет собой определенное сочетание кронекерова и адамарова умножений, а именно: можно перемножать и делить помеченные матрицы разного размера и мерности, но при этом на матрице большего размера задается блочная структура, конгруэнтная элементам матрицы меньшего размера, и блоки умножаются (делятся) на элементы как на скаляры. Из-за возможности нескольких блочных структур на большем сомножителе результат смешанного умножения в общем случае многозначен. Однако он может быть однозначным, если в блочной матрице отображены среди других те же объекты, что и в меньшем сомножителе, а это всегда выполняется для системы случайных величин, распределения в которой взаимосвязаны матричными уравнениями (см. разделы 1.3.1, 3.1.3, 4.1.3, 4.3.1, 5.3.4).

Последний вид умножения — *скалярное* умножение матриц — на самом деле не является чисто мультипликативным действием, хотя в названии это широко и прочно укоренилось, а представляет собой *составную*, мультипликативно-аддитивную операцию, причем в общем и целом некоммутативную, ибо результат зависит от порядка сомножителей. В частности, если умножать вектор-строку на равнодлинный вектор-столбец, то получится скаляр; например.

$$(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = [2(-1) + 4 \cdot 3 + (-1)2 + 3 \cdot 4] = 20.$$

Отметим, что ковариация определяется как скалярное произведение двух векторов, из которых один записан (или подразумевается) в виде строки, а второй — в виде столбца. Но если поступить наоборот и умножить вектор-столбец размером  $(n \times 1)$  на вектор-строку размером  $(1 \times m)$ , то получится матрица размером  $(n \times m)$ , такая же, как если бы использовалось кронекерово умножение; например:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \quad 4) = \begin{bmatrix} (-1)2 & (-1)4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ограничивают использование скалярного умножения необходимая аддитивность результатов частных произведений, которая обычно отсутствует у помеченных матриц, и необходимость первому сомножителю иметь столько же столбцов, сколько строк у

второго сомножителя. Например, можно скалярно перемножить *слева направо* несколько непомеченных матриц, если произведение первых двух имеет столько же столбцов, сколько строк у третьего сомножителя и т. д., т. е. если, в частности, произведение формул размера сомножителей такое:

$$(n \times m)(m \times k)(k \times r) = (n \times k)(k \times r) = (n \times r),$$

где  $(n \times r)$  — размер конечного результата. Например:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3 \times 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ (2 \times 1)(1 \times 2)(2 \times 3) = (2 \times 2)(2 \times 3) = (2 \times 3), \\ = \begin{bmatrix} (6 \cdot 2 + 4 \cdot 4) & (6 \cdot 3 + 4 \cdot 2) & (6 \cdot 1 + 4 \cdot 3) \\ (9 \cdot 2 + 6 \cdot 4) & (9 \cdot 3 + 6 \cdot 2) & (9 \cdot 1 + 6 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 26 & 18 \\ 42 & 30 & 27 \end{pmatrix}$$

Надо отметить, что скалярное умножение матриц ассоциативно:  $ABC = (AB)C = A(BC)$ . Для симметричных матриц всегда возможно скалярное возведение в  $k$ -ю степень, причем оно рекуррентно:  $A^k = A \cdot A^{k-1} = A^2 \cdot A^{k-2}$  и т. д. А симметричная матрица порядка  $n$  всегда получается при скалярном умножении матрицы с  $n$  строками на ее транспозицию, что используется в факторном анализе при восстановлении корреляционной матрицы через матрицу факторов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица I  
Значения стандартной функции распределения  $F(x)$  и  
плотности  $f(x)$  нормального закона

$x$	$F(x)$	$f(x)$	$x$	$F(x)$	$f(x)$
-3,0	0,00135	0,00443	0,0	0,50000	0,39894
-2,9	0,00178	0,00595	0,1	0,53983	0,39695
-2,8	0,00256	0,00792	0,2	0,57926	0,39104
-2,7	0,00347	0,01042	0,3	0,61791	0,38139
-2,6	0,00466	0,01358	0,4	0,65542	0,36827
-2,5	0,00621	0,01753	0,5	0,69146	0,35207
-2,4	0,00820	0,02239	0,6	0,72575	0,33322
-2,3	0,01072	0,02833	0,7	0,75804	0,31225
-2,2	0,01390	0,03547	0,8	0,78814	0,28969
-2,1	0,01786	0,04398	0,9	0,81594	0,26608
-2,0	0,02275	0,05399	1,0	0,84134	0,24197
-1,9	0,02872	0,06562	1,1	0,86433	0,21785
-1,8	0,03593	0,07895	1,2	0,88493	0,19419
-1,7	0,04457	0,09405	1,3	0,90320	0,17137
-1,6	0,05480	0,11092	1,4	0,91924	0,14973
-1,5	0,06681	0,12952	1,5	0,93319	0,12952
-1,4	0,08076	0,14973	1,6	0,94520	0,11092
-1,3	0,09680	0,17137	1,7	0,95543	0,09405
-1,2	0,11507	0,19419	1,8	0,96407	0,07895
-1,1	0,13567	0,21758	1,9	0,97128	0,06562
-1,0	0,15866	0,24197	2,0	0,97725	0,05399
-0,9	0,18406	0,26608	2,1	0,98214	0,04398
-0,8	0,21186	0,28969	2,2	0,98610	0,03547
-0,7	0,24196	0,31225	2,3	0,98928	0,02833
-0,6	0,27425	0,33322	2,4	0,99180	0,02239
-0,5	0,30854	0,35207	2,5	0,99379	0,01753
-0,4	0,34458	0,36827	2,6	0,99534	0,01358
-0,3	0,38209	0,38139	2,7	0,99653	0,01042
-0,2	0,42074	0,39104	2,8	0,99744	0,00792
-0,1	0,46017	0,39695	2,9	0,99813	0,00595
0,0	0,50000	0,39894	3,0	0,99865	0,00443



Таблица II

## Значения гамма-функции

Для  $x < 1$  и  $x > 2$  значения гамма-функции вычисляются по формулам  $\Gamma(x) = \Gamma(x+1) : x$  и  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ . Например:  $\Gamma(0,7) = \Gamma(1,7) : 0,7 = 0,90864 : 0,7 = 1,2981$ ;  $\Gamma(3,5) = 2,5 \cdot \Gamma(2,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot \Gamma(1,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,88623 = 3,32336$

$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90840	1,50	0,88623	1,75	0,91906
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,95561
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Таблица III

Значения z-преобразования Фишера для  $r_{12}$   
(по: Митропольский, 1961)

$r_{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0501	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
1	0,1003	0,1105	0,1206	0,1308	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
3	0,3095	0,3206	0,3317	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2978	2,6467

Таблица IV  
Значения  $\tau$ , для  $\lambda$ -преобразования Фишера  
(по: Митропольский, 1961)  
Нуль целых и запятая опущены

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898
1	0997	1096	1194	1293	1391	1489	1586	1684	1781	1877
2	1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821
3	2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714
4	3800	3885	3969	4053	4136	4219	4301	4382	4462	4542
5	4621	4699	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299
6	5370	5441	5511	5580	5649	5717	5784	5850	5915	5980
7	6044	6107	6169	6231	6291	6351	6411	6469	6527	6584
8	6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114
9	7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574
1,0	7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969
1	8005	8041	8076	8110	8144	8178	8211	8243	8275	8306
2	8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591
3	8617	8643	8668	8692	8717	8741	8764	8787	8810	8832
4	8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033
5	9051	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201
6	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341
7	9354	9368	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458
8	9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9538	9548	9554
9	9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9618	9626	9633
2,0	9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9686	9693	9699
1	9704	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753
2	9759	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797
3	9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834
4	9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	9861	9864
5	9868	9869	9871	9874	9876	9879	9881	9884	9886	9888
6	9890	9892	9894	9897	9899	9901	9903	9904	9906	9908
7	9910	9912	9914	9915	9917	9919	9920	9922	9923	9925
8	9926	9928	9929	9931	9932	9933	9935	9936	9937	9938
9	9940	9941	9942	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949

Таблица V

Критические значения выборочного коэффициента  
линейной корреляции  $r_\alpha$  (по: Урбах, 1964)  
 $r$  незначим при  $r \leq r_{\alpha=0,05}$  и значим при  $r > r_{\alpha=0,01}$

n	5%	1%	n	5%	1%
4	0,950	0,990	26	0,388	0,496
5	0,878	0,959	27	0,381	0,487
6	0,811	0,917	28	0,374	0,478
7	0,754	0,874	29	0,367	0,470
8	0,707	0,834	30	0,361	0,463
9	0,666	0,798	35	0,332	0,435
10	0,632	0,765	40	0,310	0,407
11	0,602	0,735	45	0,292	0,384
12	0,578	0,708	50	0,277	0,364
13	0,553	0,684	60	0,253	0,333
14	0,532	0,661	70	0,234	0,308
15	0,514	0,641	80	0,219	0,288
16	0,497	0,623	90	0,206	0,272
17	0,482	0,606	100	0,196	0,258
18	0,468	0,590	125	0,175	0,230
19	0,456	0,575	150	0,160	0,210
20	0,444	0,561	200	0,138	0,182
21	0,433	0,549	250	0,124	0,163
22	0,423	0,537	300	0,113	0,148
23	0,413	0,526	400	0,098	0,128
24	0,404	0,515	500	0,088	0,115
25	0,396	0,505	1000	0,062	0,081

Таблица VI

Критические значения выборочного коэффициента  
ранговой корреляции  $\rho_\alpha$  (по: Урбах, 1964)  
 $\rho$  незначим при  $\rho \leq \rho_{\alpha=0,05}$  и значим при  $\rho > \rho_{\alpha=0,01}$

n	5%	1%	n	5%	1%	n	5%	1%
5	0,94	—	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	—	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,40	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

Таблица VII

Квантили  $\chi^2$ -распределения для доверительной вероятности

$$1 - \alpha = 0,95 \text{ и } 0,99$$

Нулевая гипотеза о сходстве принимается при  $\chi^2 \leq \chi_{\alpha=0,05}^2$ и отклоняется при  $\chi^2 > \chi_{\alpha=0,01}^2$ 

$\nu$	0,95	0,99	$\nu$	0,95	0,99	$\nu$	0,95	0,99
1	3,84	6,64	31	45,0	52,2	72	92,8	103
2	5,99	9,21	32	46,2	53,5	74	95,1	105
3	7,82	11,3	33	47,4	54,8	76	97,4	108
4	9,49	13,3	34	48,6	56,1	78	99,8	110
5	11,1	15,1	35	49,8	57,3	80	102	112
6	12,6	16,8	36	51,0	58,6	82	104	115
7	14,1	18,5	37	52,2	59,9	84	106	117
8	15,5	20,1	38	53,4	61,2	86	109	119
9	16,9	21,7	39	54,6	62,4	88	111	122
10	18,3	23,2	40	55,8	63,7	90	113	124
11	19,7	24,7	41	56,9	65,0	92	115	126
12	21,0	26,2	42	58,1	66,2	94	118	129
13	22,4	27,7	43	59,3	67,5	96	120	131
14	23,7	29,1	44	60,5	68,7	98	122	133
15	25,0	30,6	45	61,7	70,0	100	124	136
16	26,3	32,0	46	62,8	71,2	110	135	147
17	27,6	33,4	47	64,0	72,4	120	147	159
18	28,9	34,8	48	65,2	73,7	130	158	170
19	30,1	36,2	49	66,3	74,9	140	169	182
20	31,4	37,6	50	67,5	76,2	150	180	193
21	32,7	38,9	52	69,8	78,6	200	234	249
22	33,9	40,3	54	72,2	81,1	250	288	305
23	35,2	41,6	56	74,5	83,5	300	341	360
24	36,4	43,0	58	76,8	86,0	400	445	469
25	37,6	44,3	60	79,1	88,4	500	553	576
26	38,9	45,6	62	81,4	90,8	600	658	683
27	40,1	47,0	64	83,7	93,2	700	763	790
28	41,3	48,3	66	86,0	95,6	800	867	896
29	42,6	49,6	68	88,2	98,0	900	971	1002
30	43,8	50,9	70	90,5	100	1000	1075	1107

Таблица VIII

Квантили  $t$ -распределения Стьюдента для доверительной вероятности  $1 - \alpha = 0,95, 0,99$  и  $0,999$

Нулевая гипотеза о сходстве принимается при  $t \leq t_{\alpha=0,05}$   
и отклоняется при  $t > t_{\alpha=0,01}$

$\nu$	0,95	0,99	0,999	$\nu$	0,95	0,99	0,999
1	12,706	63,657	636,619	35	2,030	2,724	3,591
2	4,303	9,925	31,599	40	2,021	2,704	3,551
3	3,182	5,841	12,924	45	2,014	2,690	3,520
4	2,776	4,604	8,610	50	2,009	2,678	3,496
5	2,571	4,032	6,869	55	2,004	2,668	3,476
6	2,447	3,707	5,959	60	2,000	2,660	3,460
7	2,365	3,450	5,408	65	1,997	2,654	3,447
8	2,306	3,355	5,041	70	1,994	2,648	3,435
9	2,262	3,250	4,781	75	1,992	2,643	3,426
10	2,228	3,169	4,587	80	1,990	2,639	3,416
11	2,201	3,106	4,437	85	1,988	2,635	3,412
12	2,179	3,054	4,318	90	1,987	2,632	3,402
13	2,160	3,012	4,221	95	1,985	2,629	3,396
14	2,145	2,977	4,140	100	1,984	2,626	3,390
15	2,131	2,947	4,073	105	1,983	2,623	3,386
16	2,120	2,921	4,015	110	1,982	2,621	3,382
17	2,110	2,898	3,965	120	1,980	2,617	3,374
18	2,101	2,878	3,922	130	1,978	2,614	3,366
19	2,093	2,861	3,883	140	1,977	2,611	3,361
20	2,086	2,845	3,850	150	1,976	2,609	3,357
21	2,080	2,831	3,819	200	1,972	2,601	3,340
22	2,074	2,819	3,792	300	1,968	2,592	3,323
23	2,069	2,807	3,768	400	1,966	2,588	3,315
24	2,064	2,797	3,745	500	1,965	2,586	3,310
25	2,060	2,787	3,725	600	1,964	2,584	3,306
26	2,056	2,779	3,707	700	1,9634	2,5829	3,304
27	2,052	2,771	3,690	800	1,9629	2,5820	3,302
28	2,048	2,763	3,674	900	1,9626	2,5813	3,301
29	2,045	2,756	3,659	1000	1,9623	2,5808	3,300
30	2,042	2,750	3,646	$\infty$	1,9600	2,5758	3,291

Таблица IXa

Квантили  $F$ -распределения для доверительной вероятности  $1 - \alpha = 0,95$ 

(по: Митропольский, 1961)

Нулевая гипотеза о сходстве принимается при  $F^2 \leq F^2_{\alpha=0,05}$  $\nu_1$  — число степеней свободы числителя,  $\nu_2$  — знаменателя

$\nu_2$	$\nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
1		161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	248,5	249,0	251,8	254,3
2		18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3		10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4		7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5		6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6		5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7		5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8		5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9		5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10		4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11		4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12		4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13		4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14		4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15		4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16		4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17		4,46	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18		4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19		4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20		4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21		4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22		4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78

Окончание табл. IXa

$\nu_2$	$\nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
23		4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24		4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25		4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26		4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27		4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28		4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29		4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30		4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35		4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40		4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45		4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50		4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60		4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70		3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,36
80		3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90		3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100		3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125		3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150		3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200		3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300		3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400		3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500		3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,95	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000		3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
$\infty$		3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Таблица IX 6

Квантили F-распределения для доверительной вероятности  $1 - \alpha = 0,99$ 

(по: Митропольский, 1961)

Нулевая гипотеза о сходстве отклоняется при  $F > F_{\alpha=0,01}$ ; $\nu_1$  — число степеней свободы числителя,  $\nu_2$  — знаменателя

$\nu_2$	$\nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
1		4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6234	6302	6366
2		98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,46	99,48	99,50
3		34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,83	26,60	26,35	26,12
4		21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,93	13,69	13,46
5		16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,68	9,47	9,24	9,02
6		13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,31	7,09	6,88
7		12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,07	5,85	5,65
8		11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,28	5,06	4,86
9		10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,73	4,51	4,31
10		10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,33	4,12	3,91
11		9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,02	3,80	3,60
12		9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,78	3,56	3,36
13		9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,59	3,37	3,16
14		8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,43	3,21	3,00
15		8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,29	3,07	2,87
16		8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,18	2,96	2,75
17		8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,08	2,86	2,65
18		8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	3,00	2,79	2,57
19		8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	2,92	2,70	2,49
20		8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,86	2,63	2,42
21		8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,99	2,80	2,58	2,36
22		7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,75	2,53	2,31

Окончание табл. IX 6

$\nu_2$	$\nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
23		7,88	5,68	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,89	2,70	2,48	2,26
24		7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,66	2,44	2,21
25		7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,81	2,62	2,40	2,17
26		7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,78	2,58	2,36	2,13
27		7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,74	2,55	2,33	2,10
28		7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,71	2,52	2,30	2,06
29		7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,68	2,49	2,27	2,03
30		7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,47	2,24	2,01
35		7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,56	2,37	2,13	1,90
40		7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,48	2,29	2,05	1,80
45		7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,43	2,23	1,99	1,75
50		7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,38	2,18	1,94	1,68
60		7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,12	1,87	1,60
70		7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,28	2,07	1,82	1,53
80		6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,24	2,03	1,78	1,49
90		6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,21	2,00	1,75	1,45
100		6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	2,19	1,98	1,73	1,43
125		6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	2,15	1,94	1,69	1,37
150		6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,63	2,31	2,13	1,92	1,66	1,33
200		6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,28	2,09	1,88	1,62	1,28
300		6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,24	2,06	1,85	1,59	1,22
400		6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,56	2,23	2,04	1,84	1,57	1,19
500		6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,22	2,03	1,83	1,56	1,16
1000		6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,53	2,20	2,01	1,81	1,54	1,11
$\infty$		6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,79	1,52	1,00

Таблица X

Квантили  $G$ -распределения Кохрана  
для доверительных вероятностей  $1 - \alpha = 0,95$   
(напечатаны обычным шрифтом)  
и  $1 - \alpha = 0,99$  (напечатаны жирным шрифтом)

Нуль делых и занятая ошущены. Нулевая гипотеза о сходстве  
приимается при  $G \leq G_{\alpha=0,05}$  и отклоняется при  $G > G_{\alpha=0,01}$ ;  
 $m$  — число сравниваемых дисперсий;  $\nu$  — степеней свободы

$\nu$	$m$	3	4	5	6	7	8	9	10
1		967	906	841	781	727	680	638	602
		<b>993</b>	<b>968</b>	<b>928</b>	<b>883</b>	<b>838</b>	<b>794</b>	<b>754</b>	<b>718</b>
2		871	768	684	616	561	516	478	445
		<b>942</b>	<b>864</b>	<b>788</b>	<b>722</b>	<b>664</b>	<b>615</b>	<b>573</b>	<b>534</b>
3		798	684	598	532	480	438	403	373
		<b>863</b>	<b>781</b>	<b>696</b>	<b>626</b>	<b>568</b>	<b>521</b>	<b>481</b>	<b>447</b>
4		746	629	544	480	431	391	358	331
		<b>834</b>	<b>721</b>	<b>633</b>	<b>564</b>	<b>508</b>	<b>463</b>	<b>425</b>	<b>393</b>
5		707	590	506	445	397	360	329	303
		<b>793</b>	<b>676</b>	<b>588</b>	<b>520</b>	<b>466</b>	<b>423</b>	<b>387</b>	<b>357</b>
6		677	560	478	418	373	336	307	282
		<b>761</b>	<b>641</b>	<b>553</b>	<b>487</b>	<b>435</b>	<b>393</b>	<b>359</b>	<b>331</b>
7		653	536	456	398	354	318	290	267
		<b>734</b>	<b>613</b>	<b>526</b>	<b>461</b>	<b>410</b>	<b>370</b>	<b>338</b>	<b>311</b>
8		633	518	439	382	338	304	277	254
		<b>711</b>	<b>590</b>	<b>504</b>	<b>440</b>	<b>391</b>	<b>352</b>	<b>321</b>	<b>294</b>
9		617	502	424	368	326	293	266	244
		<b>691</b>	<b>570</b>	<b>485</b>	<b>423</b>	<b>375</b>	<b>337</b>	<b>307</b>	<b>281</b>
10		602	488	412	357	315	283	257	235
		<b>674</b>	<b>554</b>	<b>470</b>	<b>408</b>	<b>362</b>	<b>325</b>	<b>295</b>	<b>270</b>
12		580	466	392	339	298	267	244	224
		<b>647</b>	<b>527</b>	<b>445</b>	<b>384</b>	<b>340</b>	<b>305</b>	<b>277</b>	<b>254</b>
14		560	450	377	325	285	256	232	213
		<b>625</b>	<b>503</b>	<b>425</b>	<b>366</b>	<b>322</b>	<b>290</b>	<b>263</b>	<b>240</b>
16		547	437	364	313	277	246	223	203
		<b>606</b>	<b>486</b>	<b>409</b>	<b>353</b>	<b>310</b>	<b>278</b>	<b>251</b>	<b>230</b>
18		536	425	353	305	267	238	217	199
		<b>590</b>	<b>474</b>	<b>397</b>	<b>340</b>	<b>298</b>	<b>269</b>	<b>243</b>	<b>221</b>
20		526	416	335	298	259	230	210	191
		<b>577</b>	<b>461</b>	<b>385</b>	<b>330</b>	<b>289</b>	<b>260</b>	<b>235</b>	<b>215</b>
25		504	397	329	282	245	219	198	180
		<b>550</b>	<b>438</b>	<b>363</b>	<b>312</b>	<b>270</b>	<b>243</b>	<b>219</b>	<b>200</b>
30		480	383	315	270	233	209	190	173
		<b>533</b>	<b>420</b>	<b>349</b>	<b>299</b>	<b>259</b>	<b>230</b>	<b>209</b>	<b>190</b>
35		479	372	306	262	227	201	183	166
		<b>518</b>	<b>408</b>	<b>337</b>	<b>288</b>	<b>250</b>	<b>222</b>	<b>200</b>	<b>182</b>
40		469	364	298	255	220	195	177	162
		<b>505</b>	<b>397</b>	<b>327</b>	<b>280</b>	<b>242</b>	<b>215</b>	<b>192</b>	<b>177</b>



$\nu$	3	4	5	6	7	8	9	10
45	460	357	291	250	215	190	173	157
	496	387	319	272	235	209	288	172
50	455	350	288	246	210	186	170	152
	488	380	312	266	230	204	184	167
60	444	341	279	239	204	179	161	148
	474	368	300	256	220	198	177	160
80	429	329	268	227	195	170	154	140
	455	350	285	243	210	188	164	150
100	417	319	261	220	189	165	150	136
	441	338	277	235	202	180	160	143
150	401	305	250	211	180	160	145	130
	421	322	263	220	194	170	150	137
200	390	299	246	210	180	158	142	130
	410	310	255	215	190	165	148	135

Таблица XI

Допустимые уровни расслоения корреляционной матрицы  
при доверительной вероятности 0,99

$n$  — число наблюдений;  $r(0)$  — значение нулевой «секущей» плоскости, минимальная значимая абсолютная величина коэффициента корреляции;  $|\Delta r|$  — допустимый «шаг» расслоения,  $s$  — допустимое число уровней расслоения;  $r(1), r(2), \dots, r(9)$  — абсолютные значения секущих плоскостей

$n$	$r(0)$	$ \Delta r $	$s$	$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$	$r(4)$	$r(5)$	$r(6)$	$r(7)$	$r(8)$	$r(9)$
40	0,407	0,558	1	0,965	—	—	—	—	—	—	—	—
50	0,364	0,500	1	0,864	—	—	—	—	—	—	—	—
60	0,333	0,462	1	0,795	—	—	—	—	—	—	—	—
80	0,288	0,401	1	0,689	—	—	—	—	—	—	—	—
100	0,258	0,363	2	0,621	0,984	—	—	—	—	—	—	—
120	0,236	0,328	2	0,564	0,892	—	—	—	—	—	—	—
150	0,210	0,296	2	0,505	0,802	—	—	—	—	—	—	—
200	0,182	0,254	3	0,436	0,690	0,944	—	—	—	—	—	—
300	0,148	0,207	4	0,355	0,562	0,769	0,976	—	—	—	—	—
400	0,128	0,182	4	0,310	0,492	0,674	0,856	—	—	—	—	—
500	0,115	0,162	5	0,277	0,439	0,601	0,763	0,925	—	—	—	—
600	0,106	0,150	5	0,256	0,406	0,556	0,706	0,856	—	—	—	—
700	0,098	0,139	6	0,237	0,376	0,515	0,654	0,793	0,932	—	—	—
800	0,091	0,129	7	0,220	0,349	0,478	0,607	0,736	0,865	0,994	—	—
900	0,086	0,122	7	0,208	0,330	0,452	0,574	0,696	0,818	0,940	—	—
1000	0,081	0,116	7	0,197	0,313	0,429	0,545	0,661	0,777	0,893	—	—
1333	0,070	0,100	9	0,170	0,270	0,370	0,470	0,570	0,670	0,770	0,870	0,970

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Абергауз Г.Г., Троня А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчетам. М., 1970.
- Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Пер. с англ. М., 1963.
- Артемьева Е.Ю. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. М., 1969.
- Башарин А.Е., Флейшман Б.С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. М., 1962.
- Бейли Н. Статистические методы в биологии / Пер. с англ. М., 1962.
- Беристайн А. Справочник статистических решений / Пер. с англ. М., 1968.
- Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М., 1983.
- Борель Э. Вероятность и достоверность / Пер. с франц. М., 1964.
- Брауили К.А. Статистические исследования в производстве / Пер. с англ. М., 1949.
- Бурлачук Л.Ф., Морозов С.М. Словарь-справочник по психологической диагностике. Киев, 1989.
- Бусленко Н.П. Метод статистического моделирования. М., 1970.
- Вальд А. Последовательный анализ / Пер. с англ. М., 1960.
- Вайсдер Варден Б.Л. Математическая статистика / Пер. с нем. М., 1960.
- Венецкий И.Г. Вариационные ряды и их характеристики. М., 1970.
- Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., 1964.
- Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
- Горчук Я.П. Графические методы в статистике. М., 1968.
- Гленин Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.
- Даймонд С. Мир вероятностей / Пер. с англ. М., 1970.
- Дружинкин Н.К. Выборочный метод и его применение в экономических исследованиях. М., 1970.
- Езекиел М., Фокс К.А. Методы анализа корреляций и регрессий / Пер. с англ. М., 1966.
- Ефимов Н.В., Розендори Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., 1970.
- Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Л., 1967.
- Иберла К. Факторный анализ / Пер. с нем. М., 1980.
- Интерпретация и анализ данных в социологических исследованиях / Под ред. В.Г. Андреевского, Ю.Н. Толстова. М., 1987.
- Камминский Л.С. Статистическая обработка лабораторных и клинических данных. Л., 1964.
- Кемниц Ю.В. Теория ошибок измерения. М., 1967.
- Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений / Пер. с англ. М., 1966.
- Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи / Пер. с англ. М., 1973.
- Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды / Пер. с англ. М., 1976.
- Кендалл М. Ранговые корреляции / Пер. с англ. М., 1975.
- Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий / Пер. с англ. М., 1969.

- Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.
- Кузичев А.С. Диаграммы Венна. М., 1968.
- Леман Э. Проверка статистических гипотез / Пер. с англ. М., 1964.
- Литтл Р.Дж.А., Рубин Д.Б. Статистический анализ данных с пропусками / Пер. с англ. М., 1990.
- Лукомский Я.И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. М., 1961.
- Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / Пер. с англ. М., 1972.
- Математические методы анализа и интерпретации социологических данных / Под ред. В.Г. Андреевского, Ю.Н. Толстова. М., 1989.
- Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации / Под ред. Г.В. Осипова. М., 1968.
- Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М., 1961.
- Нахимов В.В. Теория эксперимента. М., 1971.
- Нахимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., 1965.
- Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л., 1991.
- Оуэн Д.Б. Сборник статистических таблиц / Пер. с англ. М., 1966.
- Пирятин В.Д. Обработка результатов измерений по методу наименьших квадратов. Харьков, 1962.
- Плохинский Н.А. Биометрия. М., 1970.
- Плошко Б.Г., Елисеева И.И. История статистики. М., 1990.
- Пугачев В.С. Теория случайных функций. М., 1962.
- Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., 1968.
- Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика. Минск, 1967.
- Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. Л., 1961.
- Семендяев К.А. Эмпирические формулы. М.; Л., 1933.
- Справочник по прикладной статистике: В 2 т. М., 1989-1990.
- Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. М., 1990.
- Уилкс С. Математическая статистика / Пер. с англ. М., 1967.
- Урбах В.Ю. Биометрические методы. М., 1964.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. / Пер. с англ. М., 1967.
- Финни Д. Введение в теорию планирования эксперимента / Пер. с англ. М., 1970.
- Фишер Р.А. Статистические методы для исследователей / Пер. с англ. М., 1958.
- Флейс Дж. Статистические методы для изучения таблиц долей и пропорций / Пер. с англ. М., 1989.
- Чернов Г., Мозес Л. Элементарная теория статистических решений / Пер. с англ. М., 1962.
- Шеффе Г. Дисперсионный анализ / Пер. с англ. М., 1963.
- Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества / Пер. с нем. М., 1970.
- Юн Дж. Э., Кендал М.Дж. Теория статистики / Пер. с англ. М., 1960.
- Clauss G., Ebner H. Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Berlin, 1987.
- Fabian V. Statistische Methoden. Berlin, 1971.
- Ferguson G.A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York, 1966.
- Fisz M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin, 1962.
- Guilford J.P. Fundamental Statistics in Psychology and Education. New York, 1956.
- Gutjahr W. Die Messung psychischer Eigenschaften. Berlin, 1971.
- Harman H. Modern Faktor Analysis. Chicago, 1960.
- Horst P. Faktor Analysis of Data Matrices. New York, 1965.
- Jahn W., Vahle H. Die Factoranalyse. Berlin, 1970.
- Kalton G. Introduction to survey sampling. London; New Delhi, 1987.
- Lawson R.B., Goldstein S.G., Musty R.E. Principles and Methods of Psychology. New York; London; Toronto, 1975.
- Lewis D. Quantitative Methods in Psychology. New York; Toronto; London, 1960.
- Rasch D. Elementare Einführung in die mathematische Statistik. Berlin, 1968.

## Содержание

Предисловие ко второму изданию .....	3
Предисловие к первому изданию .....	4

Глава 1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ	7
1.1. СОБЫТИЕ И МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ПОЯВЛЕНИЯ	7
1.1.1. Понятие о событии	7
1.1.2. Случайные и неслучайные события	8
1.1.3. Частота, частость и вероятность	8
1.1.4. Статистическое определение вероятности	11
1.1.5. Геометрическое определение вероятности	12
1.2. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ	14
1.2.1. Понятие о системе событий	14
1.2.2. Совместное появление событий	14
1.2.3. Зависимость между событиями	17
1.2.4. Преобразования событий	18
1.2.5. Уровни количественного определения событий	27
1.3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ КЛАССИФИЦИРОВАННЫХ СОБЫТИЙ	28
1.3.1. Распределения вероятностей событий	29
1.3.2. Ранжирование событий в системе по вероятностям	40
1.3.3. Меры связи между классифицированными событиями	49
1.3.4. Последовательности событий	54
1.4. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ СОБЫТИЙ	61
1.4.1. Ранжирование событий по величине	61
1.4.2. Распределение вероятностей ранжированной системы упорядоченных событий	63
1.4.3. Количественные характеристики распределения вероятностей системы упорядоченных событий	67
1.4.4. Меры корреляции рангов	73
Глава 1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ	76
1.1. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	78
1.1.1. Случайная величина	78
1.1.2. Распределение вероятностей значений случайной величины	80
1.1.3. Основные свойства распределений	85
1.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	88
1.2.1. Меры положения	88
1.2.3. Меры асимметрии и эксцесса	93
1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ	93
1.3.1. Исходные положения	93
1.3.2. Вычисление мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса по негруппированным данным	94
1.3.3. Группировка данных и получение эмпирических распределений	102
1.3.4. Вычисление мер положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса по эмпирическому распределению	107
1.4. ВИДЫ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ	119
1.4.1. Общие положения	119
1.4.2. Нормальный закон	119
1.4.3. Нормализация распределений	130
1.4.4. Некоторые другие законы распределения, важные для психологии	136
Глава 1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	144
1.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	144
1.1.1. Система из двух случайных величин	144
1.1.2. Совместное распределение двух случайных величин	147
1.1.3. Частные безусловные и условные эмпирические распределения и взаимосвязь случайных величин в двумерной системе	152
1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛОЖЕНИЯ, РАССЕИВАНИЯ И СВЯЗИ	155
1.2.1. Числовые характеристики положения и рассеивания	155
1.2.2. Простые регрессии	156
1.2.4. Меры корреляции	161
1.2.5. Совокупные характеристики положения, рассеивания и связи	167
1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА	169
1.3.1. Аппроксимация простой регрессии	169
1.3.2. Определение числовых характеристик при небольшом количестве экспериментальных данных	182
1.3.3. Полный расчет количественных характеристик двумерной системы	191
1.3.4. Расчет совокупных характеристик двумерной системы	202
Глава 1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	207
1.1. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	207
1.1.1. Понятие о многомерной системе	207
1.1.2. Разновидности многомерных систем	208
1.1.3. Распределения в многомерной системе	211
1.1.4. Числовые характеристики в многомерной системе	214
1.2. НЕСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ	220
1.2.1. Числовые характеристики суммы и произведения случайных величин	220
1.2.2. Законы распределения линейной функции от случайных аргументов	222



4.2.3. Множественные линейные регрессии	224
4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА	231
4.3.1. Оценка вероятностей многомерного распределения	231
4.3.2. Определение множественных регрессий и связанных с ними числовых характеристик	235
4.4. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ	240
4.4.1. Свойства и количественные характеристики случайных функций	240
4.4.2. Некоторые классы случайных функций, важные для психологии	246
4.4.3. Определение характеристик случайной функции из эксперимента	249
Глава 5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ	254
5.1. ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ	254
5.1.1. Генеральная совокупность и выборка	254
5.1.2. Количественные характеристики генеральной совокупности и выборки	261
5.1.3. Погрешности статистических оценок	265
5.1.5. Задачи статистической проверки гипотез в психологических исследованиях	277
5.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ И ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ	278
5.2.1. Понятие о статистических критериях	278
5.2.2. $\chi^2$ -критерий Пирсона	281
5.2.3. Основные параметрические критерии	293
5.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ	312
5.3.1. Метод максимального правдоподобия	312
5.3.2. Метод Байеса	313
5.3.3. Классический метод определения параметра функции с заданной точностью	316
5.3.4. Метод проектирования репрезентативной выборки по модели совокупности	321
5.3.5. Метод последовательной проверки статистических гипотез	324
Глава 6. ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА	330
6.1. ПОНЯТИЕ О ДИСПЕРСИОННОМ АНАЛИЗЕ	330
6.1.1. Сущность дисперсионного анализа	330
6.1.2. Предпосылки дисперсионного анализа	332
6.1.3. Задачи дисперсионного анализа	333
6.1.4. Виды дисперсионного анализа	334
6.2. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	334
6.2.1. Схема расчета при одинаковом количестве повторных испытаний	334
6.2.2. Схема расчета при разном количестве повторных испытаний	341
6.3. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	343
6.3.1. Схема расчета при отсутствии повторных испытаний	343
6.3.2. Схема расчета при наличии повторных испытаний	348
6.5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА	362
6.5.1. Понятие о математическом планировании эксперимента	362
6.5.2. Построение полного ортогонального плана эксперимента	365
6.5.3. Обработка результатов математически спланированного эксперимента	370
Глава 7. ОСНОВЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	375
7.1. ПОНЯТИЕ О ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ	376
7.1.1. Сущность факторного анализа	376
7.1.2. Разновидности методов факторного анализа	381
7.1.3. Задачи факторного анализа в психологии	384
7.2. ОДНОФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	384
7.3. МУЛЬТИФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	389
7.3.1. Геометрическая интерпретация корреляционной и факторной матриц	389
7.3.2. Центроидный метод факторизации	392
7.3.3. Простая латентная структура и ротация	398
7.3.4. Пример мультифакторного анализа с ортогональной ротацией	402
Приложение 1. ПОЛЕЗНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ И ДЕЙСТВИЯХ С НИМИ	416
Приложение 2. МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ	425
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	434

Учебное издание

*Сугодольский Геннадий Владимирович*

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ  
ДЛЯ ПСИХОЛОГОВ**

Редактор *Н. В. Куликова*

Художественный редактор *Е. И. Егорова*

Корректоры *К. Я. Герасовича, Е. К. Терехтеева*

Оригинал-макет подготовила *С. Л. Кузьмина*

Издание подготовлено в *AMS-TeX*

Лицензия ЛР № 040050 от 15.08.96

---

Подписано в печать 30.06.98. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29. Усл. кр.-отт. 29,19. Уч.-изд. л. 27,62.  
Тираж 700 экз. Заказ 244.  
Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9

---

Центр оперативной полиграфии С.-Петербургского университета.  
199034, С.-Петербург, наб. Макарова, 6.